Somme de gaussiennes

Isao Sauzedde

02/06/2018

Résumé

Ce document provient d'une réflexion personnelle sur l'existence potentielle d'un invariant topologique obtenu en fixant une métrique et en étudiant une somme de noyaux de la chaleur *fonctionnelle* -par opposition aux résultats de type "théorie de l'indice", qui font intervenir des noyaux de la chaleur agissant sur les formes extérieures. La compensation serait ici jouée par différent temps et pondérations. Si cette réflexion est à ce jour loin d'avoir aboutie, il en est sorti un sujet d'oral blanc donné à quelques élèves de PC* au lycée Blaise Pascal à Clermont-Ferrand. Je remercie Martin Pépin pour l'aide qu'il m'a apporté, même s'il ne saurait être tenu pour responsable des erreurs commises, ni de mon orthographe douteuse. La présentation est restée celle d'un exercice résolu, et la version actuelle est complétement inaboutie . Ce document est libre d'utilisation, mais je serais ravi de son utilisation : n'hésitez donc pas à m'en tenir informé ! Toute remarque ou demande de clarification est également le bienvenue, ainsi que tout matériel supplémentaire (une simulation est par exemple la bienvenue ;)).

Soit $(\lambda_k)_{k\leq n}$ une famille de nombres réelles (n est fixé). On s'intérese aux fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda_k x^2}$$

au voisinage de $x = 0$.

Question 1 : trouver l optimal tel qu'il existe des coefficients $\alpha_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $f(x) = O(x^l)$? Cela depend-t'il des coefficients λ_i ?

On suppose maintenant $\lambda_k = \lambda^k$. On a donc des coefficients λ_k tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda^k x^2} = O(x^{l(n)})$$

(avec $l(n)$ qu'on a trouvé à la question précédente), mais les coefficients α_k dépendent également de n

Question 2 : existe-t'il des coefficients $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (non tous nuls) tels que pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{2^n} \alpha_k e^{-\lambda^k x^2} = O(x^{l(n)}) \ ?$$

attention : on a bien ici une somme qui va jusqu'à 2^n, et on cherche seulement à avoir un $O(x^{l(n)})$.

Question 3 : que peut-on dire quand $n \to \infty$?

On attend pas ici une étude exhaustive. L'étude pour certains λ est suffisante (on justifiera cependant pourquoi on choisit de telles conditions). Cette question est plus libre, et donnera plus lieu à une discussion (qui pourra aboutir sur de nombreuses questions). La résolution des questions précédentes sera déjà considérée très satisfaisante.

Il y a beaucoup d' extensions possibles.

D'une part, on peut étudier les $\alpha_{k,n}$ obtenu par la première question (mais pour $\lambda_k = \lambda^k$), et étudier la limite quand le nombre de terme n tend vers l'infini (avec une normalisation appropriée, par exemple $\alpha_{0,n} = 1$. On pourra aussi étudier les $\alpha_{n-k,n}$).

D'autre part, on peut s'interroger sur une "version continue", c'est à dire à $\int_1^\infty \alpha(\xi) e^{-\lambda^\xi x^2} d\xi$.

Enfin, on peut se poser des questions sur le cas du cercle (i.e. on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $e^{-\lambda x^2}$ par $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x-k)^2}$), ou sur le cas multidimensionnel (qui est plus creux). A un autre niveau -et c'est en fait ce qui motivait cette exercice- on peut s'interroger sur le cas d'un groupe de Lie voir d'une variété riemannienne quelconque. Je suis très intéressé par tout résultat dans ce cadre, n'hésitez pas à me contacter !

Solution :

On a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{(-x^2)^j}{j!} \lambda_k^j + o(x^{2(m-1)})$$

Pour que $f(x) = o(x^{2(m-1)})$, il est nécessaire d'annuler la somme à droite sur un voisinage de 0, et donc d'avoir

$$\forall j \in [|0; m-1|], \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k^j = 0$$

C'est maintenant un problème d'algèbre linéaire : la condition est vérifiée si est seulement si le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ annule la matrice

$$M(m) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_n^{m-1} \end{pmatrix}$$

Pour $n = m$, on a une matrice de Vandermonde, dont on connait le determinant. En particulier, il est non nul si est seulement si les coefficients λ_i sont tous deux à deux différents.

Dans le cas où il existe $i \neq j$ tels que $\lambda_i = \lambda_j$, on peut prendre $\alpha_i = -\alpha_j$ et tous les autres α_k nuls : on a alors $f = 0$, qui est bien sûr un $O(x^m)$ pour tous m.

Dans le cas où les coefficients λ_i sont tous deux à deux différents, puisque le determinant est non nul, il n'existe pas de vecteur α non nul qui annule M, et il n'est donc pas possible d'avoir $f(x) = o(x^{2(n-1)})$ (en particulier, il n'est pas possible d'avoir $f(x) = O(x^k)$ pour $k > 2(n-1)$).

