

LICENCE SCIENCES DE LA MATIÈRE  
École Normale Supérieure de Lyon  
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2016-2017  
Jules COLAS  
Licence de Physique

---

# Approches variationnelles pour l'analyse de signaux de friction

---

**Résumé :** *Ce rapport présente un travail de deux mois réalisé au Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon sur le débruitage de signaux expérimentaux de friction à l'aide de méthodes de traitement de signal basées sur des approches variationnelles. Le travail effectué s'est décomposé en deux parties : tout d'abord, une partie expérimentale avec l'acquisition de signaux dans le cas de la friction papier-papier et la simulation de signaux à partir d'un modèle de friction simple ; ensuite le coeur du stage a été l'analyse de ces différents signaux par de nombreuses méthodes basées sur des approches variationnelles ainsi que leurs comparaison. Nous montrons dans ce rapport que ces méthodes offrent de meilleures performances sur l'estimation des grandeurs dynamiques que la méthode préalablement employée. Le débruitage par dictionnaire semble prometteur et ouvre ainsi des pistes pour la poursuite de cette étude.*

**Mots clefs :** *friction solide, collé-glissé, approche variationnelle, orthogonal matching pursuit, débruitage, dictionnaire*

Stage encadré par :

**Nelly PUSTELNIK | Valérie VIDAL**

[nelly.pustelnik@ens-lyon.fr](mailto:nelly.pustelnik@ens-lyon.fr) | [valerie.vidal@ens-lyon.fr](mailto:valerie.vidal@ens-lyon.fr)

Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672), ENS de Lyon

46, allée d'Italie F-69364 LYON CEDEX 07, FRANCE

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/>



31 Juillet 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Description physique du système</b>	<b>4</b>
2.1	L'instabilité de collé-glissé . . . . .	4
2.2	Dispositif expérimental . . . . .	4
2.3	Modélisation du dispositif . . . . .	5
2.3.1	Equations du mouvement et temps caractéristiques . . . . .	6
2.3.2	Simulation numérique . . . . .	7
2.4	Les signaux . . . . .	7
2.4.1	Motivations/ Comparaison théorie expérience . . . . .	7
2.4.2	Régime inertiel . . . . .	7
2.4.3	Glissement continu . . . . .	7
2.4.4	Transitions et caractérisation . . . . .	8
2.4.5	Dualité déflexion/position . . . . .	8
2.4.6	Grandeurs d'intérêts . . . . .	8
2.5	Bilan . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Débruitage et comparaison des méthodes</b>	<b>9</b>
3.1	Introduction . . . . .	9
3.2	Approche variationnelle pour le débruitage . . . . .	9
3.3	Interprétation Bayésienne . . . . .	10
3.4	Variantes avec la pseudo-norme $\ell_0$ . . . . .	11
3.4.1	Modèle de Potts . . . . .	11
3.4.2	Méthode par dictionnaire . . . . .	11
3.5	Mesure de l'erreur de débruitage . . . . .	11
3.6	Constant par morceaux sur la position ( $u = X$ ) . . . . .	11
3.7	Linéaire par morceaux ( $u = X$ ou $u = F$ ) . . . . .	12
3.8	Estimation lisse ( $u = X$ et $u = F$ ) . . . . .	14
3.8.1	Pour $p = 2$ , norme $\ell_2$ sur les données avec $u = X$ et $u = F$ . . . . .	14
3.8.2	Pour $p = 1$ , norme $\ell_1$ sur les données avec $u = X$ et $u = F$ . . . . .	15
3.9	Orthogonal Matching Pursuit - DCT . . . . .	16
3.10	Synthèse globale . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Résultats Physiques</b>	<b>18</b>
4.1	Performance de débruitage . . . . .	18
4.1.1	Débruitage . . . . .	18
4.2	Analyse dynamique . . . . .	19
4.3	Analyses statistiques . . . . .	20
4.4	Etude des corrélations et des effets mémoire . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>22</b>

## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement mes maîtres de stage,

**Nelly Pustelnik** pour le partage de son expertise dans le domaine du traitement du signal, son soutien durant les différentes étapes de ce stage, de mon accueil au laboratoire à la rédaction de ce rapport.

