

# ENLACEMENTS BROWNIENS POUR LA THÉORIE EUCLIDIENNE DES CHAMPS QUANTIQUES

ISAO SAUZEDDE

## TABLE DES MATIÈRES

Résumé de mes travaux	1
1. Eléments de mise en contexte	3
2. Formule de Green stochastique	5
3. Liens entre fonction d'enlacement, mesure d'occupation, mesure d'intersection	7
4. Construction de l'aire ampérienne	7
5. Enlacement du mouvement Brownien et GMC	8
6. Une situation non-abélienne	9
7. Déterminants $\zeta$ -régularisés et soupes de boucles	10
8. Décomposition du mouvement Brownien en $SLE_2$ et soupe de boucles	11
9. TCL et transition de phase pour des modèles de diffusion réfléchie	11
Références	13
Contributions	13

## RÉSUMÉ DE MES TRAVAUX

Mon travail de recherche, en probabilité et mathématique physique, se concentre principalement autour de la construction et de l'étude de mesures sur des espaces de fonctions définies sur un espace continu, en particulier en dimension 2. Je m'intéresse plus particulièrement au cas de champs en interaction, et à l'approche que j'appellerai *représentation de Symanzik*, qui utilise la dualité entre *champ* markovien et *processus* markovien de même générateur pour réécrire l'espérance de certaines fonctionnelles de la mesure qu'on cherche à construire comme espérance de fonctionnelle de trajectoires Browniennes.<sup>1</sup> Mon approche passe parfois par des méthodes de mollification mais pas de discrétisation sur des réseaux, ce qui permet entre autre de ne pas se restreindre à des espaces plats.

Le cas central dans ma recherche est celui de la mesure de Yang–Mills–Higgs, pour laquelle un champ scalaire (Higgs) interagit avec un champ de jauge (Yang–Mills). La construction d'une telle mesure est remarquablement complexe, et les questions que j'étudie plus concrètement n'en sont que des aspects spécifiques. J'aborderai ici principalement deux sous-problèmes, qui mènent chacun à des ramifications dont l'intérêt dépasse le problème initial.

La relation entre *champ magnétique* et *intégrale stochastique*, concrétisé dans la formule de Feynman-Kac-Itô magnétique, m'a conduit à étudier en profondeur les enlacements du mouvement Brownien plan. J'ai établi une formule de Green stochastique [1, 2], qui décrit par exemple l'aire de Lévy comme une forme de valeur principale de l'intégrale en espace de la fonction d'enlacement du mouvement Brownien plan. En utilisant cette formule, j'ai démontré rigoureusement un théorème central limite 1-stable pour la moyenne empirique de l'enlacement Brownien autour de points distribués de manière poissonnienne [1, 2]; résultat dont un cas particulier [1] était connu des physiciens depuis les années 90 [DFO96].

---

[HTTP://PERSO.ENS-LYON.FR/ISAO.SAUZEDDE/](http://perso.ens-lyon.fr/isao.sauzedde/)  
E-mail address: [isao.sauzedde@ens-lyon.fr](mailto:isao.sauzedde@ens-lyon.fr).

1. On parle aussi de *théorèmes d'isomorphisme*, terme que j'éviterai car mon objectif n'est pas d'étudier ces champs markoviens eux-même mais des champs plus complexes construits à partir de champs markoviens.

Dans [9, 8, 7] j'ai considéré différents aspects très techniques du point de vue des enlacements Browniens, et qui m'ont permis de développer et d'affiner de nombreuses techniques pour les étudier : dans [9], je considère une interaction non-abélienne, ce qui veut dire que l'on ne peut plus se restreindre à considérer des propriétés homologiques, mais qu'on doit au contraire comprendre des propriétés homotopiques, c'est à dire la manière dont le mouvement Brownien s'enlace *chronologiquement* autour d'une multitude de points. Dans [8], je considère une mesure sous-jacente sur le plan qui ne soit plus la mesure de Lebesgue mais une mesure aussi irrégulière qu'un chaos multiplicatif gaussien. Dans [7], j'étudie l'ensemble des points autour desquels deux mouvements Browniens s'enlacent un grand nombre de fois, et j'établis une première relation entre les ensembles de grands enlacements et la mesure d'intersection entre deux mouvements Browniens.

Dans [3], je construis l'*aire Ampéreeenne recentrée* d'une trajectoire Brownienne, qui s'interprète comme l'intégrale du carré de la fonction d'enlacement, moins son espérance : cette intégrale est en fait presque sûrement infinie, mais une méthode de renormalisation permet bien d'aboutir à une variable aléatoire bien définie et finie.<sup>2</sup> Cette aire ampéreeenne recentrée joue pour le champ de Yang–Mills–Higgs, un rôle très similaire au rôle joué par la mesure d'autointersection recentrée du mouvement Brownien pour le champ  $\Phi^4$  ; et ces deux quantités (aire ampéreeenne et mesure d'autointersection) sont liées par des relations similaires aux relations entre intégrale stochastique et mesure d'occupation.<sup>3</sup> Si les intégrales stochastiques usuelles interviennent dans la description de l'interaction avec un champ magnétique *externe*, c'est à dire fixé, lisse et déterministe, l'aire ampéreeenne intervient dans la description de l'interaction avec un champ magnétique *interne*, aléatoire et extrêmement irrégulier.

Comme je vais l'expliquer dans la prochaine section, et comme c'est le cas dès qu'on considère deux champs en interaction, la fonction de partition joue dans le modèle de Yang–Mills–Higgs un rôle primordial, non pas seulement pour *étudier* le modèle comme c'est le cas quand on considère un seul champ, mais déjà pour le *définir* le modèle. En effet, tirer au hasard une instance de la mesure de Yang–Mills–Higgs ne revient pas à tirer au hasard un champ de Yang–Mills  $A$ , puis à tirer au hasard un champ scalaire  $\Phi$  selon la mesure associée au champ  $A$ , mais bien à tirer les deux au hasard simultanément. Pour comparaison simple : tirer au hasard uniformément un objet dans un ensemble de sacs n'est pas équivalent à tirer un sac uniformément au hasard, puis un objet uniformément au hasard dans ce sac. Pour avoir un tirage uniforme, il faut pondérer le choix du sac par le nombre d'objets dans le sac ; rôle précisément joué par la fonction de partition dans notre cas. Comme on le verra, cette fonction de partition, qui dépend de  $A$ , se décrit quand  $A$  est lisse comme un déterminant de Laplacien, que l'on sait définir rigoureusement.

Avec P. Perruchaud, nous avons démontré dans le continu et dans un cadre géométrie très général [4] un résultat connu sur les graphes [KL21], qui décrit ce laplacien comme espérance faisant intervenir des intégrales stochastiques le long d'une soupe de boucles Browniennes, dans l'esprit de la représentation de Symanzik. Pour certains problèmes (e.g. maximalité du déterminant quand  $A = 0$ , régularité du déterminant comme fonction de  $A$ ), cette formule est bien plus facile à manipuler que la définition initiale, qui fait intervenir la décomposition spectrale du laplacien et une étape d'extension analytique, et donc des difficultés pour justifier rigoureusement certaines opérations.

