

REPRÉSENTATION DE SYMANZIK EN THÉORIE EUCLIDIENNE DES CHAMPS QUANTIQUES, ET PROBLÈMES CONNEXES

ISAO SAUZEDDE

TABLE DES MATIÈRES

Présentation des objets en jeu	1
A. Interaction entre le GFF vectoriel et le champ de Yang-Mills	4
B. Décomposition du mouvement brownien plan pour la construction de limites d'échelle et de fonctions de partition	9
C. Géométrie et analyse sur les surfaces quantiques	13
Suggestions d'affectations	17
Bibliographie	18

RÉSUMÉ. Ma thématique de recherche est à l'intersection entre les probabilités et la physique mathématique, et en particulier porte sur la construction et l'étude de champs quantiques euclidiens, c'est à dire essentiellement de fonctions aléatoires sur des espaces continus. Mon approche est liée à celle introduite par Symanzik dans le cas du champ Φ^4 , et exploite les relations entre un champ Markovien et le processus markovien associé. Le problème de la construction de couplages au sens de la physique inclus de manière naturelle le problème de l'étude des fonctions de partition de ces modèles, et en particulier des déterminants de Laplacien qui apparaissent aussi dans d'autres modèles de physique statistique ainsi qu'en géométrie différentielle.

Un objectif principal de ma recherche est la construction, par cette approche, du champ de Yang-Mills-Higgs euclidien sur les surfaces. Certaines des questions liées à cette construction sont exposées dans la section A. Si cet objectif m'a conduit dans le passé à analyser en profondeur les enlacements du mouvement brownien plan, il m'amène aujourd'hui à considérer ses relations avec les trajectoires aléatoires qu'on appelle SLE_2 et en particulier sa décomposition en de telles trajectoires, comme je l'expliquerai dans la section B, où j'aborderai également des liens avec des forêts d'unicycles dans des espaces continus et avec les déterminants de laplacien. Dans la section C, j'aborderai des thématiques plus spéculatives liées à la construction du champ de Yang-Mills-Higgs euclidien au-dessus d'une surface quantique, et plus généralement de théories de jauge au-dessus de telles surfaces.

PRÉSENTATION DES OBJETS EN JEU

On notera G un groupe de Lie compact muni d'une métrique bi-invariante, et d'une représentation ρ sur un espace de Hilbert V (qu'on supposera réel pour simplifier, le cas complexe est similaire) de dimension $r < \infty$. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . On note $O(V)$ (respectivement $\mathfrak{o}(V)$) l'ensemble des endomorphismes unitaires de V (respectivement son algèbre de Lie), qui s'identifie aux matrices $r \times r$ orthonormées (respectivement antisymétriques).

De même qu'une variété M de dimension d est localement isomorphe à \mathbb{R}^d , un G -fibré principal P_G au-dessus est localement isomorphe à $\mathbb{R}^d \times G$, et le fibré associé $P = P \times_{\rho} V$ est localement isomorphe à $\mathbb{R}^d \times V$. Localement, la donnée d'une *connexion* sur P_G (resp. sur P) revient à la donnée d'une 1-forme \mathfrak{g} -valuée (resp. $\mathfrak{o}(V)$ -valuée), c'est à dire à une fonction $A : U \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathfrak{g}$. Pour simplifier la lecture, on considèrera uniquement le cas des fibrés triviaux : $P_G = M \times G$, $P = M \times V$, on prendra pour M un domaine du plan muni de la métrique euclidienne, hormis lorsqu'on cherche précisément à mettre l'emphasis sur les spécificités de nature géométrique. En

général, (M, g) est en fait une variété riemannienne compacte, avec ou sans bord. On supposera de plus que $G = O(V)$, avec ρ l'action canonique. On identifiera les connexions lisses avec l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^d \otimes G)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^d \otimes \mathfrak{o}(V)) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^d \otimes \mathfrak{g})$). Pour $G = U(1)$ (le cas abélien), les connexions lisses s'identifient donc à des champs de vecteurs. On travaillera avec un terme de masse qu'on supposera constant pour simplifier certaines expressions.¹

Champs libres Gaussiens dépendants d'une connexion. Un GFF scalaire (réel) Φ , de masse $m > 0$, est une distribution aléatoire, gaussienne centrée, caractérisée en loi par sa fonction de covariance

$$\mathbb{E}[\Phi(f)\Phi(h)] = \langle f, G_{g,m}h \rangle_{L^2(M, \mathbb{R})}, \quad (1)$$

où² $G_{g,m} := (\Delta + m)^{-1}$ est l'opérateur de Green, dont on note encore $G_{g,m}$ le noyau, donné par la formule

$$G_{g,m}(x, y) = \int_0^\infty e^{-tm} p_t^{(M,g)}(x, y) dt, \quad \text{avec } p_t^{(M,g)} \text{ le noyau de la chaleur sur } (M, g).$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}_{g,m,0}$ de Φ est donnée **informellement** par la formule

$$\mathbb{P}_{g,m,0}(\delta\Phi) = \frac{1}{Z_{g,m,0}} \exp\left(-\frac{\|\text{grad } \Phi\|_{L^2(M, \mathbb{R}^d)}^2 + m\|\Phi\|_{L^2(M, \mathbb{R})}^2}{2}\right) \mathcal{D}(\delta\Phi),$$

où \mathcal{D} est à interpréter comme une "mesure de Lebesgue en dimension infinie".

Le GFF **vectorel, associé à la métrique g , la connexion ∇ , et la masse m** , est une distribution aléatoire à valeurs dans V plutôt que \mathbb{R} , obtenue en remplaçant le gradient grad par la connexion ∇ , qui s'écrit localement³ $\nabla = \text{grad} + A$ avec $A \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^d \otimes \mathfrak{o}(V))$. Sa mesure $\mathbb{P}_{g,m,A}$ s'écrit informellement

$$\mathbb{P}_{g,m,A}(\delta\Phi) = \frac{1}{Z_{g,m,A}} \exp\left(-\frac{\|\text{grad } \Phi + A\Phi\|_{L^2(M, \mathbb{R}^d \otimes V)}^2 + m\|\Phi\|_{L^2(M, V)}^2}{2}\right) \mathcal{D}(\delta\Phi). \quad (2)$$

Rigoureusement, c'est encore une mesure gaussienne centrée, dont la fonction de covariance est donnée par (1) après avoir remplacé $G_{g,m}$ par l'inverse de $\Delta_{g,A,m} = \nabla^* \nabla + m$.⁴ Le noyau de cet opérateur de Green n'est plus à valeurs scalaires, mais à valeurs dans $\text{End}(V)$. Plus précisément, $G(x, y) \in P_x \otimes P_y^* \simeq \text{End}(V)$. Il est donné par la formule [Nor92]

$$G_m(x, y) = \int_0^\infty e^{-tm} p_t(x, y) \mathbb{E}_{t,x,y}[\mathcal{H}ol_A(W)] dx dy,$$

où W est un pont Brownien dans M de x à y en temps t sous la mesure $\mathbb{P}_{t,x,y}$, et $\mathcal{H}ol_A(W) \in P_x \otimes P_y^*$, **l'holonomie stochastique de ∇ le long de W** est la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) explicite. Dans le cas abélien, ce terme est particulièrement simple comparativement au cas général : on peut dans ce cas identifier $\mathfrak{u}(V)$ à $i\mathbb{R}$, et $\mathcal{H}ol_A(W)$ prend alors la forme

$$\mathcal{H}ol_A(W) = \exp\left(\int A_{W_t} \circ dW_t\right) = \exp\left(i \int \tilde{A}_{W_t} \circ dW_t\right).$$

Ici, les intégrales sont au sens de Stratonovich, et $\tilde{A} = -iA$ est à valeurs réelles.

La fonction de partition $Z_{g,m,A}$, qui n'est pour l'instant définie que formellement, s'interprète comme $Z_{g,m,A} = \text{Det}(\Delta_{g,A,m})^{-\frac{1}{2}}$, où le déterminant est défini rigoureusement par des méthodes

1. Un terme de masse variant en espace est en fait, sous de nombreux aspects, plus naturel, et révèle parfois des mécanismes autrement cachés.

2. On utilise la convention géométrique sur le signe de Δ , telle que les valeurs propres sont positives.

3. On trouve souvent un facteur i supplémentaire dans la littérature physique. Si on considère des espaces vectoriels complexes plutôt que réel, ce qui ne rajoute aucune difficulté, la matrice antihermitienne A_z ($z \in M$) s'écrit $A_z = i\tilde{A}_z$, et l'utilisation de \tilde{A} plutôt que A est parfois préférable. Ce facteur i est intuitivement assez pratique, puisqu'il montre que la connexion cherche à faire "tourner" le GFF plutôt qu'à changer sa norme.

4. La dépendance en la métrique g est ici cachée dans la définition du dual ∇^* .

dites de zeta-régularisation. Comme on a démontré dans [1], on peut réécrire le ratio de fonctions de partition comme

$$\frac{Z_{g,m,A}}{Z_{g,m,0}} = \mathbb{E}\left[\prod_{X \in \mathcal{L}} \mathcal{H}ol_A(X)\right], \quad (3)$$

où le produit porte sur une soupe de boucles browniennes.⁵ Voir [LW04] pour la définition de la soupe de boucles.

Mesures de Yang–Mills et enlacement. De même que le GFF est une section aléatoire (distributionnelle) de P , le champ de Yang–Mills (sans secteur *Higgs*) est une connexion aléatoire (distributionnelle) sur P . Informellement, sa mesure \mathbb{P}_{YM} est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(\delta A) = \frac{1}{Z'} \exp(-\beta \|d_A A\|_{L^2(M, \Lambda^2 \mathbb{R}^d \otimes \mathfrak{g})}^2) \mathcal{D}(\delta A),$$

où $d_A A$ est la 2-forme \mathfrak{g} -valuée

$$d_A A = \text{rot}(A) + \frac{1}{2}[A \wedge A] = \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\partial_i A_j + \frac{1}{2}(A_i A_j - A_j A_i)) dx^i \wedge dx^j.$$

La définition rigoureuse est trop complexe pour être plus qu'ébauchée ici, et n'est bien comprise qu'en dimension 2, bien que le cas $d = 3$ soit l'objet d'une recherche intense et de nombreux résultats récents (voir par exemple [CCHS22]). On se contentera du fait suivant, valide uniquement pour $M = \mathbb{R}^2$, et dans le cas abélien : si A est un champ de Yang–Mills, et ℓ est une boucle lisse et déterministe dans le plan, l'holonomie de A le long de ℓ est donnée par e^{iN} , où N est une variable gaussienne de variance

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_\ell(z)^2 dz, \quad (4)$$

où \mathbf{n}_ℓ est la **fonction d'enlacement** de ℓ . Autrement dit, et puisque

$$e^{i \int A_\ell d\ell} = e^{i \int \mathbf{n}_\ell(z) \text{rot}(A)(z) dz},$$

dans le cas abélien et euclidien, $\text{rot}(A) = d_A A$ est un bruit blanc gaussien dans le plan.