**Valérie Vidal** pour sa disponibilité, son aide précieuse par rapport au différents choix expérimentaux, les différents conseils qu'elle a pu m'apporter ainsi que pour le partage de son expérience dans le milieu de la friction et des granulaires.

Je remercie également mes co-encadrants ,

**Patrice Abry** qui m'a appris à être plus rigoureux et méthodique dans la présentation de résultats et dans le travail de recherche. Je le remercie aussi pour tous ces conseils et explications en traitement de signal.

**Jean-Christophe Géminard** pour nos discussions sur la physique et ses points de vue toujours pertinents.

Finalement, je souhaite remercier **Cristobal Oliver**, doctorant originaire du Chili, qui m'a aidé à prendre en main le dispositif expérimental et effectué des mesures pendant des jours pour me permettre d'avoir des signaux à analyser. Il m'a aussi appris mes premiers mots d'espagnol, gracias.

# 1 Introduction

Présente dans les symphonies de Mozart, le ruban adhésif ou encore la tectonique des plaques, l'instabilité dynamique de collé-glissé survient lorsque sont mises en opposition une force de friction et une force élastique. L'étude et la caractérisation précise de ce phénomène présente un véritable intérêt pour sa compréhension. Les enjeux sont divers : ruban adhésif toujours collant, anticipation de séisme, systèmes de freinage, et bien d'autres. C'est pourquoi de nombreuses études expérimentales ont été réalisées [8] mais sans expliciter le traitement des signaux de friction, menant à des résultats parfois non physiques ou peu précis. C'est ici que se trouve l'intérêt de ce rapport qui regroupe un travail de deux mois sur le débruitage et l'analyse des signaux de friction, principalement de collé-glissé, dans le but d'améliorer la caractérisation de ce phénomène et sa compréhension. Nous discuterons d'abord de la physique du système à travers un modèle théorique simple et une simulation. Puis, nous aborderons des méthodes de débruitages basées sur une approche variationnelle et les comparerons sur des signaux simulés. Enfin nous montrerons les résultats obtenus sur les signaux expérimentaux pour les trois méthodes les plus pertinentes.

## 2 Description physique du système

### 2.1 L'instabilité de collé-glissé

La modélisation des phénomènes de friction mis en jeu dans les phénomènes physiques (séismes par exemple) est usuellement réalisée avec un système masse-ressort comme présenté Figure 1. Ce système modèle simple possède trois paramètres externes, la masse du patin  $m$ , la raideur du ressort (système élastique)  $k$  et la vitesse de traction  $v$ . Pour des paramètres  $\{m, k, v\}$  donnés on observe un mouvement saccadé du patin qui alterne phase d'arrêt et phase de glissement.

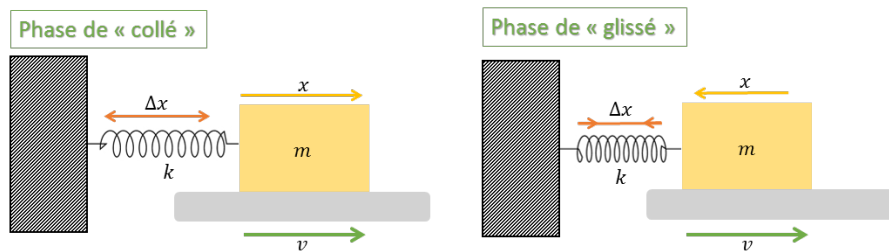


FIGURE 1 – Schéma d'un dispositif classiquement étudié pour étudier le phénomène d'instabilité de collé-glissé. Durant la phase de collé (à gauche) le patin jaune est immobile par rapport au substrat, le ressort se tend, le système se charge en énergie potentielle élastique. Au delà d'un seuil de friction statique le patin relaxe son énergie en glissant, le ressort se rétracte et la masse finit par s'arrêter et entame une nouvelle phase de collé.