Lorsque  $A$  est aussi irrégulier que sous la mesure de Yang–Mills, il reste très difficile d'analyser cette fonction de partition, même réécrite sous cette forme stochastique plus propice. Cela me conduit aujourd'hui à chercher une nouvelle famille de formules qui feraient intervenir des boucles  $SLE_2$  plutôt que des boucles Browniennes. La première concrétisation de cette recherche est l'obtention dans [5], avec Nathanaël Berestycki, de la décomposition d'une trajectoire Brownienne en un  $SLE_2$  et une collection de boucles Browniennes, résolvant ainsi une conjecture de Gregory Lawler et Wendelin Werner [LW04].

2. La vitesse de divergence, au premier ordre, en fonction d'un paramètre de régularisation, avait été calculée par W. Werner dans [Wer94a].

3. Notons que les résultats rigoureux, dans le monde continu, entre mesure d'autointersection et champ  $\Phi^4$ , sont maigres, bien que cette relation soit le moteur de l'étude de cette mesure.

Le tableau suivant résume les parallèles entre les intégrales classiques, stochastiques, contre la mesure d'autointersection, et ampérienne. On y note  $\mu_W$  la mesure d'occupation et  $\mathbf{n}_W$  la fonction d'enlacement.

intégrale classique $\int_0^T m(W_t) dt = \int_{\mathbb{R}^2} m(z) \mu_W(z)$	intégrale stochastique $\int_0^T A(W_t) \circ dW_t = \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(A)(z) \mathbf{n}_W(z) dz$
intégrale contre la mesure d'autointersection recentrée $\int \lambda(z) \mu_W^2(z)$	Aire ampérienne recentrée “ $\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(z) \mathbf{n}_W(z)^2 dz$ ”

Au travers de la représentation de Symanzik, ces expressions correspondent pour l'action du champs scalaire aux termes suivants :

terme de masse $m$	potentiel magnétique externe $A$
terme d'autointeraction $\lambda$	terme d'interaction avec un champ de Yang–Mills interne avec couplage $\alpha$

### 1. ELÉMENTS DE MISE EN CONTEXTE

*Le cadre naturel de la théorie des champs est celui de sections et connexions sur un fibré au-dessus d'une variété différentielle  $M$ . Par soucis de simplicité, hormis lorsque cela nuit véritablement au propos, je traiterai du cas **euclidien** et **abélien** pour lequel on peut identifier les sections du fibré avec des fonctions à valeurs complexes, et les connexions hermitiennes sur le fibré avec des champs de vecteurs (à coefficients réels). Contrairement à mon emploi, le mot “euclidien” dans l'expression “théorie des champs euclidiens” ne s'oppose pas à “Riemannien” mais à “Lorentzien” : il ne désigne pas le fait de travailler avec un espace sans courbure et avec une topologie triviale, mais dans un espace dont la métrique est de signature positive.*

En théorie des champs euclidiens, on cherche une mesure de probabilité sur un ensemble par exemple de fonctions, de champs de vecteurs, ou de métriques riemanniennes. Cette mesure est formellement décrite par l'expression

$$\mathbb{P}(\delta\phi) = \frac{1}{Z} e^{-S(\phi)/2} \mathcal{D}(\delta\phi),$$

où la *fonction de partition*  $Z$  est une constante de normalisation et  $\mathcal{D}$  est formellement une “mesure uniforme” sur l'espace considéré<sup>4,5</sup>.

Dans le cas où l'action  $S$  est la forme quadratique  $S(\phi) := \|\nabla\phi\|^2 = \langle \phi, \nabla^* \nabla \phi \rangle$  (disons, sur un tore plat, ou sur un domaine plan avec condition au bord nulle), on reconnaît formellement l'expression d'une mesure gaussienne, et la mesure  $\mathbb{P}$  est réalisée rigoureusement comme un champ libre gaussien. De plus, par analogie avec les mesures gaussiennes en dimension finie,  $Z$  est définie rigoureusement comme la racine du déterminant *spectral* (ou *zeta-regularisé*) du laplacien  $\nabla^* \nabla$  (on reviendra plus loin sur cette notion).

Plus généralement, prenons  $A$  un champ de vecteurs, qui s'interprète physiquement comme un potentiel magnétique, et  $m$  une fonction, pas nécessairement constante, qui s'interprète comme une masse. On remplace alors le gradient  $\nabla\phi$  par le gradient covariant  $\nabla_A\phi := \nabla\phi + iA\phi$ . Pour  $S(\phi) = S_{m,A}(\phi) := \|\nabla_A\phi\|^2 + \|m\phi\|^2$ , on garde le caractère gaussien qui permet encore de définir rigoureusement la mesure gaussienne  $\mathbb{P}_{m,A}$  correspondant (on omettra l'indice  $m$  lorsque  $m = 0$ ).

4. Cette mesure formelle est inexistante en réalité, puisque  $\phi$  appartient e.g. à l'espace vectoriel des fonctions au-dessus de  $M$ , qui est un espace de dimension infinie.

5. On notera  $\delta\phi$  plutôt que  $d\phi$  pour éviter les confusion avec la différentielle  $d$ .

Cette mesure est gaussienne et centrée, et entièrement caractérisée par la formule<sup>6</sup>

$$\forall x, y, \quad \mathbb{E}[\phi(x)\overline{\phi(y)}] = G_{m,A}(x, y) = \int_0^\infty p_t(x, y) \mathbb{E}_{t,x,y} [e^{i \int_0^t A_{W_s} \circ dW_s - \int_0^t m^2(W_s) ds}] dt, \quad (1)$$

où  $G_A$  est la fonction de Green associée au *Laplacien magnétique massif*  $\nabla_A^* \nabla_A + m^2$ , où  $W$  est un pont Brownien de  $x$  à  $y$  et de durée  $t$ , et où l'intégrale stochastique est au sens de Stratonovich. À nouveau, la fonction de partition,  $Z_{m,A}$ , est bien définie comme racine du déterminant spectral du laplacien magnétique massif.

Il s'agit là du plus simple exemple du concept de représentation de Symanzik, qui permet en général d'écrire la fonction à  $k$  points d'une théorie des champs euclidienne (resp. sa fonction de partition) comme une moyenne sur des ponts Browniens (resp. sur une soupe de boucles Browniennes) d'une certaine fonctionnelle de ces ponts, y compris quand la mesure n'est plus gaussienne. Dans son article fondateur [Sym69], Symanzik écrit ainsi les fonctions à  $k$  points du champ  $\phi^4$  (correspondant formellement à  $S(\phi) := \|\nabla\phi\|^2 + \|\lambda\phi\|^4$ ), en dimension 2 ou 3, en terme des temps d'intersection et d'autointersection de ponts Browniens.