Comme on l'a vu précédemment, l'holonomie le long de lacets browniens joue un rôle central dans la compréhension du GFF vectoriel, à la fois dans sa fonction de partition et dans le calcul de la fonction de covariance. De par la formule (4), comprendre les interactions entre la mesure de Yang–Mills et le GFF vectoriel demande de comprendre les enlacements browniens.⁶ J'utiliserai ici les deux faits suivants, intimement liés à ma recherche passée (voir également [Wer94a, Wer94b, Wer95]).

- ◊ La fonction d'enlacement du mouvement Brownien échoue de peu à être intégrable. Cependant, pour f une fonction arbitraire suffisamment lisse, il existe plusieurs manières d'interpréter $\int f(z) \mathbf{n}_X(z) dz$, comme une sorte de valeur principale. Ces méthodes coïncident entre elles, et on a alors la formule de Green

$$\int f(z) \mathbf{n}_X(z) dz = \int A_{X_t} \circ dX_t, \quad (5)$$

dès que $\text{rot} A = f$. Un tel A existe toujours, et on peut en fait prendre cette formule comme une définition du membre de gauche. En particulier, on peut ainsi *mollifier* la fonction d'indice. On fixe désormais une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ lisse à support compact, paire et d'intégrale 1. On notera $\phi^\epsilon : z \mapsto \epsilon^{-2} \phi(\epsilon^{-1} z)$, et \mathbf{n}_X^ϵ la "convolution" de \mathbf{n}_X avec ϕ^ϵ , où l'intégrale qui définit usuellement la convolution est définie ici par (5).

- ◊ En particulier puisque \mathbf{n}_X n'est pas intégrable (donc pas localement intégrable — \mathbf{n}_X est à support compact), la variance (4) le long d'une boucle brownienne, i.e. $\int \mathbf{n}_X(z)^2 dz$, est infinie. Cependant, on peut contrôler sa vitesse de divergence : $\frac{1}{\log(\epsilon)} \int \mathbf{n}_X^\epsilon(z)^2 dz$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une constante.

5. Ce produit infini n'est pas absolument convergent, mais défini comme une limite presque sûre de produits finis

6. La situation non-abélienne est bien sûre plus délicate à traiter, mais on peut encore se ramener à étudier les enlacements browniens.

Chaos multiplicative Gaussien, gravité quantique de Liouville. Un GMC M (dans un domaine D du plan) est une mesure aléatoire sur D , définie informellement comme l'exponentielle 'au sens de Doléans-Dade' d'un GFF (scalaire) Ψ :

$$dM(z) = e^{\gamma\Psi(z) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[\Psi(z)^2]} dz. \quad (6)$$

Cette formule est bien sûre informelle, puisque Ψ est une distribution, mais la construction rigoureuse d'une telle mesure est aujourd'hui bien comprise (voir e.g. [RV13, Ber17]). En particulier, il convient de mentionner que presque sûrement, la mesure M n'est *pas* absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dz , contrairement à ce que pourrait laisser penser la formule (6), mais au contraire portée par un sous-ensemble de dimension $2 - \frac{\gamma^2}{2}$ (on considère ici $\gamma \in [0, 2)$). On appellera *métrique LQG* (pour *Liouville quantum gravity*) la distance aléatoire \mathfrak{d} qui correspond informellement à la métrique

$$g = e^{\xi\Psi - \frac{\xi^2}{2}\mathbb{E}[\Psi^2]} g_{eucl,z},$$

et dont la construction rigoureuse est récente (voir e.g. [DDG23]). L'étude des propriétés de cet espace métrique mesurée (D, \mathfrak{d}, M) , et la construction sur cet espace d'objets dont l'équivalent riemannien est bien connu est un sujet extrêmement actif de recherche (voir e.g. [AFS20, BW23, GRV16, GM20, GPS22]) : on pourra mentionner par exemple l'étude des géodésiques (étude de leur régularité, confluence, stabilité,...) ou des boules (évolution de la taille du volume, régularité du bord, étude des composantes connexes du complémentaire,...), ou la construction du laplacien associé, de son noyau de la chaleur, asymptotique de Weyl, mouvement Brownien, et ainsi de suite. On peut aussi construire des variations de cet objet, qui entre dans la famille des *surfaces quantiques* : grossièrement parlant, il s'agit de la donnée d'une surface différentielle décorée d'une distribution Ψ , et considérée à équivalence près par les transformations conformes, qui agissent sur Ψ d'une telle manière que la mesure (6) reste invariante.

Ma contribution dans le domaine a été de montrer qu'il est possible de définir l'aire de Lévy, mesurée avec le GMC, sous un mouvement Brownien (Liouville ou euclidien indifféremment), et que cette aire évolue avec le mouvement brownien de manière régulière (au sens des chemins rugueux). Une telle régularité est nécessaire pour construire des objets plus complexes, c'est à dire essentiellement pour passer d'*intégrales* à *solution d'EDS*, et en particulier pour définir l'holonomie d'une connexion dont la régularité est mesurée dans la métrique LQG, ce qu'on expliquera plus loin.

Je vais maintenant décrire les projets qui concernent les interactions entre les trois types d'objets qui sont le *GFF vectoriel* Φ , le *champs de Yang-Mills* A , et la *métrique LQG* (\mathfrak{d} ou M , selon qu'on s'intéresse à des propriétés de distance ou de volume). Dans l'idéal, un des objectifs à long terme de ces projets serait la construction, étant donné une surface Σ et un fibré vectoriel P au dessus de Σ muni d'une métrique h sur les fibres, d'un triplet aléatoire (M, A, Φ) couplant ces trois objets. Notons que d'un point de vue physique, si le nom de *gravité quantique* est assez parlant, la connexion A représente par exemple le champ des photons (ou tout autre champ de jauge, associé à des bosons), alors que la section Φ représente soit le champ des électrons (ou tout autre champ fermionique, mais dont on néglige le spin), soit le champ de Higgs (si on ajoute un terme Φ^4).

A. INTERACTION ENTRE LE GFF VECTORIEL ET LE CHAMP DE YANG-MILLS

Le but ici est de construire rigoureusement et d'étudier, sur une surface riemannienne (Σ, g) au dessus de laquelle un fibré (P, h) est fixé, un couple aléatoire (Φ, A) , où Φ est une section aléatoire (distributionnelle) de P , et A est une connexion aléatoire (distributionnelle) sur P (ou plus généralement sur un fibré principal P_G , avec $P = P_G \times_G V$), et dont la mesure \mathbb{P}_g correspond informellement à l'expression

$$\mathbb{P}_g(d\Phi, dA) = \frac{1}{Z} \exp(-\rho \|\text{grad } \Phi + \alpha A \Phi\|_{L^2(\Sigma, \mathbb{R}^2 \otimes V)}^2 + m \|\Phi\|_{L^2(\Sigma, V)}^2 - \beta \|d_A A\|_{L^2(\Sigma, \Lambda^2 \mathbb{R}^2 \otimes \mathfrak{g})}) \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}A,$$

où l'on pourrait ajouter un terme $\lambda \phi^4$ dans le secteur Higgs.

On appellera α la constante de couplage, β la température inverse, et ρ la température inverse du GFF. On supposera qu'ils valent 1, sauf quand on cherche précisément à étudier la dépendance en ces paramètres. Par des calculs informels, on voit que Z doit être de la forme $Z = Z' \mathbb{E}[Z_{g,m,A}]$, et qu'on peut réécrire l'expression informelle sous la forme

$$\mathbb{P}_g(d\Phi, dA) = \frac{Z' Z_{g,m,A}}{Z} \mathbb{P}_{g,m,A}(d\Phi) d\mathbb{P}_{YM}(dA).$$

C'est en ce sens que la mesure qu'on cherche à définir n'est pas un couplage 'au sens probabiliste' : la loi marginale de A n'est pas donnée par \mathbb{P}_{YM} , mais par la mesure pondérée par $Z_{g,m,A}$,

$$\mathbb{P}'_{YM}(dA) := \frac{Z_{g,m,A}}{\mathbb{E}[Z_{g,m,A}]} \mathbb{P}_{YM}(dA).$$

Cependant, on regardera aussi la mesure

$$\mathbb{P}'_g(d\Phi, dA) = \mathbb{P}_{g,m,A}(d\Phi) \mathbb{P}_{YM}(dA).$$

Cette mesure est plus facile à étudier : lorsqu'on applique la méthode de Symanzik, les moments sous \mathbb{P}'_g font intervenir des ponts Browniens, par exemple des produits, sur les différents ponts, de fonctionnelles de ces ponts. Les mêmes moments, sous la mesure \mathbb{P}_g , font aussi intervenir, en plus des ponts browniens, une soupe de boucles browniennes. Parce qu'une soupe de boucles browniennes contient une infinité de petites boucles, les produits deviennent infinis et ne sont quasiment jamais absolument convergents : ils demandent en général une procédure de renormalisation en plus de la méthode de renormalisation qu'on doit utiliser pour chaque pont brownien considéré individuellement.

A.1. Projet 1 : Méthode de Symanzik pour le champ Φ^4 covariant en dimension 2.

