Quantum gaussian processes

Isao Sauzedde

Mars 2018

Ce document contient les notes de mon exposé au GdT "chemins rugueux non commutatifs" au LPSM. Je n'ai pas tout revérifié, des erreurs ont pu se glisser. Si vous en trouvez, vous pouvez me contacter par mail pour me les signaler. Cette version est provisoire, et sera mise à jour plus tard sur ma page.

1 familles q-gaussiennes

Ce qu'on appelle "processus non commutative" se limite, dans la terminologie de [Franz, 2004] à un "operator process". Sauf mention contraire, $\otimes$ et $\oplus$ désignent respectivement le produit tensoriel algébrique et la somme directe algébrique.

1.1 Construction GNS et etat du vide

Si $\mathcal{A}$ une C^* algèbre agissant sur un espace hilbertien $\mathcal{H}$, et $\Omega \in \mathcal{H}$ est un vecteur unitaire, alors la forme linéaire $a \mapsto \langle \Omega, a\Omega \rangle_H$ définit un état tracial sur $\mathcal{A}$. La construction GNS assure en fait que tout état tracial est obtenu de cette manière, à condition de ne pas avoir fixé *a priori* l'espace hilbertien sur lequel on représente $\mathcal{A}$:

Théoreme 1. *(Construction GNS)*

Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre munie d'un état tracial τ.

Alors il existe un triplet $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$, où π est une représentation de $\mathcal{A}$ sur l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ et $\Omega \in \mathcal{H}$, tel que

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \ \tau(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle_{\mathcal{H}}$$

On peut supposer que Ω est cyclique, i.e. $\{\pi(a)\Omega,\ a \in \mathcal{A}\}$ dense dans $\mathcal{H}$. On appelle Ω l'état du vide.

De plus un tel triplet est défini canoniquement.

Attention : la représentation n'est pas nécessairement irréductible, et si on a fixé $\mathcal{A}$ comme sous espace de $L(\mathcal{H}')$, on ne peut a priori pas supposer $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$. Typiquement, si $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{C})$, avec la trace usuelle, on ne trouve évidemment pas de tel vecteur Ω dans la représentation usuelle sur $\mathbb{C}^n$. On trouve par contre un tel vecteur dans la représentation $\pi(M) = \mathrm{Diag}(M, \dots, M)$ sur $\mathbb{C}^{n^2}$.

Essentiellement, on produit cette représentation en prenant pour $\mathcal{H}$ le complété séparé de $\mathcal{A}$ pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle \coloneqq \tau(b^* a)$, avec $\pi(a)\overline{b} = \overline{ab}$, et Ω l'unité de $\mathcal{A}$ (si $\mathcal{A}$ n'est pas unitaire, on fixe une approximation de l'unité, dont la limite existe bien dans $\mathcal{H}$, et ne dépend pas de l'approximation fixée).

On travaille maintenant sous cette représentation (de plus $\mathcal{A}$ est une W^*-algèbre, et τ est une trace normale et fidèle). On note Ω l'état du vide, et on se passe d'écrire π.

1.2 q-gaussiennes

Soit $q \in [-1, 1]$. On étudie un opérateur a qui vérifie $a\Omega = 0$ et la relation de "commutation" [1] :

$$a^* a - qaa^* = c1$$

Ces relations déterminent entièrement la loi n.c. de a ([Frisch and Bourret, 1970]) : la relation de commutation permet, en remplaçant aa^*, de réécrire tout moment $\tau\left(a^{i_1}(a^*)^{i_2}\ldots a^{i_{2n-1}}(a^*)^{i_{2n}}\right)$ sous la forme $\sum_n c_n \tau\left((a^*)^{k_n} a^{j_n}\right)$ (où les coefficients c_n ne dépendent que de q et du moment étudié). En utilisant $\tau\left((a^*)^k a^j\right) = \langle a^k\Omega, a^j\Omega\rangle_{\mathcal{H}}$ et la valeur de a sur l'état du vide, on voit qu'il ne reste que des termes pour lesquels $j_n = k_n = 0$. Ces termes sont indépendants de a et la d.n.c. est donc entièrement déterminée par les relations qu'on a fixé.

On peut plus généralement prendre une famille d'opérateurs $(a_i)_{i\in I}$, tous nuls sur l'état du vide, avec les conditions de commutation [2] $a_i^* a_j - q a_j a_i^* = c_{ij}1$.

C'est en fait la d.n.c. de $a_i + a_i^*$ qui nous intéresse :

Lorsque $(c_{i,j})$ est définie positive, on obtient pour $q = 1$ la loi n.c. de la gaussienne de covariance c, et pour $q = 0$ la loi du demi cercle !