Dans le cas de la mesure de Yang-Mills-Higgs, que je présente ici dans le cas sans terme d'autointeraction (i.e.  $\lambda = 0$ ), et (rappelons-le) dans le cas abélien, notre mesure d'intérêt porte sur des paires  $(\phi, A)$ , où, comme précédemment,  $\phi$  est une fonction à valeurs complexes et  $A$  est un champ de vecteurs, et  $S = S_{YMH}$  est donnée par  $S_{YMH}(\phi, A) := \|\text{rot } A\|^2 + S_{m,A}(\phi)$ . On peut alors réécrire formellement la mesure  $\mathbb{P}_{YMH}$  de sorte à faire apparaître les mesures gaussiennes  $\mathbb{P}_{m,A}$  définie au-dessus, et la mesure de Yang-Mills  $\mathbb{P}_{YM}$  sur  $A$ , correspondant à l'action  $S_{YM}(A) := \|\text{rot } A\|^2$  :

$$\mathbb{P}_{YMH}(\delta\phi, \delta A) = \frac{Z_{m,A} Z_{YM}}{Z_{YMH}} \mathbb{P}_{YM}(\delta A) \mathbb{P}_{m,A}(\delta\phi),$$

où  $Z_{m,A}$  sont les fonctions de partitions du modèle gaussien (qui, crucialement, dépendent bien de  $A$ ). Si cette formule montre bien l'importance cruciale d'avoir préalablement défini les fonctions de partitions  $Z_{m,A}$  (au moins à constante indépendante de  $A$  près), on considérera aussi la mesure "simplifiée" décrite formellement par

$$\tilde{\mathbb{P}}_{YMH}(\delta\phi, \delta A) = \frac{1}{\tilde{Z}_{YMH}} \mathbb{P}_{YM}(\delta A) \mathbb{P}_{m,A}(\delta\phi).$$

De même que la mesure de Yang-Mills, cette mesure est dégénérée, au sens où le groupe de jauge  $\mathcal{G}$ , de dimension infinie, agit sur l'ensemble des paires  $(\phi, A)$  d'une manière qui laisse formellement la mesure  $\mathbb{P}_{YMH}$  invariante : cela se traduit par exemple par le fait que la collection non-dénombrable des variables aléatoires  $\frac{\phi(x)}{|\phi(x)|}$  devrait être globalement indépendante, ce qui n'est pas sans poser de problème théorique. On doit donc penser à cette mesure comme portant non pas sur un ensemble de couples  $(\phi, A)$  (distributionnels) mais sur un ensemble de *classe d'équivalence* de tels couples, modulo équivalence de jauge. On se concentra donc sur des quantités invariantes sur ces classes, et en particulier sur la famille des variables dites *de corde* et *de boucle*<sup>7</sup> : pour une courbe lisse  $\gamma$  de  $y$  vers  $x$ , et une boucle orientée  $\ell$ , les *variables de corde* et *de boucle* sont données par

$$\mathcal{S}_\gamma = \phi(x) e^{i \int A_\gamma(d\gamma)} \overline{\phi(y)}, \quad \mathcal{S}_\ell = e^{i \int A(\ell) d\ell},$$

et l'équivalent naturel des fonctions à  $k$  points dans ce cadre est donné par les moments polynomiaux en ces variables.

Parlons maintenant de la *fonction d'enlacement*, ou *d'indice* d'une boucle dans le plan. Pour  $\ell$  une boucle dans le plan et un point  $z$  hors de l'image de  $\ell$ , cette fonction  $\mathbf{n}_\ell$ , à valeurs dans les entiers relatifs, décrit le nombre de fois que  $\ell$  tourne autour de  $z$ . Autrement dit, si  $\theta(t)$  est une détermination continue de l'angle orienté  $\widehat{\ell_0 z \ell_t}$  avec  $\theta(0) = 0$ , alors  $\mathbf{n}_\ell(z)$  vaut la valeur

6. Cette formule (1) est à interpréter au sens distributionnel : il faut remplacer  $x, y$  par des fonctions tests  $f, g$  dans le terme de gauche, et intégrer contre  $f(x)g(y) dx dy$  dans le membre du centre et de droite.

7. Cette famille est génératrice pour  $(\phi, A)$  lisse (au sens où la collection de toutes les variables de corde et de boucle détermine alors entièrement la classe d'équivalence de  $(\phi, A)$ ). En basse régularité, c'est en revanche une question extrêmement subtile.

finale de  $\theta$ , divisée par  $2\pi$ . Dans le cadre lisse,<sup>8</sup> la formule de Green ou de Stokes, usuellement formulée pour les boucles sans auto-intersection, s'étend naturellement lorsque l'on enlève cette restriction, et permet d'écrire l'intégrale de  $A$  le long de  $\gamma$  comme

$$\int A_\gamma(d\gamma) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_\gamma(z) \operatorname{rot} A(z) dz.$$

Avec des calculs formels assez élémentaires, et on notant  $W \cdot \gamma$  la boucle obtenu par concaténation de  $W$  (qui va de  $x$  à  $y$ ) et de  $\gamma$  (qui va de  $y$  à  $x$ ), on obtient alors, par exemple,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_{YMH}[\mathcal{S}_\gamma] &= \int_0^\infty p_t(x, y) \mathbb{E}_{YM} \otimes \mathbb{E}_{t,x,y}[\exp(i(\int A_\gamma(d\gamma) + \int_0^t A_{W_s} \circ dW_s))] \\ &= \int_0^\infty p_t(x, y) \mathbb{E}_{YM}[\exp(i \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{W \cdot \gamma}(z) \operatorname{rot} A(z) dz)] dt \\ &= \int_0^\infty p_t(x, y) \exp(- \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{W \cdot \gamma}(z)^2 dz/2) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

De la première à la deuxième ligne, on a utilisé formellement la formule de Green. Pour passer à la troisième ligne, on a utilisé le fait que, sous la mesure de Yang–Mills abélienne,  $\operatorname{rot} A$  est un bruit blanc gaussien. On voit que le dernier terme est nul, car l'intégrale vaut  $+\infty$  avec probabilité 1. Cela est dû au fait que la fonction d'enlacement prend des valeurs arbitrairement larges (positivement et négativement) au voisinage de chaque point de l'image de  $W$ ; et ce un peu trop rapidement, de sorte que  $\mathbf{n}_{W \cdot \gamma}$  échoue de peu à être intégrable.

On retiendra de ces premiers calculs qu'un traitement par cette approche demande :

- ◊ De justifier la formule de Green pour des trajectoires Browniennes.
- ◊ De définir une variable aléatoire, associée à une trajectoire Brownienne, et qui s'interprète comme une version renormalisée de  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{W \cdot \gamma}(z)^2 dz$ , et construite de telle sorte que la procédure de renormalisation du côté du mouvement Brownien s'identifie à une procédure de renormalisation claire du côté des champs euclidiens.
- ◊ De comprendre comment la fonction de partition  $Z_{m,A}$  varie en fonction de  $A$ , afin de la définir la mesure  $Z_{m,A} \mathbb{P}_{YM}(dA)$ .<sup>9</sup>
- ◊ De réécrire cette fonction de partition en terme de trajectoires Browniennes, si l'on souhaite pousser la représentation de Symanzik jusqu'au bout.

Ainsi, si mon travail est avant tout intéressé par la construction et l'étude de la mesure de Yang–Mills–Higgs, il se concentre avant tout sur l'étude de propriétés fines du mouvement Brownien et de la soupe de boucles Browniennes, et de leur fonction d'enlacement.

## 2. FORMULE DE GREEN STOCHASTIQUE

La formule de Green que l'on recherche s'écrit formellement<sup>10</sup>

$$\int A(\bar{W}) \circ d\bar{W} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{\bar{W}}(z) \operatorname{rot} A(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\mathbf{n}_{\bar{W}}(z)=k} \operatorname{rot} A(z) dz, \quad (3)$$

où  $\bar{W} = W \cdot \gamma$  est la concaténation d'un mouvement Brownien avec un chemin lisse entre ses extrémités (on supposera que  $\gamma$  est le segment droit entre ces extrémités, uniquement pour simplifier la présentation des résultats), et où l'intégrale dans le terme du milieu, de même que la somme dans le terme de droite, n'est **pas** définie au sens usuel, puisque la fonction  $\mathbf{n}_{\bar{W}}$  n'est pas localement intégrable. Remarquons l'importance conceptuelle de cette formule : aux origines de l'analyse stochastique, c'est ce qui a par exemple valu le nom d'*aire de Lévy* à l'intégrale  $\int (W_1 dW_2 - W_2 dW_1)/2$ , (ici,  $A(z) = (-z_2, z_1)/2$  et  $\operatorname{rot} A = 1$ ). Cette interprétation comme *aire* est également particulièrement reconnue en théorie des chemins rugueux, où elle apparaît dans l'introduction de la plupart des livres de référence. J'ai montré qu'on peut définir cette

8. J'ai montré dans [1] que cette formule s'étend en fait au cadre de l'intégrale de Young, lorsque la boucle est de basse régularité.