Les équations du mouvement de Newton et le modèle de friction d'Amontou Coulomb permettent de formuler une solution analytique pour la dynamique du système en collé-glissé (voir Section 2.3.1). Expérimentalement on remarque que le collé-glissé n'est présent que pour certaines valeurs des paramètres  $\{m, k, v\}$ .

### 2.2 Dispositif expérimental

L'expérience réalisée pour l'étude de la friction (schématisé Figure 2) se fonde sur le même principe de système masse-ressort mais en revisitant la mesure de force. En guise de ressort nous utilisons une lame métallique déformable. Le contact ponctuel est assuré par une bille en métal sur le patin et la déflexion de la lame est mesurée en volts au moyen d'un capteur inductif.

La traction du patin se fait à vitesse constante  $v$  à l'aide d'une platine de translation. L'acquisition est supervisée depuis un programme LabView. L'intérêt de ce dispositif est d'avoir la possibilité de tracter le patin sur une longue distance (plusieurs centimètres) pour avoir de nombreux événements de collé-glissé dans l'optique de réaliser des mesures statistiques. L'utilisation d'une lame-ressort plutôt que d'un ressort classique est aussi intéressant car il devient possible de changer la raideur facilement en variant le point d'application de la force  $\vec{F}$  sur le patin. La lame-ressort permet l'utilisation d'un capteur inductif, offrant une précision sur la déflexion de moins d'un micron.

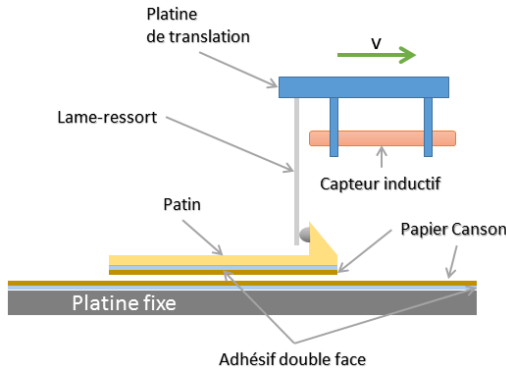


FIGURE 2 – Schéma du dispositif expérimental. La platine de translation (en bleu) est déplacée à vitesse constante  $v$  par rapport au substrat (platine fixe). Du papier Canson (papier à dessin cartonné) est collé à l'aide d'un adhésif double-face à la fois sur le substrat fixe et sur le dessous du patin. Le contact ponctuel entre la lame-ressort et le patin est assurée par une bille.