En particulier, lorsque $I = \mathbb{R}_+$, et $c_{s,t} = t \wedge s$, on obtient la loi finidimensionnelle du (pré)mouvement brownien (libre pour $q = 0$), et en particulier l'indépendance/ liberté des incréments.

Une famille de variables (ω_i) ayant la d.n.c. de $(a_i + a_i^*)$ est appelée **famille q-gaussienne de covariance** c.

En posant $Cr(\pi) := \text{card}\left\{(\{a,b\},\{c,d\}) \in \pi^2 : a < c < b < d\right\}$, les moments mixtes d'une famille q-gaussienne (ω_i) sont donnés explicitement par la formule :

$$\tau(w_{i_1}^{(*)}\ldots w_{i_k}^{(*)}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ impair} \\ \sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(k)} q^{Cr(\pi)} \prod_{\{x,y\}\in\pi} \tau(w_{i_x} w_{i_y}) & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \tag{1}$$

La loi d'une variable q-gaussienne (card $I = 1$) réduite ($c = 1$) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, **à support compact** $[\frac{-2}{\sqrt{1-q}}, \frac{2}{\sqrt{1-q}}]$ **dès que** $|q| < 1$, de densité

$$d\mu\left(\frac{2\cos\theta}{\sqrt{1-q}}\right) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-q}\sin\theta \prod_{n\geq 1}\left((1-q^n)|1-q^n e^{2i\theta}|^2\right) \qquad (\theta \in [0,\pi])$$

1.3 q-espaces de Fock

On a rien dit pour l'instant de l'existence des familles q gaussiennes :

On suppose maintenant que la matrice de covariance est définie positive (cette condition n'est pas toujours très clair dans la littérature non commutative, mais relève de l'analyse commutative usuelle : le plus simple est encore de dire "il existe un Hilbert **séparable** et une famille de vecteurs dont la matrice des produits scalaires est c ").

On exhibe alors explicitement une famille d'opérateurs de covariance c : on construit pour ça les espaces de Fock.

1. Cette relation est "parachutée" ici. Dans le cas $q = 1$, une telle relation est vérifiée par les opérateurs de moment et position pour des particules bosoniques(à rotation près). A ma connaissance, le cas $q \notin \{-1, 1\}$ doit correspondre à une "statistique anyonique", responsable de l'effet Hall quantique fractionnaire - et présent dans la nature.

2. On peut en fait considérer $q = q_{ij}$, voir l'article [Bożejko and Speicher, 1994], dans lequel il est également fait mention de $q \in \mathbb{C}$.

Soit $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$ un espace de Hilbert complexe. On définit l'*espace de Fock* (algébrique) (ou *algèbre tensorielle*) sur $\mathcal{H}$ comme l'algèbre graduée

$$\mathcal{F}_{alg}(\mathcal{H}) \coloneqq \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{H}^{\otimes k}$$

où la somme directe comme les produits tensoriels sont algébriques. La structure d'algèbre est donnée par le produit tensoriel. On note Ω l'unité dans $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, qui correspondra effectivement à l'état du vide d'un e.p.n.c..

Cet espace admet une famille de produits scalaires, donnés pour $q \in]-1,1[$ par

$$\langle f_1 \otimes \dots f_n, g_1 \otimes \dots g_m\rangle_q \coloneqq \delta_{nm} \sum_{\pi\in S_n} q^{\iota(\pi)} \prod_{j=1}^{n} (f_j, g_{\pi(j)})_{\mathcal{H}}$$

où S_n désigne l'ensemble des permutations de $[|1,n|]$, et $\iota(\pi)$ le nombre d'inversions dans la permutation. Pour $q = 0$ il est clair qu'on a bien un produit scalaire, dans le cas général c'est un résutat ([Bożejko and Speicher, 1991]). On note $\mathcal{F}_q(\mathcal{H})$ le complété de $\mathcal{H}$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$, et on l'appelle q-espace de Fock.

1.3.1 cas $q = \pm 1$

Lorsque $q = -1$ ou lorsque ($q = 1$ et $\dim \mathcal{H} \geq 2$), la formule précédente définit une forme dégénérée : soit $f, g \in \mathcal{H}$. Pour $q = 1$, le vecteur $f \otimes g - g \otimes f$ est orthogonal à tout l'espace. De même pour $q = -1$, le vecteur $f \otimes g + g \otimes f$ est orthogonal à tout l'espace. On utilise alors l' espace de Fock *bosonique*, ou algèbre symétrique, lorsque $q = 1$, et l'espace de Fock *fermionique*, ou *algèbre extérieure* lorsque $q = -1$: il s'agit de l'espace complet quotienté par les relations de commutation (resp. anticommutation) $f \otimes g = g \otimes f$ $(q = 1)$, ou $f \otimes g = -g \otimes f$ $(q = 1)$. Du point de vue de la construction GNS, cela vient de l'étape où on sépare $\mathcal{A}$ en complétant. Le produit tensoriel passé au quotient est noté $f \odot g$ dans le premier cas, $f \wedge g$ dans le second.