9. Pour l'approche de ce problème par approximation sur des graphes, voir [CC24].

10. De part la nature géométrie du problème, le cadre de l'intégration de Stratonovich plutôt que celui de l'intégration d'Itô est naturel.

intégrale comme une sorte de valeur principale : en fait, la somme à droite n'est pas absolument convergente, mais elle est symétriquement convergente.

**Théorème 1** (I.S., [1] pour le cas  $\text{rot } A = 1$ , [2] pour le cas général). *Pour  $A$  un champ de vecteurs de régularité  $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$  au sens de Hölder,  $W$ -presque sûrement,*

$$\int A(\bar{W}) \circ d\bar{W} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{|\mathbf{n}_{\bar{W}}(z)| \leq N} \mathbf{n}_{\bar{W}}(z) \text{rot } A(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N k \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\mathbf{n}_{\bar{W}}(z)=k} \text{rot } A(z) dz$$

Cette version de la formule de Green m'a permis de prouver rigoureusement une version généralisée d'un résultat connu dans la littérature physique [DFO95, DFO96] (mais dont la preuve ne résiste pas à un examen mathématiques rigoureux).

**Théorème 2.** (I.S., [1]) *Pour  $\lambda > 0$ , soit  $\mathcal{P}_\lambda$  un nuage de points Poissonien d'intensité  $\lambda dx$  défini sur le plan, indépendant de  $W$  un mouvement Brownien de durée  $t$ . Alors,  $W$ -presque sûrement, la moyenne empirique*

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda} \mathbf{n}_{\bar{W}}(x)$$

*converge en distribution (par rapport à  $\mathcal{P}_\lambda$ ) vers une variable de Cauchy dont le paramètre de position est égal à l'aire de Lévy de  $W$  et dont le paramètre d'échelle est égal à  $\frac{t}{2\pi}$ .*

(I.S., [2]) *Plus généralement, pour  $\lambda > 0$ , et  $f, g \in \mathcal{C}^e(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  avec  $g \geq 0$ , soit  $\mathcal{P}_\lambda$  un nuage de points Poissonien d'intensité  $\lambda \cdot g dx$  sur le plan, indépendant de  $W$ . Soit  $\mathbf{n}_W(\mathcal{P}_\lambda, f)$  la somme normalisée et pondérée*

$$\mathbf{n}_W(\mathcal{P}_\lambda, f) := \frac{1}{\lambda} \sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda} f(x) \mathbf{n}_{\bar{W}}(x),$$

*et fixons un champ de vecteurs  $V$  tel que  $\text{rot } V = f \cdot g$ .*

*Lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $W$ -presque sûrement,  $\mathbf{n}_W(\mathcal{P}_\lambda, f)$  converge en distribution (par rapport à  $\mathcal{P}_\lambda$ ) vers une variable de Cauchy dont le paramètre de position est égal à  $\int V(W) \circ dW$ , et le paramètre d'échelle est égal à  $\frac{1}{2\pi} \int_0^t |f(W_s)|g(W_s) ds$ .*

En mots, par analogie avec la méthode de Monte–Carlo pour estimer une intégrale usuelle, on pourrait s'attendre à ce que la somme  $\mathbf{n}_W(\mathcal{P}_\lambda, f)$  converge, par loi des grands nombres, lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Par la formule de Green usuelle, on pourrait ensuite s'attendre à ce que la limite soit donnée par  $\int V(\bar{W}) \circ d\bar{W}$ . En réalité, le manque d'intégrabilité est tel qu'il faut remplacer la loi des grands nombres par un théorème central limite 1-stable, et la convergence a donc bien lieu mais vers une variable de Cauchy. Le paramètre de position de cette variable de Cauchy est cependant bien donné par  $\int V(\bar{W}) \circ d\bar{W}$ .

Dans [DFO95],  $W$  décrit un électron circulant librement dans un cristal plan,  $\mathcal{P}_\lambda$  décrit des impuretés dans le cristal, et la fonction  $\mathbf{n}_W(\mathcal{P}_\lambda, g)$  décrit les effets magnétiques de ces impuretés sur l'électron. Ici,  $g$  décrit la densité locale d'impuretés, et  $f$  décrit le champ magnétique transversal. Aux échelles en jeu, les fluctuations de  $f$  et  $g$  sont non négligeables ([LSY15, LSG93, RS87]), ce qui rend physiquement pertinente la généralisation à  $f, g$  non constantes.

Sur le plan technique, pour démontrer ces résultats, j'ai dû étudier les ensembles de grands enlacements du mouvement Brownien,

$$\mathcal{D}_n := \{z : \mathbf{n}_W(z) \geq n\},$$

et leur mesure de Lebesgue  $D_n$ , qui jouent un rôle important dans mon travail. Dans [Wer94b], W. Werner obtient la convergence asymptotique

$$D_n \sim \frac{1}{2\pi n} \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

qui est hélas insuffisante pour conclure : il faudrait que cette estimation soit vraie au sens presque sûre, et que le terme d'erreur soit sommable en  $n$ , ce que j'ai démontré :

**Théorème 3** (I.S., [1]). *Pour tout  $\epsilon > 0$ , dans tous les espaces  $L^p(\Omega)$  ainsi qu'au sens presque sûr,*

$$D_n = \frac{1}{2\pi n} + O(n^{-\frac{3}{2}+\epsilon}), \quad \text{i.e.} \quad n^{\frac{1}{2}-\epsilon} |nD_n - \frac{1}{2\pi}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

### 3. LIENS ENTRE FONCTION D'ENLACEMENT, MESURE D'OCCUPATION, MESURE D'INTERSECTION

Dans [6], j'ai démontré le résultat suivant, qui cristallise l'idée selon laquelle l'ensemble des points où l'enlacement est grand se répartie très régulièrement le long de la trajectoire Brownienne. Cette idée est clé dans la manière dont j'étudie les enlacements Browniens.

**Théorème 4** (I.S., [6]). *Presque sûrement, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la mesure  $2\pi n \mathbb{1}_{\mathcal{D}_n}(z) dz$  converge étroitement vers la mesure d'occupation  $\mu_W$  de  $W$ , décrite par*

$$\int f d\mu_W = \int f(W_t) dt.$$

*On peut quantifier polynomialement la vitesse de convergence si on métrise la topologie de la convergence étroite avec la 1-distance de Wasserstein.*

Intuitivement, l'apparition de la mesure d'occupation à la limite est peu étonnante : pour que l'enlacement autour d'un point soit grand, il faut que ce point soit dans un petit voisinage de la trajectoire, et la mesure limite est donc nécessairement portée par l'image de  $W$ . C'est ce résultat qui m'a ensuite permis, dans [2], de généraliser au cas de champs de vecteurs quelconque (resp. de  $f, g$  quelconques) les résultats que j'avais obtenu dans [1] pour le cas particulier de l'aire de Lévy.