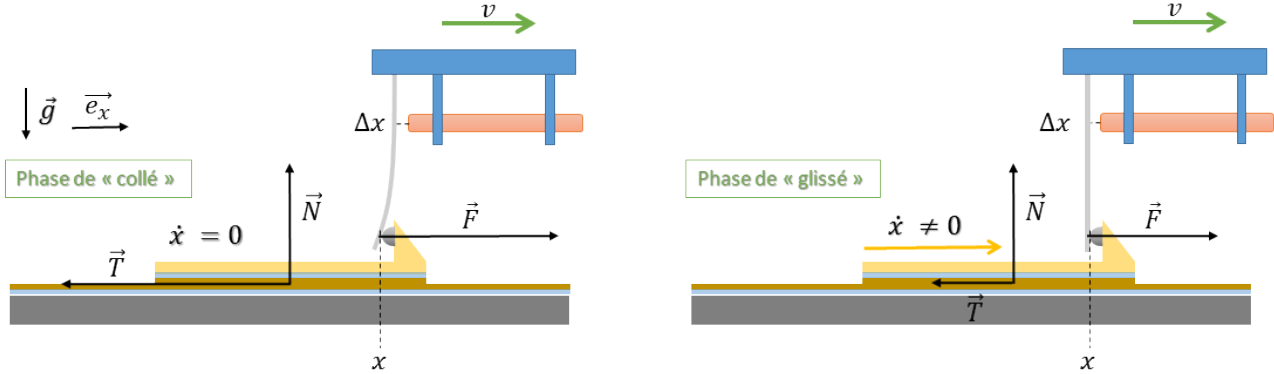


FIGURE 3 – Modélisation des forces agissant sur le système.  $v$  est la vitesse de traction (constante),  $N$  représente la réaction du patin sur le support due à son propre poids,  $T$  la réaction tangentielle aussi appelée force de friction,  $F$  la force de traction proportionnelle à  $\Delta x$  la déflexion de la lame par rapport à sa position d'équilibre et  $x$  la position du patin qui sera prise au point d'application de  $F$  pour simplifier les calculs

### 2.3 Modélisation du dispositif

Nous allons décomposer l'étude du mouvement en trois phases et déterminer les équations du mouvement du système présenté Figure 3 ainsi que les temps caractéristiques nécessaires pour la génération de signaux théoriques. Nous nous appuyerons sur un modèle simple de description de la friction : les lois de Coulomb. Les temps caractéristiques de l'instabilité de collé-glissé sont les suivants :  $t_1$  est le temps à partir duquel le patin se met en mouvement alors qu'il était à l'arrêt. Le temps  $t_2 = t_1 + t_{\text{glissement}}$  correspond à l'instant où le patin s'arrête après avoir glissé pendant une durée  $t_{\text{glissement}}$ . En enfin le temps  $t_3 = t_2 + t_{\text{collé}}$  où  $t_{\text{collé}}$  est la durée de la phase d'arrêt du patin après une première mise en mouvement.

Pour l'étude du système nous considérons que le patin (en jaune) est toujours en contact avec le substrat. Ainsi la force normale  $\vec{N}$  correspondant à la réaction du substrat s'exprime comme  $\vec{N} = N\vec{e}_g = mg\vec{e}_g$ . Le modèle de friction considéré fait intervenir deux coefficients sans dimension, un coefficient de friction statique  $\mu_s$  et un coefficient de friction dynamique  $\mu_d$  censés caractériser le contact entre les matériaux mis en jeu. Ils interviennent dans l'expression de la force de friction  $\vec{T} = T\vec{e}_x$  :

- le patin est à l'arrêt tant que

$$T > \mu_s N$$

- quand le patin glisse

$$T = \mu_d N$$

**Conditions initiales** : au temps  $t = 0$ , le patin se trouve en  $x = 0$  et l'élongation du ressort est nulle par rapport à sa longueur au repos, ainsi la force de traction  $\vec{F}$  est nulle à l'instant initial.

### 2.3.1 Equations du mouvement et temps caractéristiques

#### Première phase de collé :

Quand le patin est à l'arrêt, les équations du mouvement de Newton s'expriment comme :  $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N} = 0$ . En projetant sur l'axe de traction ( $\vec{e}_x$  Figure 3) on obtient la condition d'accroche du patin  $F = kv t < \mu_s mg$ . De cette relation on tire le temps de glissement  $t_1$  :

$$t_1 = \frac{\mu_s mg}{kv} \quad (1)$$

Durant cette phase la position du patin et la force de traction s'expriment :

$$x(t < t_1) = 0 \text{ et } F(t < t_1) = kv t \quad (2)$$

#### Phases de glissé :

Lorsque le patin glisse, les équations de Newton donnent  $m\ddot{x} = k(vt - x) - \mu_d mg$ . De cette relation on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}vt - \mu_d g \quad (3)$$