Nous travaillons avec P. Perruchaud sur une extension directe du travail [1], dans lequel on décrit le déterminant d'un laplacien covariant, ainsi que les moments polynomiaux en les variables de cordes et de boucles⁷ du champ gaussien associé en terme d'holonomie le long de ponts browniens et d'une soupe de boucles brownienne. Le but serait d'effectuer un travail similaire lorsqu'on ajoute un terme Φ^4 , c'est à dire lorsqu'on rajoute le terme $\lambda \|\Phi\|_{L^2(M,\mathbb{R})}^2$ sous l'exponentielle dans l'expression qui définit la mesure gaussienne (2) $\mathbb{P}_{g,m,A}$.⁸

Lorsqu'on introduit une méthode de mollification (disons, en prenant Φ_ϵ la convolution de Φ avec une approximation de l'identité lorsqu'on travaille sur un tore plat), ce terme additionnel est bien défini, $\mathbb{P}_{g,m,A}$ -presque sûrement, et permet donc de définir une mesure pondérée et une fonction de partition associée. Pour obtenir une limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, il est nécessaire d'ajouter des contre-termes : essentiellement, il faut projeter ce carré dans un second chaos de Wiener.⁹ Les contre-termes compensent les termes divergents dans les chaos de Wiener d'ordre 0 et 1. Il semble alors que les moments polynomiaux en les variables de cordes s'écrivent encore en terme de ponts browniens, mais en faisant intervenir, en plus des holonomies le long de ces ponts, les temps d'intersections et les temps d'autointersections recentrés entre ces ponts.

Nous avons les objectifs suivants :

- ◊ Établir un résultat de convergence rigoureux des champs définis par mollification vers le champ défini directement à la limite grâce aux chaos de Wiener.
- ◊ Établir la relation rigoureuse entre les moments de ce champs limite et les temps d'autointersection. En particulier, cela demande de mieux comprendre le lien entre la procédure de renormalisation du champ et la procédure de recentrage des temps d'autointersection.
- ◊ Exprimer ces procédures de normalisation en terme d'expansion en diagrammes de Feynman. En particulier, on voit que ces deux procédures éliminent chacune certains diagrammes dont les contributions divergent à la limite, mais n'éliminent pas exactement les

7. voir rapport de recherche joint.

8. À nouveau, λ pourrait en fait être une fonction générique sur M plutôt qu'une constante. Plus généralement, on pourrait considérer $\|\lambda^{i,j,k,l} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l\|_{L^1(M,\mathbb{R})}$.

9. On pourrait croire que c'est une projection dans un chaos d'ordre 4, et c'est un point important : si on considère une fonction polynomiale de degré 4 en Φ , cela correspond au travers de la représentation de Symanzik à une fonction polynomiale de degré 2 en les mesures d'occupation de trajectoires browniennes ; les décompositions en chaos ne coïncident hélas pas exactement.

mêmes diagrammes. Même dans le cas d'un champ scalaire sur un tore plat, où les techniques sont réputées comme étant résolues, il nous semble que des clarifications méritent d'être apportées.

- ◊ Montrer la convergence des fonctions de partitions associées, après une normalisation additive due à la divergence causée par l'infinité de petites boucles dans la soupe de boucles browniennes.
- ◊ Établir l'expression de la fonction de partition limite en terme des temps d'intersection de soupes de boucles.

Je tiens à insister sur l'idée que mes objectifs, ici et en général, ne consiste pas seulement en la construction des objets limites mais aussi sur la convergence des objets mollifiés associés, en particulier parce que certaines relations formelles pour les objets limites deviennent rigoureuses (et donc prouvables) pour les objets mollifiés.

A.2. Projet 2 : Modèle de Yang–Mills–Higgs avec couplage infinitésimal. Les calculs informels ébauchés tantôt montrent que, dans le cas abélien et sans terme de renormalisation, sous la mesure $\mathbb{P}_{g,m,A}(\delta\Phi)\mathbb{P}_{YM}(\delta A)$, le champ Φ devrait être formellement nul : intuitivement, plus la courbure de la connexion A est grande, plus la mesure $\mathbb{P}_{g,m,A}$ charge les champs de vecteurs proches de 0. Sous \mathbb{P}_{YM} , A est tellement irrégulièrement et donc tellement courbée que $\mathbb{P}_{g,m,A}$ ne charge que 0. On peut contrebalancer ce phénomène de deux manières : soit en rajoutant un contre-terme de masse négatif, qui va au contraire favoriser Φ loin de zéro, et en faisant diverger ce terme dans la limite où le paramètre ϵ de mollification s'annule,¹⁰ soit en faisant varier la constante de couplage entre A et Φ , de telle sorte qu'elle s'annule lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Ce second choix est plus simple à traiter, car il demande une analyse au premier ordre plutôt qu'au second ordre.

Conjecture 1. Soit \mathbb{P}_{YM}^ϵ la mesure de $A^\epsilon := A * \varphi^\epsilon$, lorsque A est distribuée selon \mathbb{P}_{YM} (dans une jauge bien choisie), avec $\varphi^\epsilon = \epsilon^{-2}\varphi(\epsilon^{-1}\cdot)$ une approximation de l'identité. Soit \mathbb{P}^ϵ la mesure jointe de (Φ, A^ϵ) , où $A^\epsilon \sim \mathbb{P}_{YM}^\epsilon$ et conditionnellement à A^ϵ , Φ est distribué selon la mesure gaussienne $\mathbb{P}_{g,m,A^\epsilon}$ définie par (2) avec une constante de couplage $\alpha := \alpha_0 |\log(\epsilon)|^{-\frac{1}{2}}$, où α_0 et les autres constantes ρ, β, m sont fixées.

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la mesure \mathbb{P}^ϵ converge vers $\mathbb{P}_g \otimes \mathbb{P}_{YM}$, au sens des moments polynomiaux engendrés par les variables de cordes et de boucles, avec les paramètres $\alpha' = 0, \rho' = \rho, \beta' = \beta$, mais $m' = m + C_G \alpha_0^2$, où la constante C_G dépend uniquement du groupe de jauge G .

Ce décalage de la masse, ainsi que le choix correct de la manière dont il faut mettre à l'échelle α en fonction du paramètre de mollification, sont intimement liés aux relations asymptotiques entre la fonction d'enlacement du mouvement Brownien et sa mesure d'occupation. Du point de vue de l'aire ampérienne présenter dans le rapport de recherche joint, cela correspond dans le cas abélien à l'asymptotique au premier ordre, $\int \mathbf{n}^\epsilon(z)^2 dz \sim \frac{\log(\epsilon)}{2\pi}$. En effet, en utilisant la formule de Green, l'associativité de la convolution, et le fait que $\text{rot}(A)$ soit un bruit blanc gaussien, avec les notations du rapport de recherche, on a formellement

$$\alpha \int A_{\bar{W}}^\epsilon \circ d\bar{W} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha_0^2}{2\pi}\right),$$

Puis, pour γ le chemin droit de 0 à y , et A en jauge radiale,

$$\mathbb{E}_{YM}[\mathbb{E}_{g,m,A^\epsilon}[\mathcal{S}_\gamma]] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty p_t(0, y) e^{-\frac{\alpha_0^2 t}{2\pi}} dt + o(1),$$

et le facteur donné par l'holonomie revient donc à l'ajout d'un terme de masse $\frac{\alpha_0^2}{2\pi}$.

Des calculs, non encore publiés, me permettent de montrer dans le cas abélien que la fonction de partition ne demande pas d'ajouter de contre-terme supplémentaire dans ce modèle pour compenser la contribution des petites boucles browniennes infiniment nombreuses. Ainsi, le modèle pondéré par la fonction de partition devrait également converger dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

10. Ici, c'est le champ de jauge A et non le champ scalaire Φ qui est mollifié.

Je m'attends à ce qu'un argument de découplage permet encore de conclure dans le cas général non-abélien : en découpant le pont brownien en petits tronçons, on voit que l'holonomie sur chaque tronçon est bien approximée par son équivalent abélien sur l'algèbre de Lie, et les différents tronçons donnent des contributions asymptotiquement indépendantes. C'est un argument que j'ai déjà utilisé dans [2], où j'ai étudié un modèle impliquant justement des enlacements browniens et pour lequel j'ai effectivement pu montrer que les résultats abéliens et non-abéliens étaient bien similaires. Il y a cependant encore de nombreux obstacles techniques : la preuve de cette conjecture, dans le cas non-abélien, devrait également utiliser des outils de théorie des chemins rugueux, de processus stochastiques dans les groupe de Lie, et de combinatoire des matrices aléatoires.

A.3. Projet 3 : Modèle de Yang–Mills–Higgs abélien dans le couplage fort. Comme je l'ai présenté dans mon rapport de recherche, on peut au moins formellement exprimer les moments du champs de Yang–Mills–Higgs abéliens en fonctions des aires ampéréennes le long de pont Brownien. En présence du terme d'autointeraction Φ^4 , il faut ajouter un terme lié à la mesure d'autointersection d'un tel pont brownien, comme expliqué plus haut. Lorsqu'on regarde par exemple la mesure \mathbb{P}'_g (non pondérée par la fonction de partition), on se retrouve par exemple avec

$$\mathbb{E}'[\mathcal{S}_\gamma] = \int_0^\infty p_t(x, y) \mathbb{E}_{t,x,y}[\exp(\mathcal{A}_W - \lambda I_W)] dt,$$

où \mathcal{A}_W est l'aire ampéréenne définie par W , et I_W la masse totale de la mesure d'autointersection de W . On a un problème évident : cette intégrale est-elle finie ? Le terme sous l'intégral est-il, déjà, fini pour presque tout t ? J'ai été capable de montrer, dans [3], que l'espérance $\mathbb{E}_{t,x,y}[\exp(\mathcal{A}_W)]$ est finie pour t suffisamment petit. Il paraît cependant très plausible que cette espérance soit infinie au-delà d'une valeur critique de t . Une analyse assez naïve suggère cependant que, lorsque l'aire ampéréenne est grande, la mesure d'autointersection est typiquement également très grande, au moins lorsqu'on travaille dans un domaine borné.