Par la suite, j'ai étudié l'ensemble de grand enlacement joint entre deux mouvements Browniens plans  $W, W'$  indépendants,

$$\mathcal{D}_{n,m} = \{z : \mathbf{n}_{\bar{W}}(z) \geq n \text{ et } \mathbf{n}_{\bar{W}'}(z) \geq m\}.$$

**Théorème 5** (I.S., [7]). *Dans la limite  $n, m \rightarrow \infty$  avec la restriction  $0 < c < \frac{\log n}{\log(m)} < C < \infty$  pour des constantes  $c, C$  arbitraires, la mesure  $4\pi^2 nm \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{n,m}}$  converge étroitement vers la mesure d'intersection entre  $W$  et  $W'$ , dans tous les espaces  $L^p(\Omega)$  et au sens presque sûr, et on peut quantifier polynomialement la vitesse de convergence si on métrise la topologie de la convergence étroite avec la 1-distance de Wasserstein.*

Les ensembles d'enlacements joints  $\mathcal{D}_{n,m}$  apparaissent naturellement dans la représentation de Symanzik des moments polynomiaux en les variables de cordes. Ils devraient également permettre de décrire, dans les modèles d'impuretés, les corrélations asymptotiques entre les variables associées à deux électrons Browniens dans le même environnement, mais je n'ai pas encore de résultat dans cette direction.

### 4. CONSTRUCTION DE L'AIRES AMPÉRÉENNE

Dans [3], j'ai démontré qu'il est possible de renormaliser l'aire ampéréenne du mouvement Brownien,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{\bar{W}}(z)^2 dz.$$

Intuitivement, on voudrait procéder comme par exemple pour définir la mesure d'autointersection du mouvement Brownien, c'est à dire en introduisant une mollification sous l'intégrale, et en soustrayant une espérance qui va diverger lorsque le paramètre de mollification tend vers 0 : on cherche donc une limite pour

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\epsilon * \mathbf{n}_{\bar{W}})(z)^2 dz - \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\epsilon * \mathbf{n}_{\bar{W}})(z)^2 dz \right],$$

où  $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-2} \varphi(\epsilon^{-1} \cdot)$  pour  $\varphi$  satisfaisant les hypothèses habituelles<sup>11</sup>. Il faut cependant se rappeler que  $\mathbf{n}_{\bar{W}}$  n'est même pas intégrable, de sorte que l'étape de convolution est mal définie a priori. On

11. Symétrie, positivité, support compact, intégrale 1.

défini donc cette convolution soit comme une valeur principale, au sens de la section précédente, soit comme la valeur de l'intégrale stochastique qui lui correspond par une formule de Green *formelle* (et les deux définitions coïncident bien, par la formule de Green stochastique que j'ai démontré). Je noterai  $\star$  cette 'convolution formelle', qu'on sait donc définir rigoureusement, pour la distinguer de la convolution usuelle  $*$ . Dans [3], j'ai démontré que cette limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  est bien définie. Pour deux mouvements Browniens indépendants, j'ai aussi construit le terme croisé qui apparaît depuis le modèle de Yang–Mills–Higgs, formellement  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{n}_{\bar{W}}(z) \mathbf{n}_{\bar{W}'}(z) dz$ , pour  $W, W'$  des mouvements Browniens plans indépendants l'un de l'autre. J'ai également montré la finitude de certains moments exponentiels, positifs comme négatifs.<sup>12</sup>

**Théorème 6** (I.S., [3]). *Pour  $W$  un mouvement Brownien, la limite au sens  $L^2(\Omega)$*

$$\mathcal{A}_W := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbb{R}^2} ((\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_W)(z))^2 dz - \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} ((\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_W)(z))^2 dz \right] \right)$$

*existe, et admet des moments exponentiels.*

*Pour deux mouvements Browniens plans  $W, W'$  indépendants, la limite au sens  $L^2(\Omega)$*

$$\mathcal{A}_{W,W'} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_W(z)) \cdot (\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_{W'}(z)) dz$$

*existe et admet des moments exponentiels. De plus, cette limite s'écrit comme l'intégrale de Stratonovich itérée*

$$\int \left( \int \log |W_s - W'_t| \circ dW_s \right) \circ dW'_t,$$

*ou encore comme l'intégrale d'Itô itérée*

$$\int \left( \int \log |W_s - W'_t| dW_s \right) dW'_t$$

*plus un quart du temps total d'intersection entre  $W$  et  $W'$ .*<sup>13</sup>

*Si  $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-2} \varphi(\epsilon^{-1} \cdot)$ , le contre-terme  $\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} ((\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_W)(z))^2 dz \right]$  vaut  $|\log \epsilon|/(2\pi) + C_\varphi + o(1)$  (pour  $W$  de durée 1).*

Pour comparaison, le résultat antérieur de W. Werner [Wer94a], qui utilise une normalisation différente, correspond moralement à l'équivalence asymptotique (dans  $L^2(\Omega)$ )

$$\int_{\mathbb{R}^2} ((\varphi_\epsilon \star \mathbf{n}_W)(z))^2 dz \sim |\log \epsilon|/(2\pi).$$

Avant d'en venir aux questions relatives aux fonctions de partition, je vais maintenant décrire des résultats proches de ceux que j'ai déjà présenté sur la formule de Green stochastique, mais pour deux modèles plus complexes. Le premier concerne la situation où la surface lisse sur laquelle se déplace notre particule Brownienne est remplacée par une surface quantique. Le second est un modèle d'impuretés avec une interaction non-abélienne.

## 5. ENLACEMENT DU MOUVEMENT BROWNIEN ET GMC

Dans [8], je considère une surface munie d'une mesure d'aire qui n'est pas lisse mais donnée par un chaos multiplicatif gaussien  $\mathbf{M}$ , dans l'optique de pouvoir définir une théorie de jauge au-dessus de surfaces quantiques. Je montre alors que, malgré l'extrême irrégularité de cette mesure d'aire, on peut encore définir l'équivalent de l'aire de Lévy, que j'appellerai aire de Lévy-Liouville. De même que l'aire de Lévy est liée à un champ magnétique constant sur le plan euclidien, l'aire de Lévy-Liouville correspond à un champ magnétique constant *du point de vue de  $\mathbf{M}$* .<sup>14</sup>

Bien que la mesure  $\mathbf{M}$  soit décrite formellement par la formule

$$d\mathbf{M}(z) = e^{\gamma \Phi_z - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[\Phi_z^2]} dz,$$

12. La formule (2) rend cruciale l'étude de tels moments exponentiels

13. Remarquons que la formule de conversion usuelle entre intégrale d'Itô et de Stratonovich échoue ici à cause de la singularité sur l'ensemble  $\{(s, t) : W_s = W'_t\}$ .

14. Rappelons qu'un champ magnétique, en deux dimensions, n'est pas une fonction mais bien une 2-forme. Son identification à une fonction dépend donc implicitement du choix d'une forme volume.

où  $\Phi$  est un champ gaussien libre dans un domaine compact donné (donc typiquement une distribution!), cette mesure  $M$  qu'on peut construire rigoureusement n'est *pas* à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et sa régularité est bien trop faible pour qu'on puisse définir l'aire de Lévy-Liouville directement comme une intégrale stochastique, contrairement à l'aire de Lévy classique. Il n'est donc plus question de montrer une égalité entre deux expressions, mais uniquement de montrer que l'une d'entre elle est bien définie.