Après un tel passage au quotient, la forme quadratique devient un produit hilbertien et on utilise les mêmes notations que pour $q \in]-1,1[$.

1.4 opérateurs de création et d'annihilation

Sauf précision contraire, q est fixé et on travail avec le produit scalaire associé.

Pour $f \in \mathcal{H}$, l'opérateur a_f^* dit **opérateur de création de** f sur $\mathcal{F}_q(\mathcal{H})$ est défini comme l'opérateur linéaire continu qui *shift par* f sur les chaos :

$$a_f^*\Omega \coloneqq f$$
$$a_f^* f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \coloneqq f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

On vérifie qu'il s'agit d'un opérateur borné, de norme $\|a_f^*\|_q = \frac{\|f\|_{\mathcal{H}}}{\sqrt{1-q}}$ $(q \geq 0)$.

L'opérateur d'annihilation de f est son adjoint, défini par

$$a_f\Omega \coloneqq 0$$
$$a_f f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \coloneqq \sum_j q^{j-1}(f, f_j)_{\mathcal{H}} f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_i \otimes \otimes f_n$$

Ces opérateurs (non normaux pour $f \neq 0$) vérifient la relation de commutation attendue :

$$a_f a_g^* - q a_g^* a_f = (f,g)_{\mathcal{H}} Id \tag{2}$$

On note $\omega_f := a_f + a_f^*$.

On suppose désormais avoir fixé les "éléments réels" de $\mathcal{H}$, c'est à dire qu'on a un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ et un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{R}} i$.

On définit alors l'espace de probabilité non commutatif $(\Gamma_q(\mathcal{H}), \tau)$, déjà sous forme GNS : l'algèbre de Von Neumann $\Gamma_q(\mathcal{H})$ est la sous algèbre de $B(\mathcal{F}_q(\mathcal{H}))$ engendrée par les $\omega_f, f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, et l'état tracial est donné par $\tau(A) = \langle \Omega, A\Omega \rangle_q$.

Remarque. On a associé à un espace hilbertien $\mathcal{H}$ l'e.p.n.c. $\Gamma_q(\mathcal{H})$. Si X est une contraction de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}'$ (au sens large : $\|X\|_{\mathcal{H},\mathcal{H}'} \leq 1$), on peut l'étendre en le morphisme d'algèbre borné

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_q(X): & \mathcal{F}_q(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{F}(\mathcal{H}') \\ & h_1 \otimes \cdots \otimes h_k & \mapsto & Xh_1 \otimes \cdots \otimes Xh_k \end{array}$$

(attention : $\mathcal{F}_q : T \mapsto \mathcal{F}_q(T)$ n'est *pas* linéaire)

En suivant [Bożejko et al., 1997], on voit que $\Gamma_q(\mathcal{H})$ (moralement $L^\infty(\mathcal{H})$)s'injecte dans $\mathcal{F}_q(\mathcal{H})$ (moralement $L^2(\mathcal{H})$) : les opérateurs sont déterminés par leur image sur le vide. On définit $\Gamma_q(T)$ le morphisme de $\Gamma_q(\mathcal{H})$ vers $\Gamma_q(\mathcal{H}') \subseteq B(\mathcal{F}_q(\mathcal{H}))$ qui à X associe l'unique élément de $\Gamma_q(\mathcal{H}')$ tel que $(\Gamma_q(T)X)\Omega = \mathcal{F}_q(T)(X\Omega)$.

Cette construction est fonctorielle depuis la catégorie des espaces de Hilbert réels munis des contractions vers la catégorie des algèbres de Von Neummann. On utilisera en particulier l'opérateur $\Gamma_q(q) := \Gamma_q(qId_{\mathcal{H}})$.

On a donc exhibé un e.p.n.c. et une famille q-gaussienne de covariance $(c_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ pour tout $q \in]-1,1[$ et c définie positive.

Remarque. Evidemment, l'espace de Fock est muni de plus structure que sa seule structure Hilbertienne. Dans une certaine mesure, cette structure se retrouve dans un Hilbert abstrait issu d'une construction GNS à partir de $\mathcal{A}$, si l'on a fixé une famille gaussienne dans $\mathcal{A}$.