Conjecture 2. *Il existe $t < \infty$ (indépendant de x, y) tel que $\mathbb{E}_{t,x,y}[\exp(\mathcal{A}_W)] = +\infty$. Cependant, pour tout domaine compact D et tout $\lambda > 0$,*

$$\int_0^\infty p_t(x, y) \mathbb{E}_{t,x,y}[\mathbb{1}_{\text{Image}(W) \subset D} \exp(\mathcal{A}_W - \lambda I_W)] dt < \infty.$$

Les méthodes à la Nelson qui permettent pour la mesure d'autointersection d'obtenir la finitude de tous les moments exponentiels dès lors qu'on a un moment exponentiel fini ne s'applique pas ici, car une certaine hypothèse de positivité n'est pas satisfaite. Ici, il semble qu'il faut vraiment comprendre mieux les relations entre aire ampéréenne et mesure d'autointersection pour pouvoir conclure.

D'autre part, l'étude du véritable modèle de Yang–Mills–Higgs, prenant cette fois en compte la fonction de partition, c'est à dire de \mathbb{P}_g plutôt que \mathbb{P}'_g , demande de définir et de comprendre l'aire ampéréenne totale d'une soupe de boucles browniennes. Si je sais montrer l'existence de l'aire ampéréenne avec renormalisation *additive* (i.e. avoir une estimation asymptotique à l'ordre 2) pour une boucle brownienne, et la convergence de l'aire ampéréenne avec renormalisation *multiplicative* (i.e. avoir une estimation asymptotique à l'ordre 1) pour une soupe de boucles browniennes, la question de l'existence de l'aire ampéréenne avec renormalisation additive pour une soupe de boucles est plus subtile, et demande d'avoir une borne supérieure uniforme sur la contribution des petites boucles. De plus, pour établir des résultats de convergence de modèles mollifiés, il ne faut pas seulement savoir définir la somme de toutes les aires ampéréennes (y compris de tous les termes croisés qui font intervenir l'aire ampéréenne entre deux boucles), mais prouver que les limites $\epsilon \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow 0$, entre ϵ le facteur de mollification et δ la taille minimale des boucles considérées dans la soupe de boucles, peuvent être interchangées, ce qui demande un bon encadrement uniforme sur la contribution des boucles *mésoscopiques* (typiquement, petites mais plus grandes que le paramètre de mollification).

A.4. Projet 4 : Asymptotique fine de l'holonomie le long de petits boucles browniennes, construction de la loi marginale de Yang-Mills en interaction avec un champ scalaire. Dans notre travail [1] sur les déterminants de laplacien covariant, nous utilisons l'estimée technique cruciale suivante, qui dit que l'holonomie le long d'une petite boucle brownienne est très proche de l'identité :

$$\mathbb{E}_{t,x,x}[\|\text{Id} - \text{Hol}_A W\|^2] \leq Ct^2.$$

Notons par comparaison que la même quantité, mais pour un mouvement brownien de durée t plutôt qu'une boucle Brownienne, est au contraire de l'ordre de t en général (sauf pour des choix très particulier de A). Une amélioration importante de ce résultat à laquelle nous réfléchissons avec P. Perruchaud serait la suivante

Conjecture 3. *Soit M une variété Riemannienne compacte et $x \in \text{Int}(M)$. Alors*

$$\mathbb{E}_{t,x,x}[\|\text{Id} - \text{Hol}_A W\|^2] = Ct^2 |(\text{d}_A A)_x|^2 + O(t^{\frac{5}{2}}); \quad C = \frac{1}{6} + 2 \int_0^1 \frac{\mathbb{E}_{1,0,0}[B_s^1 B_s^2 \int_0^s B_u^1 dB_u^2]}{1-s} ds,$$

où (B^1, B^2) est un pont brownien bidimensionnel euclidien.

De plus, le terme de reste est localement uniforme en x , et uniforme en A sur

$$B_R = \{A : \|\text{d}_A A\|_{L^2}^2 \leq R\}$$

pour tout R .

En particulier, l'uniformité en A est un point important, très délicat dans le cas non-abélien. On obtiendrait plus facilement une uniformité pour la norme $W^{2,\infty}$, mais un tel résultat pourrait s'avérer insuffisant pour l'étude de la mesure \mathbb{P}'_{YM} (la marginale sur le secteur Yang-Mills, dans le modèle de Yang-Mills-Higgs).

De manière grossière, un tel résultat permettrait d'étudier \mathbb{P}'_{YM} car il induirait un corollaire de la forme suivante : en dimension $d \in \{2, 3\}$, si A est distribué selon une mesure qui ne charge que les connexions lisses, alors il existe une constante C' tel que

$$\frac{e^{-C'\|\text{d}_A A\|^2}}{f(A)} \leq \frac{Z_{g,m,A}}{\mathbb{E}[Z_{g,m,A}]} \leq e^{C'\|\text{d}_A A\|^2} f(A),$$

où f s'étend continûment sur l'espace des connexions distributionnelles.

Le but serait alors de montrer que, lorsque \mathbb{P}_{YM} est de température inverse β , la mesure \mathbb{P}'_{YM} est en quelque sorte coincée entre deux mesures de Yang-Mills de température inverse $\beta - \alpha C'$ et $\beta + \alpha C'$, au même sens qu'une martingale de variation quadratique bornée loin de 0 peut être vue comme coincée entre 2 mouvements browniens ; le sens précis de cette assertion est encore à déterminer, mais on peut par exemple poser la question plus générale suivante : soit h une fonctionnelle sur les connexions, telle que

$$\frac{e^{-c_1\|\text{d}_A A\|^2}}{f(A)} \leq h(A) \leq e^{c_2\|\text{d}_A A\|^2} f(A),$$

où f est continue sur l'espace des connexions distributionnelles. Est-il possible, pour $\beta > c_1$, de définir une mesure donnée informellement par $d\mathbb{P} = h d\mathbb{P}_{YM}$? Si, par exemple, A^ϵ est une mollification de A distribuée selon \mathbb{P}_{YM} et qu'on note \mathbb{P}_{YM}^ϵ sa distribution, est-il vrai que $h\mathbb{P}_{YM}^\epsilon$ converge en un certain sens lorsque $\epsilon \rightarrow 0$?

En dimension $d = 4$, on ne peut plus déduire le corollaire, car le changement de comportement de la soupe de boucles browniennes empêche de définir le déterminant du laplacien comme un produit d'holonomies. Ce produit devient alors divergent, ce qui est précisément dû aux petites boucles. En revanche, la conjecture 3 suggère la possibilité de renormaliser le produit pour obtenir une limite non triviale.

Conjecture 4. *Soient \mathcal{L} une soupe de boucles browniennes sur une variété riemannienne compacte de dimension 4, et \mathcal{L}_δ le sous-ensemble des boucles de taille supérieure δ . Il existe une constante C telle que*

$$e^{C|\log(\delta)|\|d_A A\|^2} \prod_{X \in \mathcal{L}_\delta} \text{Hol}_A X$$

converge, presque sûrement et dans L^p pour tout p , lorsque δ tend vers 0.

B. DÉCOMPOSITION DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN POUR LA CONSTRUCTION DE LIMITES D'ÉCHELLE ET DE FONCTIONS DE PARTITION

Les projets présentés ici sont pour partie issus de réflexions récentes. Si certaines des questions présentées sont précisément posées, on gardera à l'esprit que d'autres ne sont pas encore entièrement délimitées.

Motivés par la possibilité d'exprimer les déterminants de laplaciens en terme de processus de boucles SLE_2 , nous réfléchissons avec Adrien Kassel sur les liens entre SLE_2 et trajectoires browniennes. Afin de comprendre pourquoi une telle expression devrait exister, et peut passer par les trajectoires browniennes, on pourra déjà présenter les faits suivants :

- ◊ Sur des espaces discrets, il existe une mesure naturelle sur des forêts couvrantes d'unicycles, tels que les cycles convergent en loi vers des trajectoires qui ressemblent à des boucles SLE_2 . La fonction de partition de cette mesure n'est autre que le déterminant du laplacien associé. C'est ce qui a été étudié, entre autre, par Richard Kenyon et A. Kassel. Pour tirer selon cette mesure, il existe un algorithme qui repose sur la décomposition d'une marche aléatoire simple en une collection d'une trajectoire simple et une collection de boucles simples.
- ◊ Sur des espaces continus, le déterminant du laplacien s'exprime en fonction d'une soupe de boucles browniennes : c'est ce que j'ai montré avec P. Perruchaud. De plus, les trajectoires browniennes se décomposent alors en un SLE_2 et une collection de boucles browniennes : c'est ce que j'ai montré avec N. Berestycki.

La trace γ d'un SLE_2 est une courbe aléatoire simple (i.e. sans auto-intersection, sauf éventuellement entre ses extrémités), définie dans le plan, et qui apparait par exemple comme limite d'échelle de la marche aléatoire à boucles effacées. Il en existe plusieurs versions, entre autre une version chordale (définie dans un domaine du plan, et reliant deux points fixés sur le bord du domaine), une version radiale (reliant un point intérieur au domaine et un point sur le bord du domaine), et une version boucle (il s'agit d'une mesure $\mu_{2,loop}$ **de masse infinie** sur les boucles simples), particulièrement intéressante pour ces relations avec les théories des champs conformes.

Avec N. Berestycki, nous prouvons qu'il est possible de reconstruire un mouvement brownien à partir d'un SLE_2 γ et d'une soupe de boucles browniennes \mathcal{L} , euristiquement de la manière suivante : on suit le chemin γ , mais dès qu'on rencontre une boucle ℓ de \mathcal{L} pour la première fois, on fait un détour en suivant ℓ . Lorsqu'on a fini de parcourir ℓ , on est retourné au point où on l'avait rencontré, et on reprend la poursuite du chemin γ . On construit rigoureusement une telle application Ξ qui prend en entrée un chemin simple γ et une collection infinie de boucle \mathcal{L} et retourne le chemin $\Xi(\gamma, \mathcal{L})$ qui suit γ en faisant de tels détours. Si cette procédure n'est pas inversible (on ne peut pas retrouver la donnée de (γ, \mathcal{L}) à partir du mouvement brownien), elle définit tout de même un couplage canonique entre ces trois objets.