**Théorème 7** (I.S., [8]). *Soit  $W$  un mouvement Brownien de durée  $T$ , indépendant de  $M$ . Pour  $0 \leq s < t \leq T$ , soit  $W_{s,t}$  sa restriction à l'intervalle  $[s, t]$ . Pour  $\gamma$  plus petit qu'une valeur explicite,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{|\mathbf{n}_{\bar{W}_{s,t}}(z)| \leq N} \mathbf{n}_{\bar{W}_{s,t}}(z) M(dz)$$

*converge, dans certains espaces  $L^p(\Omega_W, L^{p'}(\Omega_M))$ , lorsque le paramètre de cut-off  $N$  tend vers l'infini. La limite  $\mathbb{A}_{s,t}$ , définie pour tout  $s$  et  $t$  à égalité presque sûre près, admet une version trajectorielle continue (i.e. il existe une fonction aléatoire  $\mathbb{A}$  telle que pour tout  $s$  et  $t$ , presque sûrement,  $\mathbb{A}(s, t) = \mathbb{A}_{s,t}$ ). Cette version admet une bonne régularité de Hölder, au sens classique mais aussi "au sens des chemins rugueux" et vérifie une relation de Chasles.*

La dernière partie suggère qu'il est possible de construire une bonne théorie de l'intégration à partir de  $\mathbb{A}$ , avec une approche similaire à la théorie des chemins rugueux.

J'ai obtenu ce résultat en étudiant encore les ensembles de grand enlacement, mais sous la mesure  $M$ . Une des difficultés supplémentaires, dans ce cadre, est l'absence d'une bonne approximation, à l'ordre principal, de la  $M$ -mesure de l'ensemble  $\mathcal{D}_n$ , qui varie très fortement selon que  $W$  passe ou non par un 'point chaud' de  $\Phi$ . La stratégie consiste alors à estimer la différence entre  $M(\mathcal{D}_n)$  et  $M(\mathcal{D}_{-n})$ , où  $\mathcal{D}_{-n}$  est l'ensemble des points où l'enlacement est inférieur à  $-n$ , sans jamais étudier ces valeurs individuellement, sauf pour des bornes grossières.

## 6. UNE SITUATION NON-ABÉLIENNE

Dans [9], je suis revenu sur le modèle d'impuretés magnétiques aléatoires du théorème 2, mais dans une situation non-abélienne correspondant à d'autres forces qu'une force électromagnétique. Pour cela, on fixe  $G$  un groupe de Lie compact connexe, muni d'une métrique invariante. On note  $\nu_\epsilon$  la mesure de Haar sur la sphère de rayon  $\epsilon$  dans l'algèbre de Lie de  $G$ , et  $\mathcal{P}_{\lambda,\epsilon}$  un processus de point Poissonien sur  $\mathbb{R}^2 \times G$  d'intensité  $\lambda dx \otimes (\exp_G)_* \nu_\epsilon$ , dont on note  $\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}$  la projection sur  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi  $\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}$  décrit la position des impuretés, chaque impureté  $x$  étant associée à une "charge"  $g_x$  dans  $G$ .

On définit alors un morphisme de groupe aléatoire du groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}, 0)$  vers  $G$  de la manière suivante. D'abord, on fixe un isomorphisme  $\iota$  entre le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}, 0)$  et le groupe libre  $\mathbb{F}_{\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}}$  à  $\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}$  éléments. On compose ensuite  $\iota$  avec l'unique morphisme de groupe  $e$  de  $\mathbb{F}_{\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}}$  vers  $G$  qui envoie l'impureté  $x$  sur sa charge  $g_x$ .

Bien que  $\iota$  ne soit pas uniquement défini, et qu'il n'existe pas de manière canonique de choisir un tel isomorphisme, j'ai montré comment on pouvait isoler canoniquement une famille de tels isomorphismes  $\iota$ , tel que la distribution de  $H = e \circ \iota$  soit unique, pourvu qu'on choisisse  $\iota$  dans cette famille, indépendamment de  $\mathcal{P}_{\lambda,\epsilon}$  conditionnellement à  $\bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}$ . Cela provient de ce que la famille de ces isomorphismes est transitive pour l'action du groupe des tresses sur le groupe libre, et que cette action laisse invariante la loi conditionnelle de  $\mathcal{P}_{\lambda,\epsilon}$ .

Pour simplifier, on peut penser au morphisme  $H$  simplement comme à une fonction qui a une boucle  $\gamma$  partant de 0 associe une variable aléatoire dans  $G$ , définie ainsi : en partant de  $1 \in G$ , dès que  $\gamma$  fait un tour autour d'un des points  $x \in \bar{\mathcal{P}}_{\lambda,\epsilon}$ , la variable aléatoire est multipliée à droite par la charge  $g_x$  en  $x$  (mais l'ordre dans lequel  $\gamma$  tourne autour des différents points n'est, en réalité, pas canoniquement défini).

Le résultat principal de l'article est de montrer que dans la limite où  $\lambda \rightarrow \infty$  avec  $\epsilon$  inversement proportionnel à  $\lambda$ , si  $W$  est un mouvement Brownien plan indépendant de  $\mathcal{P}_{\lambda,\epsilon}$  (et fermé en une boucle  $\bar{W}$  grâce à un segment droit entre ses extrémités), alors  $W$  presque sûrement, la variable aléatoire  $H(\bar{W})$  converge en distribution vers une distribution 1-stable explicite sur  $G$ .

La vocation première de ce résultat n'est pas une utilisation directe, plus qu'une preuve de concept de deux principes : d'une part, les représentations de Symanzik s'étendent aux cas non-abéliens, et les enlacements non-abéliens qui interviennent peuvent encore être analysés à l'aide de résultats sur leur pendant abélien. D'autre part, même si l'analyse est plus complexe dans le cas non-abéliens, les résultats restent qualitativement les mêmes dans les cas abéliens et non-abéliens.

## 7. DÉTERMINANTS $\zeta$ -RÉGULARISÉS ET SOUPES DE BOUCLES

Comme je l'ai expliqué plus tôt, afin de définir le modèle de Yang–Mills–Higgs à partir du modèle scalaire en présence d'un champ magnétique  $A$  *externe*, il est nécessaire de comprendre comment la fonction de partition  $Z_A$  dépend de  $A$ . Cette fonction de partition est, formellement, une puissance du déterminant d'un opérateur laplacien, défini sur un fibré au-dessus d'une variété. Il se trouve qu'on sait définir, en continu, un tel déterminant. Pour cela, on constate d'abord que pour un opérateur hermitien  $A$  en dimension finie, dont on note  $\lambda_i$  les valeurs propres,

$$\det(A) = \exp(-\zeta'_A(0)) \quad \text{où} \quad \zeta_A(s) := \sum_{\lambda_i} \lambda_i^{-s}.$$

Pour un opérateur laplacien  $L$  (avec un trou spectral), la fonction  $\zeta_L$  ainsi définie vaut  $+\infty$  au voisinage de 0 (la somme est grossièrement divergente), mais l'asymptotique de Weyl assure qu'elle est définie sur un demi-plan complexe où elle est analytique. Une expansion asymptotique du noyau de la chaleur permet de montrer qu'elle admet un prolongement méromorphe sur le plan, sans singularité en 0, de sorte qu'en notant encore  $\zeta_L$  cet unique prolongement, on peut définir

$$\det(L) := \exp(-\zeta'_L(0)).$$

Cette généralisation de la notion de déterminant est éprouvée, que ce soit du côté de la physique ou de la géométrie. Elle permet par exemple, comme son équivalent discret, de construire des invariants topologiques de variétés en dimension 3.

