Une sommation de Poisson et gaussiennes sur le cercle

Isao Sauzedde

Le sujet suivant a été écrit initialement pour un cours d'analyse réelle (séries de fonctions, séries entières, intégrales à paramètre, etc.), juste avant l'introduction de la transformée de Fourier (et après l'introduction des séries de Fourier). Il a depuis été légèrement modifié. On y introduit la transformée de fourier

$$\mathcal{F} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right),$$

qui est fondamentale dans de nombreux domaines des mathématiques (probabilité, théorie des groupes, EDP...).

Les premières questions montrent que l'espace vectoriel engendré par les gaussiennes est stable, et détermine un vecteur propre en particulier ($\lambda = \pi$ dans le sujet). La deuxième partie permet de déterminer la valeur propre associée, et est une des nombreuses méthodes de calcul de l'*intégrale de Gauss* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Avec du recul, on pourra faire le lien avec la *formule sommatoire de Poisson* qui affirme, sous certaines conditions sur la fonction f, l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}(f))(k)$$

Problème. On fixe deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ pour tout le problème.

Première partie : Transformée de Fourier des gaussiennes

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t} \, \mathrm{d}x$$

   est convergente.
2. Montrer que $t \mapsto \phi(t)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = -\frac{2\pi^2}{\lambda} t y(t) \tag{1}$$

3. Résoudre l'équation différentielle.
4. Bonus : donner sans preuve la valeur de $\phi(0)$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$. Dans la suite du sujet, on supposera cette valeur inconnue.

Seconde partie : la gaussienne sur le cercle

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) \coloneqq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi k)^2}$$

   converge.
6. Montrer que f est continue et 2π-périodique.
7. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de f en fonction de $\phi(0)$. *On pourra faire un changement de variable de la forme $\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$.*
8. ($\star$) Montrer l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(0)^2 e^{-\frac{n^2}{2\mu}} = \frac{2\pi\phi(0)}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 \mu n^2}$$

9. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Correction. On fixe deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ pour tout le problème.

Première partie :

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t} \,\mathrm{d}x$$
est convergente.
On montre la convergence absolue. On a $|e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t}| = e^{-\lambda x^2}$.
La méthode préférée des étudiants consiste dans l'idée à remarquer que $0 < \exp^{-\lambda x^2} = \frac{1}{e^{\lambda x^2}} \leq \frac{1}{1+\lambda x^2}$ *(on rappelle que* $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ *). Le critère de Riemann assure alors la convergence.*
Attention, si on majore plutôt par $\frac{1}{\lambda x^2}$, *à le faire en dehors d'un voisinage de* 0 *(la fonction* $x \to \frac{1}{\lambda x^2}$ *n'est pas intégrable au voisinage de* 0 *).*
2. Montrer que $t \mapsto \phi(t)$ est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle
$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = -\frac{2\pi^2}{\lambda} t y(t) \tag{2}$$
Le raisonnement de la question précédente montre en fait plus que la convergence absolue : il montre la convergence normale sur $\mathbb{R}$, *donc la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$. *Le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure alors la continuité de* ϕ. *Posons* $f(t,x) = e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on a* $|\partial_1 f(t,x)| = |-2i\pi x e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t}| = 2\pi |x| e^{-\lambda x^2}$.
Cette dernière fonction est indépendante de t, *et intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(par exemple parce que plus petite que* $2\pi e^{-\frac{\lambda}{2} x^2}$ *pour* x *assez grand).*
La fonction $\partial_1 f$ *est donc intégrable sur* $\mathbb{R}$ *en sa seconde variable, uniformément sur* $\mathbb{R}$ *en la première variable (il était ici inutile de se restreindre aux segments !).*
On peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale : ϕ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*
$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} -2i\pi x e^{-\lambda x^2} e^{-2i\pi x t} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{i\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x e^{-\lambda x^2}\right) e^{-2i\pi x t} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
En effectuant une intégration par partie (à justifier correctement), on obtient
$$\begin{aligned}\phi'(t) &= -\frac{i\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \left(\partial_x e^{-2i\pi x t}\right) dx \\ &= -\frac{i\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} (-2i\pi t) e^{-2i\pi x t} dx \\ &= -\frac{2\pi^2}{\lambda} t \phi(t)\end{aligned}$$
Une récurrence immédiate assure alors que ϕ *est* $\mathcal{C}^{\infty}$ *: en effet, si* f *est* $\mathcal{C}^k$, *le membre de droite de l'équation différentielle est une fonction* $\mathcal{C}^k$. *Puisqu'il est égal au membre de gauche qui est* ϕ', *la fonction* ϕ' *est* $\mathcal{C}^k$, *donc* ϕ *est* $\mathcal{C}^{k+1}$.
3. Résoudre l'équation différentielle.
On présente trois méthodes qui ont des intérets pédagogiques distincts. Commencons par un raisonnement heuristique, commun aux trois méthodes :