Pour trouver la solution on pose  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et on définit la phase  $\varphi$  au temps  $t_1$  :

$$x(t) = A \cos(\omega(t - t_1) + \varphi) + vt - \frac{\mu_d mg}{k} \quad (4)$$

Les conditions initiales  $x(t_1) = 0 = \dot{x}(t_1)$  donnent  $A \cos(\varphi) = \frac{\mu_d mg}{k} - vt_1 = \frac{(\mu_d - \mu_s)g}{\omega^2}$  et  $A\omega \sin(\varphi) = v$ . On obtient alors une expression pour  $\varphi$  et  $A$  :

$$\tan(\varphi) = \frac{v\omega}{(\mu_d - \mu_s)g} \text{ et } A^2 = \left( \frac{(\mu_d - \mu_s)g}{\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{v}{\omega} \right)^2$$

Durant cette phase de glissement la force de traction de la lame-ressort s'écrit :

$$F(t > t_1) = k\Delta x = \mu_d mg + kA \cos(\omega(t - t_1) + \varphi) \quad (5)$$

#### Phases de collé :

Comme  $A\omega = \frac{v}{\sin(\varphi)} \geq v$ ,  $\dot{x}$  finira par s'annuler à l'instant  $t_2$  on aura alors  $T(t_2) = F(t_2)$  où

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \frac{v}{A\omega} \right) - \varphi \right] \quad (6)$$

On a  $t_1 \neq t_2$  et la première solution possible donne  $\arcsin \left( \frac{v}{A\omega} \right) = \pi - \varphi$ . La position du patin au temps  $t_2$  s'écrit alors :

$$x(t_2 = t_1 + \frac{\pi - 2\varphi}{\omega}) = -A \cos(\varphi) + vt_2 - \frac{\mu_d mg}{k} \quad (7)$$

et la force  $F(t_2) = (2\mu_d - \mu_s)mg$ . La masse est immobile tant que la réaction tangentielle (la force de friction) est supérieure en norme à la force de traction du ressort. La phase de glissement se fait au temps  $t_3$  tel que :

$$t_3 = t_2 + 2 \frac{\mu_s - \mu_d}{kv} mg \quad (8)$$

**Remarque :** le modèle sous-tend la connaissance de  $\mu_s$  et  $\mu_d$  supposés constants. Or dans notre expérience nous ne connaissons pas ces coefficients. C'est pourquoi il est intéressant de considérer un coefficient de friction effectif mesurable expérimentalement  $\mu_{\text{eff}}$  à partir de l'Equation (3) tel que :

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\omega^2 \Delta x - \ddot{x}}{g} \quad (9)$$

Usuellement représenté en fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$ , la forme théorique attendue est montrée Figure 4 (c) sur le diagramme force vitesse. Ce diagramme est obtenu en définissant la force de friction  $T = \mu_{\text{eff}} mg$  que l'on adimensionne par le poids  $mg$  puis que l'on représente en fonction de la vitesse du patin dans le référentiel du laboratoire.

### 2.3.2 Simulation numérique

Pour vérifier le modèle simple présenté à la Section (2.3.1), nous avons implémenté ces équations sous forme numérique pour obtenir des simulations de signaux de force de traction et de position du patin (Figure 4 (a),(b)). A partir de la force de traction et de la position du patin il est possible de représenter la force de friction  $\mu_{\text{eff}}mg$  en fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$  (diagramme force vitesse) pour obtenir l'évolution du coefficient de friction effectif défini Equation (9).