Dans un travail joint avec Pierre Perruchaud [4], nous considérons une variété Riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $d = 2$  ou  $d = 3$  compacte, avec ou sans bord, au-dessus de laquelle un fibré vectoriel  $(E, h)$  est fixé, où  $h$  est une métrique sur les fibres. Étant donnée une fonction de masse  $m \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$  sur  $M$  et une connection  $\nabla$  sur  $E$ , compatible avec la métrique, on peut définir un laplacien associé, formellement  $L_\nabla = \frac{1}{2}\nabla^*\nabla + m$ , avec condition au bord de Dirichlet. Notons ici que la convention de signe est telle que les valeurs propres de  $L_\nabla$  sont positives.

Notre résultat principal assure la correction de la représentation de Symanzik, en montrant que le déterminant zeta-régularisé se calcule comme l'espérance d'un produit infini sur une soupe de boucles Browniennes.

**Théorème 8** (P. Perruchaud, I.S.). *Dès lors que le bord de  $M$  est non nul ou que la fonction de masse  $m$  n'est pas identiquement nulle, pour tout  $\alpha > 0$ ,*

$$\frac{\det(L_\nabla)^\alpha}{\det(\Delta)^{\alpha k}} = \mathbb{E}\left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \prod_{\ell \in \mathcal{L}_\delta} \text{tr}(\mathcal{H}ol_\nabla(\ell))\right], \quad (4)$$

où  $k$  est le rang du fibré  $E$ ,  $\mathcal{L}$  est une soupe de boucles Browniennes sur  $M$  d'intensité  $\alpha$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}d^*d + m$  est le demi-Laplacien scalaire usuel sur  $M$ , la trace est normalisée (i.e.  $\text{tr}(\text{Id}) = 1$ ), et  $\mathcal{L}_\delta$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{L}$  des boucles de taille plus grande que  $\delta$ .

Ce résultat s'ancre entre autre dans la suite des travaux de Yves Le Jan, qui donne un résultat similaire dans le cas abélien et aussi dans le cas d'une connection plate, de Thierry Lévy et Adrien Kassel, qui donnent un résultat similaire sur les graphes, ou de travaux de Leonard Gross ou James Norris sur l'expression des noyaux de la chaleur comme moyenne d'holonomie. Sur le plan technique, cet article repose entre autre sur une estimation, dans  $L^p(\Omega)$ , en temps court, sur l'holonomie d'une connection le long d'une boucle Brownienne. Cette estimation peut être obtenue de manière quasiment triviale dans tous les cas précédents, mais est au contraire assez délicate à obtenir dans le cadre général.

Cette expression nous a permis de déduire aisément plusieurs propriétés sur ces déterminants. Par exemple, une inégalité diamagnétique, affirmant que le membre de gauche dans (4) est plus petit que 1, était connue mais difficile et longue à montrer dans la définition initiale du déterminant  $\zeta$ -régularisé, mais devient complètement triviale avec cette formule. Cela nous a également permis de montrer des propriétés fortes de continuité en la connection, qui étaient jusqu'alors inconnues, et qu'on a utilisé dans le même article pour définir rigoureusement le couplage entre un champ libre gaussien vectorielle en interaction minimale avec une connection aléatoire (mais presque sûrement lisse).

## 8. DÉCOMPOSITION DU MOUVEMENT BROWNIEN EN $SLE_2$ ET SOUPE DE BOUCLES

Dans [LW04], G. Lawler et W. Werner conjecture qu'il est possible d'obtenir un mouvement Brownien dans un domaine à partir de la *trace d'un  $SLE_2$* , qui est un chemin simple aléatoire  $\gamma$  dans ce domaine, et d'une soupe de boucles Browniennes  $\mathcal{L}$ , indépendante de  $\gamma$ . Informellement, cette trajectoire Brownienne serait obtenue en suivant  $\gamma$  chronologiquement, mais en faisant un détour pour parcourir les boucles Browniennes chaque fois qu'on en rencontre une pour la première fois. Cette conjecture avait mené à la preuve que la trajectoire Brownienne contient une trajectoire distribuée comme  $\gamma$ . De plus, le résultat était connu *au niveau des ensembles images* : l'image de la trajectoire Brownienne est égale à l'union de l'image de  $\gamma$  et de l'image de toutes les boucles Browniennes rencontrées par  $\gamma$ .

Avec N. Berestycki, nous avons prouvé cette conjecture [5].<sup>15</sup> Pour cela, nous construisons une application  $\Xi$  qui, étant donné un chemin simple et une collection de boucles, renvoie le chemin qui décrit la trajectoire un peu informellement décrite dans [LW04]. Nous définissons alors une topologie sur les configurations déterministes  $(\gamma, \mathcal{L})$ , et exhibons un sous-ensemble de configurations tel qu'on a simultanément les propriétés suivantes :

- ◊ La configuration aléatoire ( $SLE_2$ , soupe Brownienne) appartient presque sûrement au sous-ensemble exhibé.
- ◊ Pour la topologie qu'on définit, l'application  $\Xi$  est continue en tous les points de ce sous-ensemble.
- ◊ Pour la topologie qu'on définit, les équivalents discrets du  $SLE_2$  et de la soupe de boucles Browniennes, définis sur une approximation du domaine *via* un réseau, convergent en distribution lorsque la maille du réseau tend vers 0, vers la configuration aléatoire ( $SLE_2$ , soupe de boucles Browniennes).

Parce que la version discrète du problème se résout avec de la combinatoire, ces propriétés permettent de conclure au problème en utilisant du côté probabiliste quasiment que des résultats déjà connus. En fait, la topologie et le sous-ensemble qu'on construit sont basés sur une analyse *a priori* des objets aléatoires en jeu, de sorte à minimiser les difficultés probabilistes.

En dehors de son intérêt propre, ce travail se place pour moi dans un objectif de recherche de formules pour les déterminants de laplaciens où les boucles Browniennes seraient remplacées par des boucles simples, localement semblables au  $SLE_2$ . Si de telles formules pourraient s'avérer plus difficile à manipuler que leur pendant Brownien dans le cas d'un laplacien associé à une connection lisse, elles pourraient être définies sous des hypothèse de régularité moindre, et en particulier lorsque la connection est distribuée comme sous la mesure de Yang-Mills.

