Suites ayant une relation de récurrence linéaire

On s'intéresse à des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie une *relation de récurrence*, c'est à dire une équation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i} \tag{1}$$

L'entier k est appelé ordre de la récurrence, et les nombres complexes $a_0, \dots a_{k-1}$ sont quelconques, mais fixés.

Théorème 1. Soit $k \geq 1$, et $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$.

L'ensemble *Sol* des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient (1) est un sous espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Sa dimension est exactement k.

On peut en expliciter une base en posant

$$P = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$$

Si P est un polynôme à racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (dans $\mathbb{C}$), alors une base de *Sol* est donnée par la famille des suites $u_i = (\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Plus généralement, si $P = \prod_{i\in I}(X-\mu_i)^{\alpha_i}$, avec les μ_i deux à deux distincts, et les $\alpha_i \geq 1$, alors une base de *Sol* est donnée par la famille des suites $u_{i,j} = (n^j \mu_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $i \in I$ et $j \in [|0, \alpha_i - 1|]$

Remarque 1. En particulier, ces formules permettent directement de connaitre le comportement asymptotique des suites qui admettent une relation de récurrence linéaire.

Démonstration. C'est bien un sous espace vectoriel : si $u, v \in Sol$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout n :

$$(u+\lambda v)_{n+k} = u_{n+k}+\lambda v_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i} + \lambda \sum_{i=0}^{k-1} a_i v_{n+i} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i (u_{n+i}+\lambda v_{n+i}) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i (u+\lambda v)_{n+i}$$

Sa dimension est majorée par k : en effet, si l'on connait les k premières valeurs de la suite, l'équation 1 permet de calculer récursivement les autres termes. Ainsi l'application linéaire

$$\Theta : \begin{array}{ccc} Sol & \to & \mathbb{C}^k \\ u & \mapsto & (u_0, \dots, u_{k-1}) \end{array}$$

est injective, ce qui permet de conclure.

Pour montrer qu'il y a égalité (ainsi que la suite du théorème), il suffit de montrer que les $u_{i,j}$ sont bien des solutions, et forment une famille libre. En effet, le nombre d'éléments dans cette famille est $\sum_{i\in I} \alpha_i$. Or cette somme vaut le degré de P, qui est aussi égal à k.

Notons

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \to & \mathbb{C}^k \\ (u_0, u_1, u_2, \dots) & \mapsto & (u_1, u_2, u_3 \dots) \end{array}$$

On remarque que τ est une application linéaire, et que *Sol* est un espace stable par τ. En fait, l'espace *Sol* est précisément égal à $\mathrm{Ker}(P(\tau))$. Il suffit alors, pour, conclure, de remarquer que la suite $u_{i,j}$ est annulée par $(\tau - \mu_i)^{j+1}$. En effet, cela implique bien, lorsque $j < \alpha_i$, que $(P(\tau))(u_{i,j}) = 0$.

Il reste donc seulement à montrer que $(\tau - \mu_i)^j(u_{i,j}) = 0$.

Commencons par regarder le cas simple où $j = 0$, pour bien comprendre ce qu'il se passe :

$$\begin{aligned}(\tau-\mu_i)^{j+1}(u_{i,j}) &= \tau(u_{i,0})-\mu_i u_{i,0}\\ &= \tau((\mu_i^n)_{n\in\mathbb{N}})-\mu_i(\mu_i^n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\mu_i^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}-(\mu_i^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat attendu. Regardons maintenant le cas général, qui est plus calculatoire :

$$\begin{aligned}(\tau-\mu_i)^{j+1}(u_{i,j}) &= \sum_{l=0}^{j+1}\binom{j+1}{l}(-1)^l\mu_i^l\tau^{j+1-l}(u_{i,j})\\ &= \sum_{l=0}^{j+1}\binom{j+1}{l}(-1)^l\mu_i^l\tau^{j+1-l}((n^j\mu_i^n)_{n\in\mathbb{N}})\\ &= \sum_{l=0}^{j+1}\binom{j+1}{l}(-1)^l\mu_i^l((n+j+1-l)^j\mu_i^{n+j+1-l})_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \sum_{l=0}^{j+1}\binom{j+1}{l}(-1)^l\mu_i^l\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}n^m(j+1-l)^{j-m}\mu_i^{n+j+1-l}\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\mu_i^{n+j+1}\sum_{l=0}^{j+1}(-1)^l\binom{j+1}{l}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}n^m(j+1-l)^{j-m}\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\mu_i^{n+j+1}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}n^m\left[\sum_{l=0}^{j+1}(-1)^l\binom{j+1}{l}(j+1-l)^{j-m}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= 0\end{aligned}$$

La dernière égalité vient de ce que le terme entre crochet est nul pour tout m et j, sous la condition $0\leq m\leq j$ (à l'heure de l'écriture de ce document, on peut trouver le résultat sur wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient#cite_ref-9` . On trouvera également une preuve sur arXiv, `https://arxiv.org/abs/math/0406086`).