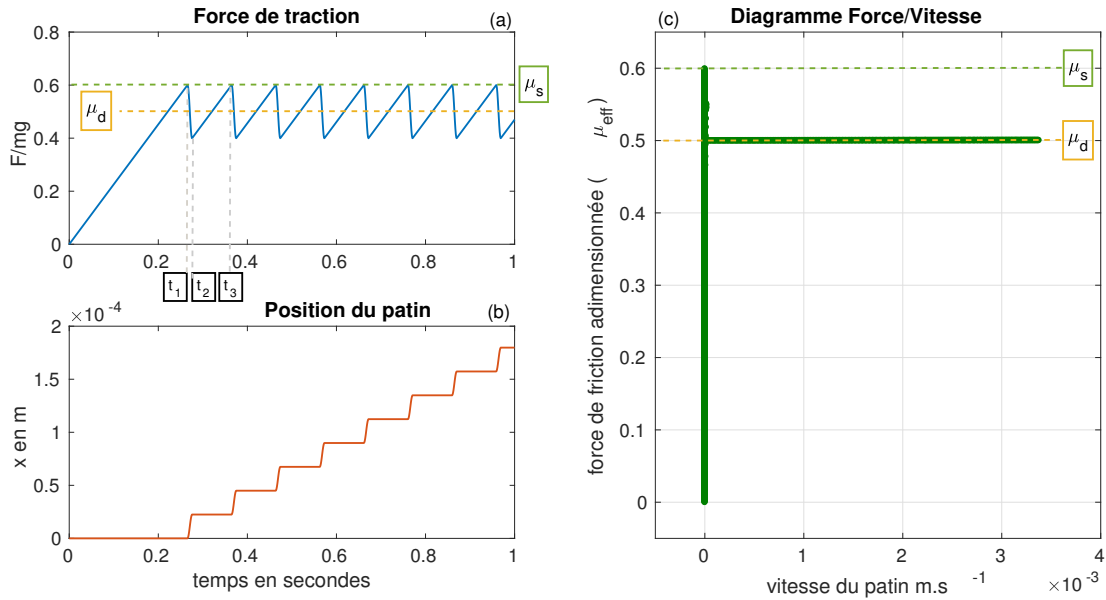


FIGURE 4 – Force de traction (a), position du patin (b) et diagramme force-vitesse ( $\mu_{\text{eff}}(\dot{x})$ ) (c) obtenus à partir de signaux simulés dans une phase de collé-glissé. Paramètres de la simulation :  $v = 227 \mu\text{m.s}^{-1}$  |  $m = 3 g$  |  $k = 293 \text{ N.m}^{-1}$  |  $\mu_s = 0.6$  |  $\mu_d = 0.5$ .

## 2.4 Les signaux

### 2.4.1 Motivations/ Comparaison théorie expérience

L'objectif de l'analyse des signaux de friction est d'extraire des informations physiques difficiles d'accès (rapport signal sur bruit faible, signaux difficiles à caractériser).

Là où la simulation prédit des signaux très réguliers, en pratique les coefficients de friction sont variables et les signaux de collé-glissé beaucoup moins réguliers (Figure 5 en bleu à droite). Ce qui rend les analyses souvent délicates à mener car dépendantes de la qualité des signaux expérimentaux.

De plus, on observe d'autres dynamique que le collé-glissé sur les signaux expérimentaux et les simulations (Figure 5).

### 2.4.2 Régime inertiel

En augmentant l'inertie du patin au moyen de  $v$  ou  $k$  pour une masse fixée on observe un régime dans lequel il n'y a plus de phase d'arrêt. Le patin est entraîné par sa propre inertie et présente ainsi une dynamique de friction totalement différente (Figure 5 en vert).

### 2.4.3 Glissement continu

Une autre dynamique intervient lorsque la raideur du ressort ou la vitesse de traction deviennent très grands. La force de rappel du ressort sur l'axe de traction s'exprimant comme  $F = kvt$ , elle devient si énorme que le patin n'a pas d'autres possibilités que de se déplacer à la vitesse de traction  $v$  car la force de friction devient négligeable devant  $F$  (Figure 5 en rouge). Le glissement continu n'est pas prédit par notre modèle théorique.

### 2.4.4 Transitions et caractérisation

En fait les différentes dynamique de friction du patin (régime de collé-glissé/inertiel/glissement continu) sont encore mal comprises et la transition d'un régime à l'autre font l'objet de recherches actives [5]. A terme le travail présenté par la suite a pour objectif d'apporter des solutions pour la caractérisation et l'analyse des différentes transitions pour vérifier notamment des travaux de simulation [4].