## 9. TCL ET TRANSITION DE PHASE POUR DES MODÈLES DE DIFFUSION RÉFLÉCHIE

*L'article présenté dans cette section est indépendant du reste de mon travail de recherche.*

Considérons le processus aléatoire décrit par l'EDS

$$dX_t = X_t^{-\beta} dt + dW_t, \quad (5)$$

pour  $W$  un mouvement Brownien unidimensionnel, disons en partant de 1 et sur l'évènement où  $X$  reste positif. En regardant le comportement asymptotique de  $X_t$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  et avec des calculs explicites, on peut observer deux transitions de phase : en  $\beta = -1$ , seuil en dessous

<sup>15</sup>. J'ai présenté ici la version *radiale* de la conjecture initialement formulée dans sa version *cordale*, plus difficile à présenter. Nous résolvons les deux versions.

duquel le mécanisme de rétroaction est si fort que le processus diverge en temps fini, comme ce serait le cas sans le terme de bruit, et en  $\beta = 1$ , seuil au delà duquel le terme de bruit prend le pas sur le terme de rétroaction. En plus de ces transitions triviales, on peut observer une transition additionnelle en  $\beta = -\frac{1}{3}$  (ou  $\beta = -\frac{1}{1+\alpha}$ , si on remplaçait  $W$  par un processus  $\alpha$ -stable). Pour constater cette transition, il faut regarder l'expansion asymptotique de  $X_t$  au second ordre : pour  $\beta > -\frac{1}{3}$ , on peut montrer que  $X_t = ct^{\frac{1}{1+\beta}} + \sqrt{t}N_t + O(\sqrt{t})$ , pour  $c$  une constante bien choisie et  $N_t$  une variable gaussienne centrée réduite. En revanche, pour  $\beta < -\frac{1}{3}$ , un tel théorème central limite échoue, et on peut constater que l'erreur  $X_t - ct^{\frac{1}{1+\beta}}$  est alors d'ordre  $t^{\frac{1}{1+\beta}-1}$  (qui est beaucoup plus grand que  $\sqrt{t}$ , justement lorsque  $\beta < -\frac{1}{3}$ ) et cesse d'être gaussienne (on a une perte d'ergodicité : ce terme d'erreur dépend alors des valeurs de  $W_t$  en temps court).

Cette transition n'est pas spécifique à cette équation différentielle stochastique : on doit s'attendre à ce qu'elle ait lieu pour n'importe quel processus qui suit *approximativement* l'équation (5), c'est à dire avec un mécanisme de rétroaction *bien* approximé par  $X_t^{-\beta} dt$  (on veut préserver non seulement le comportement asymptotique de  $X$ , mais aussi son comportement asymptotique au second ordre), et un mécanisme de bruit bien approximé par un bruit blanc.

Dans un travail avec Andrew Wade et Aleksandar Mijatović [10], on considère une large classe de diffusions avec réflexion  $(X, Y)$ , dans un domaine très générique de  $\mathbb{R}^{1+d}$ , délimité par une parabole généralisée,  $\{(x, y) : b(x) = |y|_{\mathbb{R}^d}\}$ , pour une fonction  $b$  telle que  $b(x) \sim x^\beta$  asymptotiquement lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Le paramètre de diffusion, indépendant du temps mais dépendant de la position, est asymptotiquement constant (non dégénéré) à l'infini. Le terme de drift est nul, mais la diffusion est tout de même "poussée", en temps long, dans la direction  $x$ , par un terme de réflexion sur le bord de la parabole, qui n'est pas orthogonal au plan tangent (on parle de diffusion anormale). Dans ce modèle, l'asymptotique au premier ordre de la coordonnée  $x$  est déjà difficile à obtenir. Dans la phase  $\beta \in [-1, 1]$ , sous quelques hypothèses qui restent très générales, on démontre alors la convergence en distribution de la coordonnée  $Y_t$  (une fois remise à l'échelle, c'est à dire divisée par  $b(X_t) \sim ct^{\frac{\beta}{1+\beta}}$ , ainsi qu'un théorème central limite fonctionnel local pour  $(X, Y)$ , et on démontre finalement pour la coordonnée  $X$  que la transition de phase attendue a bien lieu, avec un théorème central limite pour  $\beta > -\frac{1}{3}$  et des fluctuations d'ordre  $t^{\frac{1}{1+\beta}-1}$  pour  $\beta < -\frac{1}{3}$ .

## RÉFÉRENCES

- [CC24] Ajay Chandra and Ilya Chevyrev. Gauge field marginal of an Abelian Higgs model. *Comm. Math. Phys.*, 405(6) :Paper No. 143, 43, 2024.
- [DFO95] Jean Luc Desbois, Cyril Furtlehner, and Stéphane Ouvry. Random magnetic impurities and the landau problem. *Nuclear Physics*, 453 :759–776, 1995.
- [DFO96] Jean Desbois, Cyril Furtlehner, and Stéphane Ouvry. Random Magnetic Impurities and the delta Impurity Problem. *Journal de Physique I*, 6 :641–648, 1996. 13 pages, latex, 1 figure upon request.
- [KL21] Adrien Kassel and Thierry Lévy. Covariant Symanzik identities. *Probab. Math. Phys.*, 2(3) :419–475, 2021.
- [LSG93] Daniel Loss, Herbert Schoeller, and Paul M. Goldbart. Weak-localization effects and conductance fluctuations : Implications of inhomogeneous magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 48 :15218–15236, Nov 1993.
- [LSY15] Niclas Lindvall, Abhay Shivayogimath, and A. Yurgens. Measurements of weak localization of graphene in inhomogeneous magnetic fields. *JETP Letters*, 102 :367–371, 09 2015.
- [LW04] Gregory F. Lawler and Wendelin Werner. The Brownian loop soup. *Probab. Theory Related Fields*, 128(4) :565–588, 2004.
- [RS87] J. Rammer and A. L. Shelankov. Weak localization in inhomogeneous magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 36 :3135–3146, Aug 1987.
- [Sym69] Kurt Symanzik. Euclidean quantum field theory. *Local quantum theory*, pages 152–226, 1969.
- [Wer94a] Wendelin Werner. Rate of explosion of the Amperean area of the planar Brownian loop. In *Séminaire de Probabilités XXVIII*, pages 153–163. Berlin : Springer, 1994.
- [Wer94b] Wendelin Werner. Sur les points autour desquels le mouvement brownien plan tourne beaucoup. *Probab. Theory Related Fields*, 99(1) :111–144, 1994.

## CONTRIBUTIONS

- [1] Isao Sauzedde. Lévy area without approximation. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 58(4) :2165 – 2200, 2022.
- [2] Isao Sauzedde. Brownian windings, stochastic green’s formula and inhomogeneous magnetic impurities, 2025.
- [3] Isao Sauzedde. Renormalised amperean area of brownian motions and symanzik representation of the 2d abelian yang–mills–higgs field, 2024.
- [4] Pierre Perruchaud and Isao Sauzedde. Loop soup representation for zeta-regularised determinants of twisted Laplacians and covariant Symanzik identities. *Ann. Probab.*, 53(6) :2099–2143, 2025.
- [5] Nathanaël Berestycki and Isao Sauzedde. A pathwise loop-erasure of planar brownian motion, 2026. à venir.
- [6] Isao Sauzedde. Planar Brownian motion winds evenly along its trajectory. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 20(2) :1359–1366, 2023.
- [7] Isao Sauzedde. Winding and intersection of brownian motions, 2021. [arXiv:2112.01645](https://arxiv.org/abs/2112.01645).
- [8] Isao Sauzedde. Integration and stochastic integration in gaussian multiplicative chaos, 2021. [arXiv:2105.01232](https://arxiv.org/abs/2105.01232).
- [9] Isao Sauzedde. Holonomy of the planar brownian motion in a poisson punctured plane. *Communications in Mathematical Physics*, 405(6), May 2024.
- [10] Aleksandar Mijatović, Isao Sauzedde, and Andrew Wade. Central limit theorem for superdiffusive reflected Brownian motion. À paraitre chez Annals of Applied Probability, 2024. [arXiv:2412.14267](https://arxiv.org/abs/2412.14267).