Il est cependant toujours possible de choisir les coefficients α_i tels que $f(x) = O(x^{2(n-1)})$: on avait en fait

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{(-x^2)^j}{j!} \lambda_k^j + O(x^{2m})$$

et montrer que $f(x) = O(x^{2(n-1)})$ revient donc à avoir α qui annule $M(m-1)$. C'est par exemple le cas si α vérifie $M(m)\alpha = {}^t(0, \dots, 0, 1)$. Ceci est toujours possible, puisque comme on l'a dit $M(m)$ est de déterminant non nul, donc inversible : $\alpha := M^{-1t}(0, \dots, 0, 1)$ convient (de plus, toute solution α est un multiple de celle-ci).

La réponse est donc $l \leq 2(n-1)$ si les coefficients sont deux à deux différents, et l quelconque sinon.

Question 2 :

On cherche une solution de la manière suivante : on suppose qu'on a construit $\alpha_0; \dots; \alpha_{2^n-1}$ tels que

$$\forall j < n, \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \lambda^{ij} = 0 \tag{1}$$

Comme ce résultat est invariant par multiplication de tous les coefficients par une même constante, on peut suppoer $\alpha_0 = 1$. Par exemple pour $n = 1$, on prend $\alpha_1 = -\alpha_0 = -1$.

On essaye alors de construire $\alpha_{2^n}; \dots; \alpha_{2^{n+1}-1}$ tels que les équations 1 sont vérifiées pour $j < n+1$.

On construit une telle solution de la manière suivante : On pose $\alpha_{2^n+i} := \mu\alpha_i$ (pour $0 \leq i < 2^n$) pour un $\mu_n \in \mathbb{C}$ qu'on fixera plus tard. On vérifie alors directement que les équations 1 sont vérifiées pour $j < n$. En effet, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} \alpha_i \lambda^{ij} &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \lambda^{ij} + \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \mu_n \alpha_i \lambda^{ij} \\ &= (1 + \mu_n \lambda^{2^n j}) \times \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \lambda^{ij} \\ &= (1 + \mu_n \lambda^{2^{nj}}) \times 0 \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à vérifier l'équation pour $j = n$, ce qui se fait en choisissant la valeur de μ :

Si on prend $\mu_n := -\lambda^{-2^n n}$, la factorisation

$$\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} \alpha_i \lambda^{in} = (1 + \mu_n \lambda^{2^n n}) \times \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \lambda^{in}$$

montre que le terme de gauche est nul. La suite infinie $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ vérifie alors les équations désirées pour tout n.

Pour la question 3, la question la plus naturelle est certainement celle des convergences de la série.

On commence pour traiter cette question par exprimer explicitement les coefficients α_k : soit $\epsilon_0(k); \dots \epsilon_{\lceil \log(k) \rceil -1}(k) \in \{0; 1\}$ tels que $k = \sum_{i=0}^{\lceil \log(k) \rceil -1} \epsilon_i 2^i$ (c'est l'écriture de k en binaire). On vérifie alors (récurrence) que $\alpha_k = \prod_{i/\epsilon_i=1} \left(-\lambda^{-i2^i}\right)$.

Le comportement des α_k est très différent selon l'ordre entre $|\lambda|$ et 1 : Pour $|\lambda| > 1$, quand $k \to \infty$, $log(|\alpha_k|) = O(klogk)$. Les α_k décroissent très vite vers 0 -plus vite que toute exponentielle par exemple, mais tout de même bien moins vite que toute fonction de la forme $e^{-\epsilon|\lambda|^k}$. Au contraire lorsque $|\lambda| < 1$, les coefficients deviennent arbitrairement grands, (mais en restant bien plus petit que $e^{\epsilon|\lambda|^k}$). On distingue 4 cas (les cas limites ne sont pas traités) :

-si $\lambda < -1$, la série diverge grossièrement en tout $x \neq 0$. On pourrait se questionner sur une convergence plus faible, celle de la suite de fonctions $f_n(x) = \sum_{n=0}^{2^n} \alpha_k e^{-\lambda^k x^2}$ par exemple. Il faudrait certe une compensation exceptionnelle entre les coefficients pour qu'une telle convergence ait lieu, mais ce n'est pas impossible étant donné qu'on a construit ces coefficients pour qu'ils se compensent bien. Il serait peut-être raisonnable de faire une simulation numérique pour "avoir une idée du résultat" avant d'essayer le prouver.

-Pour $-1 < \lambda < 0$, c'est encore pire : les coefficients α_k divergent, ainsi que le terme gaussien. La série diverge grossièrement, même en $x = 0$.

-Lorsque $0 < \lambda < 1$, la série converge uniformément sur tout segment ne contenant pas 0. Cependant, elle diverge grossièrement en $x = 0$.

-Finalement pour $\lambda > 1$, la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

La deuxième question naturelle intervient dans ce dernier cas : Soit

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-\lambda^k x^2}$$

A-t'on alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(x) \underset{x \to 0}{=} O(x^k) \text{ ?}$$

Pour cela, on vérifie déjà que $f(0) = 0$ (car en particulier $f(0) = lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n} \alpha_k e^{-\lambda^k \times 0^2} = 0$. En vérifie ensuite qu'on peut dériver terme à terme une quantité arbitraire de fois, et que les dérivées successives sont nulles. Cela permet de conclure.