Les travaux de A. Kassel s'intéressent entre autres aux forêts couvrantes d'unicycle dans les graphes (c'est à dire de sous-ensembles d'arêtes qui couvrent les sommets et dont chaque composante est soit un arbre qui touche le *bord* du graphe, soit contient exactement un cycle). Étant donnée une connexion discrète sur le graphe, on peut définir une mesure de probabilité sur ces forêts d'unicycle, dont la fonction de partition vaut le déterminant du laplacien sur le graphe. De plus, quand on approxime suffisamment bien une surface par des graphes, la collection des cycles dans une telle forêt est liée aux boucles SLE_2 : par exemple pour la connexion triviale (la mesure associée est alors la mesure uniforme sur les forêts d'unicycle), et quand la surface

est un anneau, si on conditionne à ce qu'un cycle fasse le tour de l'anneau, ce cycle converge vers la loi de la boucle SLE_2 également conditionnée à faire le tour de l'anneau.

On pourrait succinctement résumer ainsi les deux types de questions qui nous intéressent : l'algorithme de Wilson paresseux, la loi jointe de l'ensemble des cycles obtenus dans la forêt d'unicycles, et la loi jointe de l'ensemble des boucles effacées pendant l'algorithme, ont-ils une limite continue ? Quelles sont les relations entre cet ensemble de cycles limites et le déterminant du laplacien covariant (continu) associé, et comment écrire la loi d'un cycle en terme de la mesure $\mu_{2,loop}$, de soupe de boucles browniennes, et d'holonomie de la connexion ?

B.1. Projet 1 : construction de la limite d'échelle des forêts d'unicycles. Lorsqu'on considère la connexion triviale sur un réseau dans un domaine simplement connexe du plan, dans la limite où la maille du réseau tend vers 0, le rayon du plus grand cycle converge en distribution vers 0. Ce n'est cependant plus le cas quand on considère une connexion non triviale, et les cycles convergent alors vers une limite non triviale. Le but ici serait d'étendre cette convergence à celle de toute la forêt.

Conjecture 5. *Soient D un domaine simplement connexe, $x_1, \dots, x_k \in D$, et A une connexion sur D (avec $G = U(1)$). Soit D_ϵ le réseau de maille ϵ dans D , et $x_1(\epsilon), \dots, x_k(\epsilon)$ les points les plus proches de x_1, \dots, x_k dans D_ϵ . Soit \mathbb{P}_A la mesure sur les forêts d'unicycles associée à une discrétisation appropriée de A . Pour F tirée selon \mathbb{P}_A , on considère le sous-ensemble $F(x_1, \dots, x_k)$ de F qui contient, pour chaque i , le cycle dans la composante connexe contenant $x_i(\epsilon)$ (ou rien si cette composante connexe atteint le bord du domaine), ainsi que le chemin géodésique de $x_i(\epsilon)$ vers ce cycle (ou vers le bord du domaine).*

Alors, $F(x_1, \dots, x_k)$ converge en distribution, pour une distance appropriée les familles d'unicycles dans D , lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Sous une certaine hypothèse de courbure sur A , [KK17] définit un algorithme pour construire la forêt F , qui est essentiellement un algorithme de Wilson où la procédure d'effacement des boucles est paresseuse. On part d'un point arbitrairement choisi dans le domaine, et on effectue une marche aléatoire. Chaque fois qu'on fait une boucle, on regarde l'intégrale de A le long de cette boucle. Avec une probabilité qui dépend de cette intégrale, soit on efface cette boucle et on continue notre marche, soit on s'arrête et on garde le chemin obtenu (c'est un lasso : il contient la boucle qu'on a décidé de garder, ainsi que la *anse* qu'on a suivi pour atteindre cette boucle). Dès qu'on atteint le bord du graphe ou l'un des chemins qu'on a déjà décidé de garder, on s'arrête et on garde le chemin obtenu jusque là. Après s'être arrêté, s'il reste des points non couverts, on repart d'un point non couvert choisi arbitrairement.

Cet algorithme permet aussi de construire directement le sous-ensemble $F(x_1, \dots, x_k)$: il suffit, chaque fois qu'on part d'un nouveau point, de choisir l'un des points x_i et de s'arrêter lorsqu'ils sont tous couverts.

Dans le cas où A est triviale, on retrouve l'algorithme de Wilson : chaque fois qu'on fait une boucle, on élimine cette boucle avec probabilité 1. En particulier, le chemin suivi par exemple par x_1 si l'on est parti de ce point est une marche aléatoire à boucles effacées, de x_i vers le bord du graphe. En particulier, dans la limite d'échelle $\epsilon \rightarrow 0$, cela converge vers un SLE_2 (radial, de x_i vers un point du bord de D tiré selon la mesure harmonique sur ∂D vu de x_i).

Lorsque A n'est plus triviale, on devrait donc avoir à la limite, après la première étape où l'on est partie de x_1 , un lasso dont la anse ressemble à un SLE_2 et la boucle est tirée selon une mesure proche de la mesure $\mu_{2,loop}$.

Une approche (un peu brutale) pour construire la limite consisterait à étendre le résultat qu'on a obtenu avec N. Berestycki au cas des **boucles** browniennes : surprenamment, si l'on sait traiter le cas de ponts browniens d'extrémités distinctes, le cas des boucles posent des difficultés théoriques additionnelles.

Si l'on peut montrer cette conjecture, il devrait être possible d'**itérer** la procédure de décomposition d'une trajectoire brownienne : on décompose d'abord la trajectoire brownienne en un SLE_2 et une collection de boucles browniennes, puis on décompose chacune de ces boucles et on recommence. La procédure d'itération cache en fait une difficulté additionnelle : la décomposition est fortement dépendante du point où est enracinée la boucle. Or, le premier point où

le SLE_2 rencontre une boucle brownienne est très atypique du point de vue de la boucle Brownienne (en particulier, ça n'est pas un temps d'arrêt), et il faut également comprendre comment le **réenracinement** change la décomposition, ce qui est abordable, mais assez technique.

En itérant donc indéfiniment, on devrait pouvoir obtenir une décomposition d'un mouvement brownien en une courbe simple et une collection infinie Γ de boucles simples, munie d'un ordre total (mais qui n'a par exemple pas la propriété de la borne supérieure), qui serait l'équivalent continu de la décomposition d'une marche sur le réseau en : une marche à boucles effacées et la collection des boucles effacées chronologiquement. Cette collection ne contient qu'un nombre fini de grandes boucles. Pour chaque boucle $\gamma \in \Gamma$, on peut définir la probabilité p_γ que l'algorithme paresseux élimine la boucle γ . Parce que cette probabilité est proche de 1 quand γ est petite, il est possible que le produit infini $\prod_{\gamma' < \gamma} p_{\gamma'}$ soit positif. Ainsi, avec probabilité

$$\prod_{\gamma' \leq \gamma} p_{\gamma'} - \prod_{\gamma' < \gamma} p_{\gamma'},$$

il faut éliminer toutes les boucles qui arrivent avant la boucle γ' , mais conserver la boucle γ , qui sera alors la boucle de notre lasso final. On peut alors également reconstruire la trajectoire de la anse, à partir du chemin simple initial et de Γ .

L'objectif serait ainsi de définir la décomposition des boucles browniennes, puis la décomposition itérative du mouvement brownien, puis le lasso simple obtenue à partir d'une trajectoire brownienne en application l'algorithme d'effacement de boucle paresseux, puis enfin la forêt d'unicycle que l'on conjecture comme limite continue de $F(x_1, \dots, x_k)$. La démonstration de cette convergence reposerait ensuite sur des questions de compatibilité entre l'application Ξ et l'intégrale stochastique, pour lesquelles on pourrait reposer sur des techniques de théories des chemins rugueux.

On peut envisager une approche plus subtile du problème précédant, mais qui reposerait sur un résultat supplémentaire de convergence des boucles effacées durant l'algorithme *cyclePopping* d'effacement des boucles le long d'une trajectoire brownienne.

Introduisons d'abord un mécanisme qui, partant d'une famille de mesures $(\mu_x^D)_{x \in D}$ (pas nécessairement de probabilités, mais variant de manière suffisamment régulière en x) sur un domaine plan D et portées par l'ensemble $\mathcal{L}(D)$ des boucles simples paramétrées à valeurs dans D , et de ℓ un chemin simple paramétré dans D (qui peut ou non être une boucle), produit un arbre combinatoire enraciné \mathcal{T}_ℓ , où les enfants de chaque sommet sont totalement ordonnés, et dont chaque sommet est décoré par un élément de $\mathcal{L}(D)$, de la manière suivante :

- ◊ On construit d'abord une racine r pour \mathcal{T}_ℓ , qu'on décore par le chemin simple ℓ . On tire ensuite un processus de Poisson \mathcal{P}_ℓ sur $[0, t] \times \mathcal{L}(D)$, où $[0, t]$ est l'intervalle par lequel ℓ est paramétré, et d'intensité

$$\int_0^t \delta_s \otimes \mu_{\ell(s)}^D ds.$$

- ◊ L'ensemble des enfants de r s'identifie alors à \mathcal{P}_ℓ . Ces éléments sont naturellement ordonnés par leur coordonnée sur $[0, t]$, et décoré par la composante sur $\mathcal{L}(D)$.
- ◊ On itère le processus : inductivement, pour chaque somme qu'on a construit et décoré par une boucle ℓ , on construit un ensemble aléatoire d'enfants comme à l'étape précédente, et indépendamment de toutes les étapes déjà effectuées conditionnellement à ℓ .

On note alors $\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D})$ l'arbre obtenu, quand on est parti initialement du chemin simple γ .

Conjecture 6. *Soit D un domaine plan compact. On fixe $x \in D$. Soient D_ϵ une approximation de D sur un réseau de maille ϵ , $x_\epsilon \in D_\epsilon$ qui converge vers x quand $\epsilon \rightarrow 0$, et W_ϵ la marche aléatoire simple sur D_ϵ , partant de x_ϵ et jusqu'à sa sortie de D_ϵ . On note alors γ_ϵ la trajectoire à boucle effacées obtenue à partir de W_ϵ , et \mathcal{L}_ϵ l'ensemble des boucles effacées durant l'algorithme, qui sont naturellement organisées en un arbre. \mathcal{T}_ϵ (décoré à la racine par γ_ϵ).*

Cet arbre converge en distribution lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (pour une topologie adéquate). Il existe une famille de mesures (μ_x^D) , chacune absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{2,loop}$, telle que la limite est distribuée comme $\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D})$ pour γ un SLE_2 partant de x dans D .