L'équation différentielle se réécrit sous la forme :

$$\frac{\phi'}{\phi} = -\frac{2\pi^2}{\lambda}t$$

soit encore, en posant $g \coloneqq \ln(\phi)$ *:*

$$g' = -\frac{2\pi^2}{\lambda}t$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + \int_0^t -\frac{2\pi^2}{\lambda}u \, \mathrm{d}u \\ &= g(0) - \frac{\pi^2 t^2}{\lambda} \end{aligned}$$

et donc $\phi(t) = e^{g(t)} = e^{g(0)}e^{-\frac{\pi^2 t^2}{\lambda}} = \phi(0)e^{-\frac{\pi^2 t^2}{\lambda}}$.
Ce raisonnement n'est qu'heuristique puisqu'on ne sait pas a priori que $\forall t, \phi(t) \neq 0$ *(ce qui interdit de diviser par* ϕ*), ni a fortiori que* $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^\star$ *(on ne sait même pas que* $\phi(t) \in \mathbb{R}$*), ce qui interdit de prendre le logarithme.*

C'est ici que les méthodes divergent. Notons $\psi(t) \coloneqq \phi(0)e^{-\frac{\pi^2 t^2}{\lambda}}$ *:*

— *Méthode 1 (méthode "savante") :*
  On montre que ψ *est bien solution de l'équation différentielle initiale, et on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui assure l'unicité de cette solution. Puisque* ϕ *est également solution, nécessairement* $\phi = \psi$.
— *Méthode 2 (méthode "astucieuse") :*
  On remarque que $\phi(0) \neq 0$ *puisque c'est l'intégrale d'une fonction réelle strictement positive. Il en découle que* $\psi(t) \neq 0$ *pour tout* t.
  On peut donc définir $S(t) \coloneqq \frac{\phi(t)}{\psi(t)}$.
  On remarque alors que

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{\phi'(t)\psi(t) - \phi(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)} \\ &= \frac{-\frac{2\pi^2}{\lambda}t\phi(t)\psi(t) + \frac{2\pi^2}{\lambda}t\phi(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  En intégrant cette égalité entre 0 *et* u*, on obtient, pour tout* $u \in \mathbb{R}$*, l'égalité* $S(u) = S(0)$*. Or* $S(0) = 1$ *clairement, et on obtient*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \phi(t) = \psi(t)$$