2 Vers une q-Intégration stochastique ?

2.1 Espérance conditionnelle

Soit $\mathcal{A}, \tau$ un e.p.n.c. et $\mathcal{B}$ une sous algèbre de von Neumann. On appelle *espérance conditionnelle relativement à* $\mathcal{B}$ un morphisme $\tau_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linéaire, unitaire, positif, tel que $\tau_{\mathcal{B}}(b_1 a b_2) = b_1 \tau_{\mathcal{B}}(a) b_2$ pour tout $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ et $a \in \mathcal{A}$, et tel que $\tau \circ \tau_{\mathcal{B}} = \tau$.

On a un résultat d'existence et d'unicité

La définiton de l'espérance fait appel au produit, et une propriété qui fait appel à l'espérance conditionnelle dépend donc a priori de l'e.p.n.c. considéré.

Une telle propriété se retrouve par exemple dans le mouvement brownien défini de manière canonique sur $\Gamma_q(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ et que $X_t = \omega_{\mathbb{1}_{[0,t]}}$.

2.2 intégration

On a montré l'existence d'un processus X q-gaussien indexé par $\mathbb{R}_+$ et de covariance $\tau(X_s X_t) = s \wedge t$. On aimerait pouvoir définir une intégration stochastique par rapport à un tel processus. De même que le mouvement brownien peux correspondre à différents chemins rugueux, on va voir besoin de plus de données que les seules distributions n.c. fini dimensionnelles : dans la suite, on suppose que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ et que $X_t = \omega_{\mathbb{1}_{[0,t]}}$.

Comme dans le cas de l'intégration stochastique matricielle, la non-commutativité pousse à chercher à intégrer des incréments multipliés à droite ET à gauche : on veut donner du sens à

$$\int_0^t A_s dX_s B_s$$

On intègre donc, par rapport à X, un "biprocessus", c'est à dire un processus à valeur dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. C'est là que les ennuis commencent...

En résumé, la définition de l'intégrale stochastique "classique" se fonde essentiellement sur l'isométrie d'Ito, pour produire des processus L^2. On peut ensuite modifier la régularité, pour travailler dans des espaces L^p, $1<p<\infty$, grâce aux inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG). Or la définition même d'une variable non commutative pousse à vouloir d'obtenir des processus L^∞, et il se trouve *de facto* que certains processus sont bornés là où leur équivalent classique est seulement de classe $L^{\infty-} := \bigcap_{p>1} L^p$. On va énoncé un énoncé similaire aux inégalités BDG dans le cadre $q<1$, et qui s'étend à $p=\infty$. Malheureusement, cet énoncé fait apparaitre une norme infinie sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ plutôt que sur $\mathcal{A}$, et ne permet pas d'étendre l'intégrale stochastique comme dans le cas classique.

Le cas $q=0$ se distingue : la notion de liberté, qui n'a pas d'équivalent pour $q\notin\{0,1\}$, permet de définir une bonne intégrale stochastique ([Biane and Speicher, 1998]).

On suppose $q\in[0,1[$, de sorte qu'en particulier les q-gaussiennes sont bornées, et donc que les trajectoires q-browniennes sont 1/2 Hölder.

Soit X un mouvement brownien sur $\mathcal{A}$, et $(\mathcal{A}_t)$ la *filtration engendrée par X*, c'est à dire la famille d'algèbres de vN engendrées par $(X_s)_{s\leq t}$.

Un biprocessus simples adaptés B est un processus à valeur dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ pour lequel il existe $n,m\in\mathbb{N}^2$, des temps $(t_i)_{i\in[|0,n|]}\in\{0\}\times\mathbb{R}_+^n$ et des variables aléatoires $(B_{1,i,j})_{(i,j)\in[|0,n|]\times[|1,m|]}$ et $(B_{2,i,j})_{(i,j)\in[|0,n|]\times[|1,m|]}$ dans $\mathcal{A}_{t_i}$, le tout tel que $B_t=\sum_j B_{1,i,j}\otimes B_{2,i,j}$ dès que $t_i\leq t<t_{i+1}$, et $B_t=0$ pour $t\geq t_n$.

On introduit le *sharp product* comme l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccccc} \sharp: & (\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}) & \times & \mathcal{A} & \to \mathcal{A} \\ & (B_1\otimes B_2 & , & X) & \mapsto B_1XB_2 \end{array}$$

L'intégrale stochastique d'un tel processus B par rapport à X est définie comme on s'y attend :

$$\int_0^t B_s\sharp dX_s := \sum_{i,j} B_{1,i,j}(X_{t_{i+1}\wedge t}-X_{t_i\wedge t})B_{2,i,j}$$

L'application $I: B\mapsto (t\mapsto \int_0^t B_s\sharp dX_s)$ est clairement à valeur dans les processus bornés adaptés.