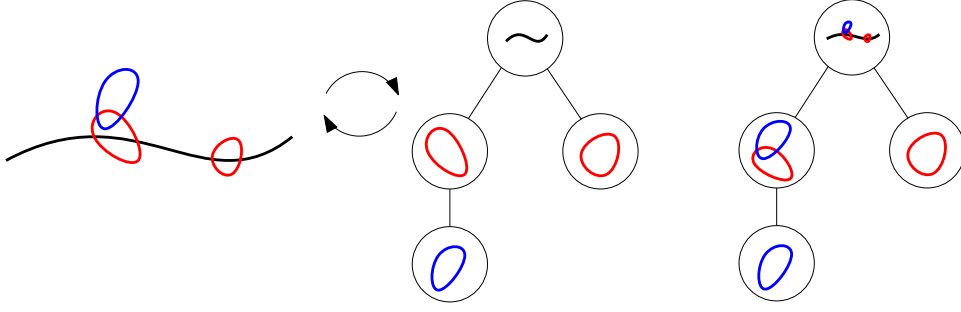


FIGURE 1 – Un exemple simple de la structure d’arbre combinatoire décoré \mathcal{T} (au centre) associé à une trajectoire avec un nombre fini d’auto-intersections (à gauche). À droite, l’arbre \mathcal{T}' défini plus bas, qu’on obtient à partir de \mathcal{T} en appliquant, itérativement depuis les feuilles, la fonction Ξ : on retrouve le chemin initial comme décoration du sommet de \mathcal{T}' . Dans le cas d’une trajectoire Brownienne, l’arbre serait de profondeur infinie et chaque sommet serait de degré infini. Ce qu’on propose est essentiellement de trouver la bonne loi de probabilité sur de tels arbres combinatoires décorés comme au centre, qui aurait une propriété d’autosimilarité, de sorte à obtenir à gauche un mouvement brownien.

Sans regarder d’approximation sur le réseau, on peut aussi penser qu’il est ainsi possible de décomposer le mouvement Brownien sur D en collection de boucles simples. Pour \mathcal{T} un arbre décoré (déterministiquement) comme au-dessus et de profondeur finie, on peut, inductivement en partant par les feuilles de l’arbre \mathcal{T} , appliquer la fonction Ξ , et ainsi obtenir un nouvel arbre combinatoire \mathcal{T}' décoré cette fois-ci par des chemins non simples : ainsi, si on note $\ell(x)$ la décoration initiale du sommet $x \in \mathcal{T}$ par un chemin simple et $\ell'(x)$ la nouvelle décoration, on a $\ell(x) = \ell'(x)$ pour toute feuille x de \mathcal{T} , et pour tout sommet interne x dont Y_x est l’ensemble des enfants, $\ell'(x) = \Xi(\ell(x), \{\ell'(y)\}_{y \in Y_x})$. Notons alors $\Gamma(\mathcal{T})$ le lacet au sommet de cet arbre. Intuitivement, \mathcal{T} contient alors toutes les boucles obtenues lorsqu’on efface chronologiquement les boucles de $\Gamma(\mathcal{T})$.

Conjecture 7. *Soit D un domaine plan compact. On fixe $x \in D$, et on prend γ un SLE_2 radial partant de x dans D . Il existe une famille de mesures (μ_x^D) , où chaque μ_x^D est absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{2,loop}$ enracinée en x , tel que l’arbre $\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D})$ est une décomposition chronologique en boucles simples du mouvement brownien W partant de x et stoppé lorsqu’il sort de D , au sens suivant.*

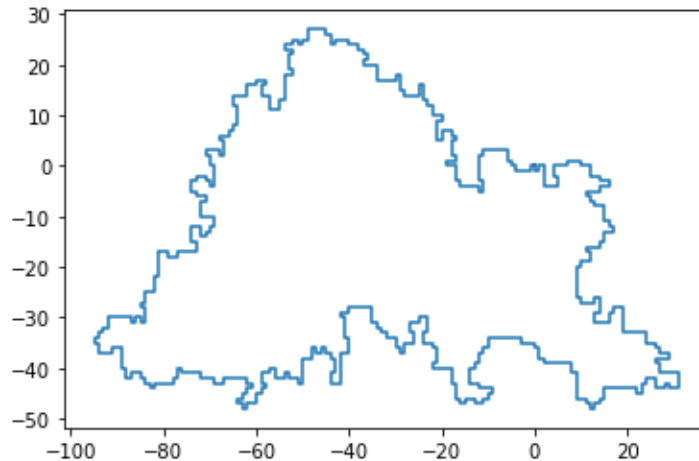
Pour tout entier positif n , soit \mathcal{T}_n le sous-arbre de $\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D})$ formés par les sommets à distance au plus n de la racine. Alors, $\Gamma(\mathcal{T}_n)$ converge presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$, et la limite qu’on notera $\Gamma(\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D}))$ est distribuée comme W .

Si on remplace γ par un chemin constant, on obtient à la place une boucle Brownienne à la limite.

On remarquera que, dans le cas continu, l’arbre $\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D})$ contient **plus** d’information que la seule information de la trajectoire $\Gamma(\mathcal{T}(\gamma, (\mu_x^D)_{x \in D}))$, puisque l’application Ξ n’est pas injective.¹¹ C’est l’application inverse qu’on propose ici de construire. À partir d’un tel arbre \mathcal{T} , l’algorithme d’effacement de boucle revient à ne garder que la racine, tandis qu’un algorithme paresseux revient à un élagage partiel. Il devrait alors être possible de définir l’algorithme de Wilson paresseux en continu, et de montrer que les versions discrètes convergent bien vers la version continue.

L’obtention d’une telle décomposition serait une suite naturelle de mes résultats dans [4], et reposerait sur des outils de convergence dans [KK17].

¹¹. Le mouvement Brownien pourrait être porté par un ensemble sur lequel Ξ est inversible, mais cela me semble peu probable.

FIGURE 2 – Une simulation de W_n .

Un résultat partiel plus simple, et qui devrait reposer sur une caractérisation connue de la mesure $\mu_{2,loop}$ ainsi que sur la preuve de la convergence des marches aléatoires à boucles effacées vers le SLE_2 , serait le suivant.

Conjecture 8. *Soit W_n une marche aléatoire sur le réseau usuel \mathbb{Z}^2 , conditionné à ce que son premier point d'autointersection soit en 0 et arrive à un temps plus grand que n . Après remise à l'échelle et reparamétrisation, W_n converge en distribution, lorsque n tend vers l'infini, vers une trajectoire distribuée selon la mesure $\mu_{2,loop}$ conditionnée à l'évènement (de $\mu_{2,loop}$ -masse finie) que son contenu de $\frac{5}{4}$ -Hausdorff soit plus grand que 1.*

B.2. Projet 2 : Relations entre déterminants de laplacien et boucle SLE_2 . On se propose de construire une mesure sur les boucles proches de la mesure $\mu_{2,loop}$, mais dépendant du choix d'une connexion, et d'établir des relations entre cette mesure et le déterminant du laplacien covariant associé à cette connexion, similaires aux relations établies dans le cas de la connexion triviale.

Une des voies possibles pour cela serait de partir de l'expression du déterminant en fonction de la soupe de boucles Browniennes qu'on a établi dans [1], puis d'utiliser la décomposition que je viens de présenter. Il faudrait ensuite par exemple comprendre comment cette décomposition fonctionne du point de vue de l'analyse stochastique, c'est à dire si elle permet de décomposer une intégrale stochastique le long d'une courbe en fonction de la somme des intégrales le long des boucles qui décorent l'arbre qui lui est associé.

C. GÉOMÉTRIE ET ANALYSE SUR LES SURFACES QUANTIQUES

Dans cet ensemble de projets, je voudrais définir un ensemble de notions qui généralisent des notions de géométrie différentiel classique, par exemple les espaces de Sobolev de sections ou de connexions dans un fibré, au cas où la variété sous-jacente ne soit plus disons une variété Riemannienne mais une surface quantique, c'est à dire pour simplifier munie d'une structure conforme et d'une forme volume inhabituelle. Un des buts à terme serait de définir de telles structures dans un cadre *topologique* plutôt que *différentiel*, et d'utiliser ces notions d'une part pour construire certains modèles de champs aléatoire sur des surfaces aléatoires (typiquement, sur un disque muni d'un chaos multiplicatif gaussien); et d'autre part pour montrer la convergence de certains modèles de champs aléatoires discrets définis sur des cartes aléatoires, vers leur équivalent continu.

C.1. Projet 1 : Energie de Yang-Mills, espace de Sobolev. Soit V un champ de vecteurs V (ou respectivement une 1-forme A ou une connexion ∇) sur un espace lisse (M, g) . L'énergie

de Yang–Mills

$$E : V \mapsto \int_M |\operatorname{rot}(V)|^2 \, d \operatorname{vol}_g, \quad \text{resp.} \quad A \mapsto \int_M |dA|^2 \, d \operatorname{vol}_g, \quad \nabla \mapsto \int_M |F_\nabla|^2 \, d \operatorname{vol}_g$$

permet de très bien quantifier l'irrégularité de V . Elle est invariante par *transformation de jauge*, i.e. $E(V) = E(V + \operatorname{grad} f)$ pour tout f , dans le cas abélien, ce qui la rend très naturelle pour étudier les théories de jauge. C'est un outil essentiel dans l'analyse des fibrés vectoriels, et l'espace

$$H^1(\operatorname{curl}, g) := \{V \in L^2(M, \mathbb{R}^2, g) : \operatorname{rot}(V) \in L^2(M, \mathbb{R}, g)\}$$

joue également un rôle essentiel dans plusieurs domaines de l'analyse. Il est crucial pour la suite de noter que cette énergie dépend de la métrique ambiante. Dans la suite on se focalise sur le cas des 1-formes : le cas des champs de vecteurs s'obtiendrait normalement par dualité, et la différence serait superficielle. Ici, en revanche, la dualité fait précisément intervenir la métrique, et le bon cadre est bien celui des 1-formes.