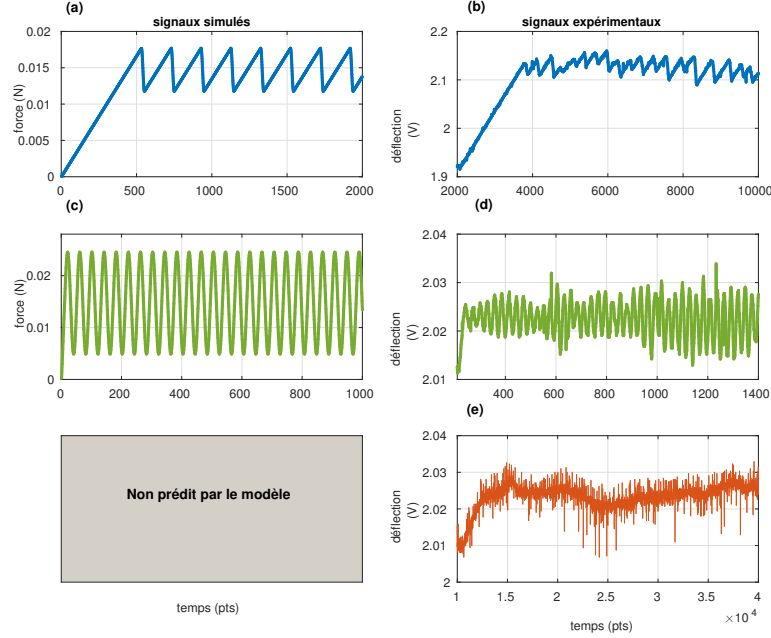


FIGURE 5 – Comparaison des allures des signaux issus du modèle décrit Section 2.3.1 (gauche) et de l'expérience (droite). On retrouve le régime de collé glissé (bleu) et le régime inertiel (vert). Le régime de glissement continu (en rouge) correspond a une grande raideur de ressort, le système n'a pas d'autre choix que de se déplacer à la vitesse de traction (non prédit par le modèle).

### 2.4.5 Dualité déflexion/position

Le seul signal issu du dispositif expérimental est le signal de déflexion de la lame qui se convertit, après calibration, en force de traction en Newton. De ce signal on peut extraire la position du patin en utilisant des informations à priori comme la vitesse de traction ou la distance de déplacement totale. Soit  $F$  notre signal de force, on obtient la position  $X$  du patin par la formule suivante, pour chaque élément d'indice  $n$  de  $F$  et  $t$  notre vecteur temps :

$$X_n = v \left( t_n - \frac{F_n - \mu_d mg}{kv} \right) \quad (10)$$

Nous obtenons alors nos deux signaux d'étude  $F$  et  $X$ .

### 2.4.6 Grandeurs d'intérêts

Les grandeurs intéressantes pour l'étude du système sont la position  $x$ , la vitesse  $\dot{x}$  et l'accélération  $\ddot{x}$  du patin qui interviennent aussi dans l'expression du coefficient de friction effectif défini par l'Equation 9.

Ces grandeurs sont contenues dans les deux signaux  $X$  et  $F$ , pour  $X$  cette proposition est triviale car  $X = x$ , pour  $F$  en revanche on obtient les équations suivante :

$$F = k\Delta x(t) = k(vt - x(t)) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \dot{F} = k\Delta \dot{x} = k(v - \dot{x}) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \ddot{F} = -k\ddot{x} \quad (13)$$

Le coefficient de friction effectif s'exprime quant à lui par les signaux de force de traction  $F$  et de position du patin  $X$  de la manière suivante :

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\omega^2 \left( \frac{F}{k} \right) - \ddot{X}}{g} = \frac{\omega^2 F + \ddot{F}}{kg} \quad (14)$$



## 2.5 Bilan

La dynamique d'un système en friction est complexe et dépend de nombreux paramètres parfois difficiles à estimer, le dispositif expérimental utilisé (Figure 2) et les simulations (Figure 4) nous permettent d'acquérir des signaux expérimentaux et de générer des signaux théoriques pour mettre à l'épreuve les différentes méthodes de débruitage par approche variationnelle présentées dans la section suivante.