□

Ainsi, lorsqu'on sait qu'une suite u vérifie une relation de récurrence d'ordre k, on peut (parfois) expliciter cette suite (et par exemple calculer facilement u_k pour k très grand) de la manière suite :

-On écrit le polynôme caratéristique P. -On calcule ces racines [1] -on écrit u comme combinaison linéaire des éléments de la base $\mathcal{B}$ donnée précédemment (le plus souvent, les racines sont toutes distinctes et on écrit donc u comme une somme de fonctions exponentielles dont on connait les paramètres), avec des coefficients scalaire x_i inconnus. -on calcule les k premiers termes de la suite -on résoud le système affine $\sum_{v_i \in \mathcal{B}} x_i (v_i)_k = u_k$, qui est nécessairement inversible car l'application Θ, dans la preuve du théorème, est injective.

Le résultat peut également se voir d'une autre manière (pas vraiment différente au fond) :

Posons $v_n = (u_{n+k-1}, u_{n+k-2}, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^k$.

On remarque alors que

$$v_{n+1} = (u_{n+k}, \dots, u_{n+1}) = A(u_{n+k-1}, \dots, u_n) = Av_n$$

où A est une matrice explicite. Ainsi, on montre par récurrence que $v_n = A^n v_0$.

Lorsque A est diagonalisable, le calcul des puissances de A est relativement aisé : si $A = PDP^{-1}$ avec $D = Diag(\lambda_1, \dots \lambda_k)$, alors

$$v_n = PDiag(\lambda_1^n, \dots \lambda_k^n) P^{-1} v_0$$

Cependant, lorsque la matrice est seulement trigonalisable, le calcul des puissances de A est un peu plus délicat, et c'est la raison pour laquelle apparaissent des vecteurs propres un peu plus complexe.

Exemple 1. Si $u_{n+1} = u_n + a u_{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est $X^2 - X - a$. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = 1 - 4a$. Les racines du polynôme sont $\frac{1 \pm \delta}{2}$. Il y a une racine double r si et seulement si $\delta = 0$, i.e. si $a = 1/2$.

Supposons $a \neq 1/2$ et notons r_+, r_- les deux racines. Alors il existe des nombres complexes α, β tels que pour tout n, $u_n = \alpha r_+^n + \beta r_-^n$. On peut déterminer α et β si on connait par exemple u_0 et u_1.

Si par exemple $u_0 = u_1 = 1$, on sait que $1 = u_0 = \alpha r_+^0 + \beta r_-^0 = \alpha + \beta$ et $1 = u_1 = \alpha r_+^1 + \beta r_-^1 = \alpha r_+ + \beta r_-$. On a un système linéaire en α et β (r_+ et r_- sont connus). En résolvant le système, on obtient $\alpha = \frac{r_+}{\delta}$ et $\beta = -\frac{r_-}{\delta}$. Ainsi dans ce cas,

$$u_n = \frac{(r_+^{n+1} - r_-^{n+1})}{\delta}$$

Traitons maintenant le cas $a = 1/2$: dans ce cas, le polynôme admet une racine double. On voit que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice au centre est $(X - 1/2)^2$, et la matrice est non diagonalisable (sinon, son polynôme minimal serait $X - 1/2$, or ce polynôme n'annule pas la matrice).

La suite u est alors de la forme $u_n = \alpha 2^{-n} + \beta n 2^{-n}$ pour certains coefficients α et β.

1. Pour la culture, il est bon de savoir qu'il existe un algorithme général pour exprimer les racines des polynômes de degré 3 ou 4. En revanche, dès le degré 5, on sait prouver qu'il existe des polynômes à coefficients entiers dont les racines ne s'expriment pas à l'aide de racines (l'énoncé précis est connu sous le nom de théorème d'Abel–Ruffini)