En deux dimensions, l'énergie de Yang–Mills ne dépend de la métrique qu'au travers de l'élément de volume, ce qui permet de la définir sur disons un disque muni d'un chaos multiplicatif gaussien (D, \mathbb{M}) .¹² Il est alors naturel de se demander à quoi ressemble un élément de $H^1(\operatorname{curl}, g)$. Il est facile de voir qu'une 1-forme A appartient à $H^1(\operatorname{curl}, \mathbb{M})$ dès lors¹³ que sa dérivée extérieure dA , qui est une forme volume, est de la forme

$$dA = f \, d\mathbb{M}, \quad f \in L^2(D, \mathbb{M}).$$

Remark 9. Si l'on considérait un autre type d'énergie, par exemple

$$\int_M |\operatorname{rot}(V)|^2 R_g \, d \operatorname{vol}_g$$

où R_g est la courbure scalaire de g , ou aboutirait au même espace $H^1(\operatorname{curl}, g)$ dans le cas d'une métrique lisse g , mais pas pour $H^1(\operatorname{curl}, \mathbb{M})$. La construction de l'espace est ici vraiment dépendant du choix d'énergie, et des problèmes qui feraient intervenir naturellement d'autres types d'énergie demanderaient de construire d'autres types d'espaces de Sobolev. Plus profondément, le choix d'énergie naturel dépend du type de fibré que l'on cherche à étudier. Une approche plus générique devrait pouvoir être développée. La plupart des fibrés utilisés en pratique peuvent être obtenus à partir du seul fibré tangent et de transformations fonctorielles dans la catégorie des espaces vectoriels (dualité, produit extérieur symétrique, tensorisation entre des fibrés, construction de fibrés triviaux...). Ces fibrés peuvent ensuite être gradués naturellement, et le bon espace de Sobolev à construire ne devrait dépendre que de la graduation du fibré considéré. Pour les problèmes qui nous préoccupent ici, la graduation est toujours triviale, et en conséquence seul un type d'espace de Sobolev est pertinent à considérer.

On peut de même construire des espaces $W^{1,q}$ pour $q \in [1, \infty)$,

$$W^{1,q}(D, \mathbb{M}) := \{A : dA = f \, d\mathbb{M}, f \in L^q(D, \mathbb{M})\},$$

J'ai montré dans [5] que pour un A tel que la fonction f correspondant soit suffisamment lisse, il est possible de définir l'intégrale de A le long d'un chemin lisse (au sens euclidien), mais aussi le long d'un mouvement Brownien, et que ces intégrales jouissent d'une certaine régularité *au sens des chemins rugueux*. Cette régularité devrait permettre, par la théorie des chemins rugueux et pour γ suffisamment proche de 0, de définir l'holonomie d'une connexion ∇ le long d'un mouvement Brownien (de Liouville ou euclidien), lorsque cette connexion est suffisamment lisse (au sens où sa courbure F_∇ s'écrit $f \, d\mathbb{M}$, pour un f suffisamment lisse). Ce que je propose ici est en quelque sorte de construire une théorie de l'intégration, sur ces espaces et pour des objets dont la régularité soit naturelle *du point de vue de \mathbb{M}* , qui ne soit pas suffisamment puissante pour

12. En dimension $d = 2$, on sait construire la distance \mathfrak{d} mais on ne sait pas, à ma connaissance, l'interpréter comme provenant d'une *métrique*. En dimension $d \neq 2$, l'énergie de Yang–Mills est bien définie au travers de la métrique elle-même, et il est donc heureux que cette dépendance se simplifie pour $d = 2$.

13. Il faut en fait vérifier une autre condition, demandant que A elle-même soit L^2 . Il est délicat d'écrire cette condition dans le cas de l'espace D , mais elle disparaît quand on considère les 1-formes à *équivalence de jauge près*, car un élément A tel que $dA \in L^2$ est toujours équivalent de jauge à un élément $\tilde{A} \in L^2$.

résoudre des équations différentielles (stochastique ou non) dans l'espace de départ, mais tout de même suffisamment puissante pour résoudre les équations différentielles qui correspondraient, dans le cadre riemannienne, au relèvement stochastique d'une trajectoire sur un fibré au-dessus de (D, M) .

Une autre direction consisterait à éclaircir le lien entre cet espace et le champ de Yang–Mills relatif à la métrique de Liouville : il est assez aisé, au moins dans le cadre abélien et pour un domaine D du plan, de définir un “pré” champ de Yang–Mills relatif à la métrique M (c'est à dire une version pour laquelle les mesurables sont données par les holonomies le long d'une famille simple de lacets). L'extension en un champ de Yang–Mills (avec plus de quantités mesurables) devrait ensuite reposer sur les mêmes arguments que dans le cadre riemannien usuel, ainsi que sur des outils dont on parle un peu plus loin. Déjà dans ce cadre riemannien, le seul lien rigoureux entre l'action de Yang–Mills et le champ de Yang–Mills est donné par un principe de grande déviation. Il serait intéressant d'étendre ce principe au cadre du champ de Yang–Mills sur (D, M) , ainsi que d'obtenir un résultat de type Cameron–Martin dans les deux cas (i.e. de montrer que l'espace des translations pour lesquels la mesure de Yang–Mills est quasi-invariante est exactement l'espace $H^1(\text{curl}, M)$, voir d'exprimer la dérivée de Radon–Nikodym en fonction de l'énergie de Yang–Mills).

Le fait de pouvoir définir les holonomies Browniennes suggère qu'il est possible, pour n'importe quel connexion dans $H^1(D, M)$, de définir le GFF covariant correspondant. La plupart des problèmes d'analyse classique s'étendent alors à ce cadre. Par exemple, pour ∇ une connexion dans $H^1(\text{curl}, M)$ “suffisamment régulière”, il est bien possible de définir le laplacien associé puis son noyau de Green $G_{\nabla, M}$.

Conjecture 10. *Pour une réalisation de M fixée, soit $\mathbb{P}_{t,x,y}$ la loi de W un pont Brownien de Liouville de x à y et de durée t . Alors,*

$$G_{\nabla, M}(x, dy) = G_M(x, dy) \mathbb{E}_{t,x,y}[\mathcal{H}ol_{\nabla}(W)],$$

où G_M est le noyau de Dirichlet sur M et $\mathcal{H}ol_{\nabla}(W)$ l'intégrale stochastique que j'ai construit dans le cas d'un fibré complexe dans [5].

Le couplage du champ de Yang–Mills avec le GMC, c'est à dire en prenant cette fois en compte les fonctions de partitions, fait à nouveau intervenir des déterminants de Laplaciens, dont on doit cette fois-ci étudier la dépendance en la métrique plutôt qu'en la connexion. Un résultat d'invariance conforme qu'on a obtenu dans [1] assure qu'on peut se ramener à étudier cette dépendance seulement pour le laplacien scalaire, et en déduire ensuite la dépendance pour les laplacien covariant (i.e. associé à une connexion sur un fibré général). Cette dépendance est un sujet actif de recherche, et il est de plus en plus évident que l'ajout de cette fonction de partition revient essentiellement à changer la charge central du modèle (i.e. à changer le paramètre γ , en simplifiant un peu).

C.2. Projet 2 : Bornitude, compacité et convergence des 1-formes sur les cartes aléatoires. Une autre raison de considérer l'énergie H^1 est d'étudier les 1-formes (ou champs de vecteurs) sur des cartes aléatoires. Il est aujourd'hui bien connu que de nombreux modèles de cartes planaires aléatoires convergent, en tant qu'espaces métriques mesurés, vers l'espace (D, \mathfrak{d}, M) . On rappelle que pour des cartes à n faces, la métrique est donnée par la distance de graphe remise à l'échelle par un facteur d'ordre $n^{-\frac{1}{4}}$, tandis que la mesure est donnée par la mesure discrète sur les sommets, multipliées par le degré du sommet, et remise à l'échelle par un facteur d'ordre n^{-1} . On peut également considérer le graphe dual dont les sommets sont les faces du graphe initial, ou le graphe dont les sommets sont les sommets *et* les faces du graphe initial. Les convergences ont encore lieu, en prenant, par exemple pour le graphe dual, la mesure discrète sur les sommets du graphe (donc sur les faces du graphe initial). On s'attachera ici peu au détail du choix de modèles de cartes aléatoires, et on pensera à la formulation duale car il est pratique dans notre contexte de penser à la mesure comme étant portée par les faces.

Le but du projet est d'étudier sous quelles conditions un champ de vecteur discret, aléatoire ou déterministe, défini sur une tel carte, converge dans la limite continue vers un champ de vecteur

sur D , et quelle est la régularité de la limite. On se demande également ce qu'il se passe lorsque on ne tire pas un champ de vecteurs aléatoirement sur une carte uniforme, mais qu'on tire au hasard simultanément la carte et le champ de vecteurs (c'est à dire, à nouveau, en prenant en compte la fonction de partition).

Une 1-forme discrète A définie sur la carte (planaire orientée) $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F})$ est simplement une fonction A définie sur l'ensemble des arêtes orientées, à valeurs réelles, impaire par rapport au changement d'orientation d'une arête. On notera alors

$$dA : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

la fonction qui à f associe $\sum_{e \in \partial f} A(e)$, où la somme porte sur les arêtes parcourant le tour de la face f , dans le sens 'trigonométrique' (bien défini car la carte est orientée, dA serait autrement défini sur les faces *orientées*), et

$$\|A\|_{W_{\text{discret}}^{1,q}}^q = \frac{1}{|\mathbb{F}|} \sum_{f \in \mathbb{F}} dA(f)^q.$$

Ceci définit une seminorme, avec $\|A\|_{W_{\text{discret}}^{1,q}} = 0$ si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $A = \text{grad } f$ soit le gradient, i.e. $A(e) = f(w) - f(v)$ pour toute arête $e = (v, w)$. On note $[A]$ la classe d'équivalence de A , c'est à dire $B \in [A]$ s'il existe f tel que $A - B = \text{grad } f$. De même pour une 1-forme (continue) A sur le domaine D , on note $[A]$ la classe d'équivalence de A modulo les 1-formes exactes (i.e. les "gradients").