Pour que cette intégrale définisse une isométrie (avec, à l'arrivée, la norme L^2 en temps issue du produit scalaire fonctionnel $(a,b)\mapsto\tau(a^*b)$), il faut déjà définir un produit scalaire sur les biprocessus. On suppose ici qu'on travaille avec l'espace de Fock (construit sur $\mathcal{H}_\mathbb{R}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$), et on pose

$$\langle\langle U_1\otimes U_2, V_1\otimes V_2\rangle\rangle_q := \tau\left(U_1(\Gamma_q(q)(U_2V_1^*))V_2^*\right)$$

On vérifie qu'il s'agit d'une forme positive, et on a ([Donati-Martin, 2003])

Théoreme 2. *L'intégrale $U\mapsto\int_0^\infty U\sharp dX$ est une isométrie entre l'espace des biprocessus simples adaptés muni du produit L^2 en temps issu produit scalaire $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_q$ et l'espace des variables aléatoires muni du produit scalaire $(a,b)\mapsto\tau(a^*b)$.*

Dans [Donati-Martin, 2003], le caractère "défini" de l'intégrale n'est pas montré, mais il n'est pas nécessaire pour étendre.

On peut donc étendre l'intégrale stochastique à des biprocessus L^2 pour cette norme.

On cherche donc maintenant à avoir des inégalités "de type BDG"

Dans le cas $q=0$, on a le résultat suivant qui répond entièrement au problème :

Théoreme 3. *[Biane and Speicher, 1998], Théorème 3.2.1. : Soit X un mouvement brownien libre et U un biprocessus adapté simple. On a :*

$$\left\| \int_0^\infty U_s \sharp dX_s \right\|_{L^\infty(\tau)} \leq 2\sqrt{2} \|U\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty(\tau \otimes \tau)}$$

On peut donc étendre continuement l'intégrale aux biprocessus bornés dans $L^\infty(\tau \otimes \tau$, et obtenir une intégrale stochastique à valeur dans $L^\infty(\tau)$.

Pour q plus général , [Deya and Schott, 2018] considèrent $X \mapsto \int X \otimes dB$ plutôt que $X \mapsto \int X dB$ (à la sortie, on a un biprocessus plutôt qu'un processus). On obtient alors une inégalité BDG :

Théoreme 4. *[Deya and Schott, 2018], Proposition 3.2.*

Pour V un processus simple, et X un q-mouvement brownien

$$\left\| \int V \otimes dX \right\|_{L^\infty(\tau \otimes \tau)} \leq \frac{2}{\sqrt{1-q}} \|V\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty(\tau \otimes \tau)}$$

Cette inégalité cependant ne permet pas de conclure à un résultat similaire à celui de Biane et Speicher, car la norme de $\int V dX$ n'est PAS contrôlée par celle de $\int V \otimes dX$. Pour $q = 0$, le résultat "fort" s'obtient en utilisant de manière cruciale le caractère libre. On a pas d'équivalent pour q général.

Références

[Biane and Speicher, 1998] Biane, P. and Speicher, R. (1998). Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space. *Probab. Theory Relat. Fields*, 112(3) :373–409.

[Bożejko et al., 1997] Bożejko, M., Kümmerer, B., and Speicher, R. (1997). q-Gaussian processes : Non-commutative and classical aspects. *Commun. Math. Phys.*, 185(1) :129–154.

[Bożejko and Speicher, 1991] Bożejko, M. and Speicher, R. (1991). An example of a generalized Brownian motion. *Commun. Math. Phys.*, 137(3) :519–531.

[Bożejko and Speicher, 1994] Bożejko, M. and Speicher, R. (1994). Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces. *Math. Ann.*, 300(1) :97–120.

[Deya and Schott, 2018] Deya, A. and Schott, R. (2018). On stochastic calculus with respect to q-Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 274(4) :1047–1075.

[Donati-Martin, 2003] Donati-Martin, C. (2003). Stochastic integration with respect to q Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields*, 125(1) :77–95.

[Franz, 2004] Franz, U. (2004). The Theory of Quantum Levy Processes. *ArXiv Mathematics e-prints*.

[Frisch and Bourret, 1970] Frisch, U. and Bourret, R. (1970). Parastochastics. *J. Math. Phys.*, 11 :364–390.