— *Méthode 3 (méthode "directe") :*
  Pour justifier le raisonnement initiale, il suffit finalement de montrer que $\phi(t) > 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
  Remarquons déjà que le changement de variable $y = -x$*, dans la définition initiale de* ϕ*, montre que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* $\overline{\phi(t)} = \phi(t)$*, autrement dit* $\phi(t) \in \mathbb{R}$*. Le même argument montre également que* $\phi(-t) = \phi(t)$*, et il suffit donc de montrer* $\phi(t) > 0$ *pour* $t \geq 0$.
  On voit déjà que $\phi(0) > 0$ *puisque c'est l'intégrale d'une fonction réelle strictement positive. Posons* $t_0 \coloneqq \inf\{t : \phi(t) \leq 0\}$*. Le but est de montrer que* $t_0 = \infty$*, on raisonne par l'absurde et on suppose donc que* $t_0 < \infty$*. La continuité de* ϕ *assure que* $\phi(t_0) = 0$ *(attention : ici, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires, qui ne s'applique*

pas sur $\mathbb{C}$. Il est donc cruciale d'avoir montrer que $\forall t, \phi(t) \in \mathbb{R}$ au préalable). En particulier $t_0 > 0$.
Par définition de t_0, la fonction ϕ est à valeurs strictement positives sur l'intervalle $I = [0, t_0[$. Sur cet intervalle, on peut donc définir $g(t) \coloneqq \ln(\phi(t))$, et on voit rapidement que cette fonction est solution de l'équation $g'(t) = -\frac{2\pi^2 t}{\lambda}$, soit en intégrant : $g(t) = g(0) - \frac{\pi^2 t^2}{\lambda}$. Cette fonction se prolonge par continuité en t_0, par $g(t_0) = g(0) - \frac{\pi^2 t_0^2}{\lambda}$. Puisque ϕ est elle-même continue, on a

$$\begin{aligned}
\phi(t_0) &= \lim_{t \to t_0^-} \phi(t) \\
&= \lim_{t \to t_0^-} \exp(g(t)) \\
&= \exp(g(t_0)) \\
&= \exp\left(g(0) - \frac{\pi^2 t_0^2}{\lambda}\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Ceci est absurde puisqu'on a montré plus haut que $\phi(t_0) = 0$.
Ce type de méthode est parfois appelé "méthode de l'ouvert fermé", puisqu'elle revient essentiellement à montrer que l'ensemble

$$\{t \geq 0 : \forall u, 0 < u < t \implies \phi(u) > 0\}$$

est un ensemble non vide qui est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}_+$ (et seul $\mathbb{R}_+$ vérifie ces trois propriétés).

Attention : Sans utiliser de théorème, il ne suffit pas de dire que** $t \mapsto \phi(0)e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}t^2}$ **est bien solution de l'équation différentielle pour conclure : l'équation différentielle pourrait a priori avoir plusieurs solutions...

4. Bonus : donner sans preuve la valeur de $\phi(0)$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$. Dans la suite du sujet, on supposera cette valeur inconnue.
   L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$ vaut $\sqrt{2\pi}$.
   C'est une valeur très classique, à connaitre. La méthode de calcul la plus commune est très souvent présentée dans un cours sur les intégrales multiples (il s'agit de calculer le carré de l'intégrale, puis d'effectuer un changement de variables en coordonnées polaires). La deuxième partie du sujet permet justement de calculer cette valeur.

Seconde partie : la gaussienne sur le cercle

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) \coloneqq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi k)^2}$$

   converge. *Par symétrie, il suffit de montrer que $\sum_{k \geq 1} e^{-\mu(t-2\pi k)^2}$ converge. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $[t, \infty[$, la fonction $u \mapsto e^{-\mu(t-u)^2}$ est décroissante et positive. On peut donc faire une comparaison à l'intégrale, dont on a déjà montré la convergence dans la première partie.*

6. Montrer que f est continue et 2π-périodique. *Attention : la convergence est uniforme sur tous les segments (convergence localement uniforme), mais n'est PAS uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. L'argument précédent montre en fait la convergence uniforme sur l'intervalle $[-t_0, t_0]$.*

On peut donc appliquer le théorème de continuité pour les séries uniformément convergentes : f est continue sur $(-t_0, t_0)$. Puisque t_0 est quelconque et que la continuité est une notion locale, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
La périodicité est claire :

$$\begin{aligned} f(t+2\pi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t+2\pi-2\pi k)^2} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi(k-1))^2} \\ &= \sum_{k'\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(t-2\pi k')^2} && (k' = k-1) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

7. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de f en fonction de $\phi(0)$. *On pourra faire un changement de variable de la forme $\tilde{\theta} = \theta + 2k\pi$.*
On note $c_n(f)$ le n-ième coefficient complexe de f. On a alors

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Pour justifier la dernière égalité, il suffit de montrer que la convergence de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta}$$

est uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il suffit donc de montrer la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{in\theta} \right| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}$$

ce qu'on a déjà fait pour la question précédente. Ainsi

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-2k\pi}^{2(1-k)\pi} e^{-\mu\theta^2}e^{-in(\theta+2k\pi)}\,\mathrm{d}\theta && \textit{(changement de variable dans l'intégrale)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-2k\pi}^{2(1-k)\pi} e^{-\mu\theta^2}e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta && \textit{(car } e^{-2ink\pi} = 1\textit{)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\theta^2}e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \phi(-\frac{n}{2\pi}) \\ &= \phi(0)e^{-\frac{n^2}{4\mu}} \end{aligned}$$

8. ($\star$) Montrer l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(0)^2 e^{-\frac{n^2}{2\mu}} = \frac{2\pi\phi(0)}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu n^2}$$

La formule de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

(qui s'applique bien ici) donne :

$$\begin{aligned}
\phi(0)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4\mu}} &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k)^2}\right)^2 d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} e^{-\mu(\theta-2\pi k_1)^2-\mu(\theta-2\pi k_2)^2} d\theta \\
{}'\!=\!' &\; 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-2\mu\theta^2+4\pi\mu(k_1+k_2)\theta-4\pi^2\mu(k_1^2+k_2^2)} \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-k_0\pi}^{(2-k_0)\pi} e^{-2\mu(\theta^2+2\pi k_0\theta+k_0^2\pi^2)+4\pi\mu(k_1+k_2)(\theta+k_0\pi)-4\pi^2\mu(k_1^2+k_2^2)} \,\mathrm{d}\theta \quad (\theta=\theta'+k_0\pi) \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-k_0\pi}^{(2-k_0)\pi} e^{-2\mu\theta^2+4\pi\mu(k_1+k_2-k_0)\theta+2\pi^2\mu(2(k_1+k_2)k_0-2k_1^2-2k_2^2-k_0^2)} \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \int_{-(k_1+k_2)\pi}^{(2-k_1-k_2)\pi} e^{-2\mu\theta^2-2\pi^2(k_1-k_2)^2} \,\mathrm{d}\theta \quad (k_0=k_1+k_2) \\
&= 2\pi \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu(k_1-k_2)^2} \int_{-(k_1+k_2)\pi}^{(2-k_1-k_2)\pi} e^{-2\mu\theta^2} \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \sum_{p,q\in\mathbb{Z},p+q \text{ pair}} e^{-2\pi^2\mu q^2} \int_{-p\pi}^{2\pi-p\pi} e^{-2\mu\theta^2} \,\mathrm{d}\theta \quad (p=k_1+k_2, q=k_1-k_2) \\
&= 2\pi \sum_{q\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu q^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu\theta^2} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\mu n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\theta^2} \,\mathrm{d}\theta \quad (\theta'=\sqrt{2}\theta)
\end{aligned}$$

L'interversion somme/intégrale à la troisième ligne, ainsi le changement de variable $(k_1,k_2)\leftrightarrow(p,q)$ se justifient par le fait que toutes les quantités sont réelles positives.

9. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

En prenant $\mu=\frac{1}{2\pi}$, l'égalité précédente devient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(0)^2 e^{-\pi n^2} = \frac{2\pi\phi(0)}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$$

En simplifiant des deux côtés par $\phi(0)\neq 0$, et par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}\neq 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\pi}} \,\mathrm{d}x = \phi(0) = \sqrt{2}\pi$$

Le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$ *permet alors de conclure*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$