Conjecture 11. *Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F})$ une carte planaire plongée dans un disque topologique D , muni d'une métrique riemannienne lisse et d'une orientation, tel que le plongement respecte la mesure et la métrique (i.e. les arêtes sont de longueur $n^{-\frac{1}{4}}$ et les faces de mesure n^{-1}). Alors, pour toute 1-forme discrète A définie sur la carte, il existe une 1-forme continue \tilde{A} telle que pour toute arête $e \in \mathbb{E}$, dont on note $\iota(e)$ la courbe image dans D , $A(e) = \int_{\iota(e)} \tilde{A}$. De plus, on peut supposer que $\|\tilde{A}\|_{W^{1,q}} = C_{\text{univ}} \|A\|_{W_{\text{discret}}^{1,q}}$ pour une constante universelle C_{univ} .*

Soit pour chaque n , \mathbb{G}^n un modèle de cartes à n faces et A^n une 1-forme discrète sur \mathbb{G}^n , tels que les cartes convergent¹⁴ au sens de Gromov-Hausdorff-Prokhorov vers $(D, \mathfrak{d}, \mathbb{M})$, où la métrique et la mesure sur \mathbb{G}^n est obtenue par les remises à l'échelle appropriées, et tels qu'il existe C tel que $\|A^n\|_{W_{\text{discret}}^{1,q}} \leq C$ pour tout n . Alors, toute sous-suite admet une sous-sous-suite le long de laquelle A^n converge en un certain sens, et toute limite A appartient à l'espace $W^{1,q}(D, \mathbb{M})$ défini plus haut, et vérifie $\|A\|_{W^{1,q}} \leq CC_{\text{univ}}$.

Remark 12. *Le premier énoncé parle d'injection **continue**, tandis que le second parle de **compacité**. Il faut voir que l'énoncé de convergence, où l'on a pas explicité la topologie car elle repose sur un raffinement assez intriqué de la convergence au sens de Gromov-Hausdorff-Prokhorov, utilise la distance $L^p(D, \mathbb{M})$ à équivalence de jauge près. La compacité devrait donc provenir de la compacité des inclusions entre espaces de Sobolev, qui devrait bien être vérifiée même pour la mesure \mathbb{M} .*

On s'attends à ce que les deux énoncés s'étendent au cas des 1-formes à valeurs dans un groupe de Lie compact G , avec une subtilité supplémentaire lorsque $G \simeq G' \times U(1)$. Dans ce cas, on doit se restreindre aux champs de vecteurs 'admissibles', tel qu'il existe un choix de jauge pour lequel, sur chaque face f , la somme sur $e \in \partial f$ des composantes de A sur le (ou les) facteur $U(1)$, prise en valeur absolue, soit plus petit que le périmètre de ce facteur $U(1)$. Autrement dit, l'holonomie le long du bord de chaque face doit former trajectoriellement dans G une courbe contractile, sans quoi il sera impossible d'étendre la connexion discrète sans former de singularité topologique.

La continuité naturelle de ce travail serait l'étude de la convergence du champ de Yang-Mills discret, défini sur une carte aléatoire, vers le champ de Yang-Mills continu défini sur (D, \mathbb{M}) .

14. On travaille ici avec de la convergence presque sûre pour simplifier, donc avec des cartes et champs de vecteurs déterministes, mais la conjecture est essentiellement la même pour la convergence en distribution.

C.3. Projet 3 : Définition et étude des espaces de Hölder sur (D, \mathfrak{d}, M) . Comme sur tout espace métrique, il est possible de définir sur (D, \mathfrak{d}) les espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha([0, 1], D)$, $\alpha \in (0, 1]$.¹⁵ Sur un espace géodésique mesuré topologiquement équivalent à un disque bidimensionnel, une manière qui semble naturel pour définir des espaces $\mathcal{C}^{1+\alpha}([0, 1], D)$ est de considérer le volume (pour M) engendré par le triangle géodésique (pour \mathfrak{d}) formé par trois points sur la courbe : pour trois points x, y, z , notons $T_{x,y,z}$ le plus petit (pour l'inclusion) triangle géodésique engendré par x, y et z , qui est toujours bien défini dans un disque géodésique. On définit alors $\mathcal{C}^{1+\alpha}([0, 1], D)$ comme le sous-espace de $\mathcal{C}^1([0, 1], D)$ tel que

$$\gamma \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([0, 1], D) \iff \exists C : \forall s < u < t, M(T_{\gamma_s, \gamma_u, \gamma_t}) \leq |t - s|^{2+\alpha}. \quad (7)$$

On peut vérifier dans le cas euclidien qu'une telle condition impose effectivement de la régularité sur la dérivée $\dot{\gamma}$, c'est à dire impose $\dot{\gamma} \in \mathcal{C}^\alpha$.¹⁶

Les espaces \mathcal{C}^α et $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ semblent très bien interagir avec les espaces $W^{1,q}$ défini plus haut, ainsi qu'avec des espaces $W^{p,q}$ plus généraux, ce qui ouvre un certain nombre de questions :

- ◊ Peut-on définir une intégrale de Young dans un tel cadre ? Pour répondre à une telle question, la difficulté principale est de montrer que la condition qui définit l'espace $\mathcal{C}^\alpha([0, 1], D)$, et qui relève de la métrique \mathfrak{d} , impose elle-même automatiquement une condition sur l'aire des triangles géodésiques, similaire à (7) (mais avec un exposant moindre).
- ◊ Si la réponse à la première question est positive, peut-on montrer de la régularité pour ces intégrales, et définir des holonomies le long de tels chemins ?
- ◊ De même qu'il y a confluence des géodésiques, y a-t'il confluence des chemins $\mathcal{C}^\alpha([0, 1], D)$? l'ensemble des germes de tels chemins est-il au contraire aussi riche que dans le cas riemannien, par exemple pour $\alpha > 1$? Cela permet-il de définir une notion non triviale d'espace tangent ?
- ◊ Le champ de Yang–Mills, dans le cas Riemannien, permet de définir les holonomies le long de chemins $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$, ou même \mathcal{C}^1 avec plus de travail. Peut-on de même étendre le "pré" champ de Yang–Mills associé à M aux chemins $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$?

SUGGESTIONS D'AFFECTATIONS

Si ma candidature était reçue, je suggère que mon affectation soit au sein de l'UMPA, où j'effectue actuellement un post-doctorat. D'autres possibilités qui me paraissent pertinentes sont l'institut de mathématiques de Toulouse et l'institut de mathématiques de Marseille.

15. Pour $\alpha = 1$, cela correspond à l'espace $\mathcal{C}^{0,1}$ des courbes lipschitzienne, et non pas à l'espace \mathcal{C}^1

16. Ceci si γ est déjà \mathcal{C}^1 : la condition donnée ne permet pas d'empêcher un point de rebroussement de π degrés, mais empêche bien tout autre type de point de rebroussement.

BIBLIOGRAPHIE

- [AFS20] Morris Ang, Hugo Falconet, and Xin Sun. Volume of metric balls in liouville quantum gravity, 2020.
- [Ber17] Nathanaël Berestycki. An elementary approach to gaussian multiplicative chaos, 2017.
- [BW23] Nathanaël Berestycki and Mo Dick Wong. Weyl’s law in liouville quantum gravity, 2023.
- [CCHS22] Ajay Chandra, Ilya Chevyrev, Martin Hairer, and Hao Shen. Stochastic quantisation of yang-mills-higgs in 3d, 2022.
- [DDG23] Jian Ding, Julien Dubedat, and Ewain Gwynne. Introduction to the liouville quantum gravity metric, 2023.
- [GM20] Ewain Gwynne and Jason Miller. Confluence of geodesics in liouville quantum gravity for $\gamma \in (0, 2)$, 2020.
- [GPS22] Ewain Gwynne, Joshua Pfeffer, and Scott Sheffield. Geodesics and metric ball boundaries in liouville quantum gravity, 2022.
- [GRV16] Christophe Garban, Rémi Rhodes, and Vincent Vargas. Liouville brownian motion. *The Annals of Probability*, 44(4), July 2016.
- [KK17] Adrien Kassel and Richard Kenyon. Random curves on surfaces induced from the Laplacian determinant. *Ann. Probab.*, 45(2) :932–964, 2017.
- [LW04] Gregory F. Lawler and Wendelin Werner. The Brownian loop soup. *Probab. Theory Related Fields*, 128(4) :565–588, 2004.
- [Nor92] J. R. Norris. A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds. In *Séminaire de Probabilités, XXVI*, volume 1526 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–209. Springer, Berlin, 1992.
- [RV13] Rémi Rhodes and Vincent Vargas. Gaussian multiplicative chaos and applications : a review, 2013.
- [Wer94a] Wendelin Werner. Rate of explosion of the Amperean area of the planar Brownian loop. In *Séminaire de Probabilités XXVIII*, pages 153–163. Berlin : Springer, 1994.
- [Wer94b] Wendelin Werner. Sur les points autour desquels le mouvement brownien plan tourne beaucoup. *Probab. Theory Related Fields*, 99(1) :111–144, 1994.
- [Wer95] Wendelin Werner. Formule de Green, lacet brownien plan et aire de Lévy. *Stochastic Process. Appl.*, 57(2) :225–245, 1995.
- [1] Pierre Perruchaud and Isao Sauzedde. Loop soup representation for zeta-regularised determinants of twisted Laplacians and covariant Symanzik identities. *Ann. Probab.*, 53(6) :2099–2143, 2025.
- [2] Isao Sauzedde. Holonomy of the planar brownian motion in a poisson punctured plane. *Communications in Mathematical Physics*, 405(6), May 2024.
- [3] Isao Sauzedde. Renormalised amperean area of brownian motions and symanzik representation of the 2d abelian yang–mills–higgs field, 2024.
- [4] Nathanaël Berestycki and Isao Sauzedde. A pathwise loop-erasure of planar brownian motion, 2026. à venir.
- [5] Isao Sauzedde. Integration and stochastic integration in gaussian multiplicative chaos, 2021. [arXiv:2105.01232](https://arxiv.org/abs/2105.01232).