## 3 Débruitage et comparaison des méthodes

### 3.1 Introduction

Pour obtenir les grandeurs physiques pertinentes jusqu'alors inaccessibles à l'aide de traitements plus standards, une première phase de ce travail consiste à évaluer le comportement des différents traitements sur des signaux simulés bruités de manière à reproduire au mieux les signaux expérimentaux. Les signaux synthétiques, notés  $y$ , sont obtenus à partir des signaux théoriques (Figure 4), notés  $\bar{u}$  où  $\bar{u} \in \{F, X\}$ , sur lesquels on applique un bruit additif :  $\underbrace{y}_{\text{mesure}} = \underbrace{\bar{u}}_{\text{signal}} + \underbrace{\epsilon}_{\text{bruit}}$  où  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq N}$  et  $\bar{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont des signaux de taille  $N$ .

Sur la Figure 6, nous représentons trois types de bruits rencontrés usuellement à savoir un bruit blanc gaussien de distribution :

$$f(y|u, \sigma) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(u_i - y_i)^2}{2\sigma^2}} \quad (15)$$

Un bruit laplacien, qui présente l'intérêt de présenter un caractère plus impulsionnel à l'instar des signaux expérimentaux :

$$f(y|u, b) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{2b} e^{-\frac{|u_i - y_i|}{b}} \quad (16)$$

Un bruit de Pareto généralisé :

$$f(y|u, \sigma, \theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\theta}{\sigma}(y_i - u_i)\right)^{-1 - \frac{1}{\theta}} \quad (17)$$

Ce dernier reproduit de manière convaincante le bruit expérimental présenté dans la Figure 6.

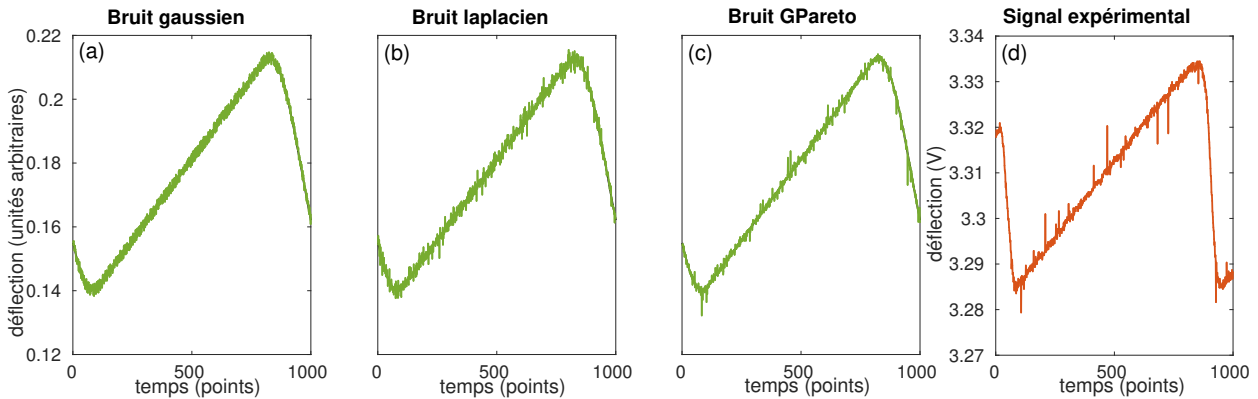


FIGURE 6 – Comparaison des différents bruits explorés pour reproduire les signaux expérimentaux (d), Un bruit blanc gaussien qui est trop uniforme (a), Un bruit laplacien qui permet d'augmenter l'aspect impulsionnel (b), et un bruit generalized Pareto (c) qui permet une bonne approximation du signal expérimental

L'enjeu du traitement mis en œuvre sera d'obtenir  $\bar{u}$  à partir de la seule connaissance de  $y$ .

### 3.2 Approche variationnelle pour le débruitage

La classe de méthodes explorée pour le débruitage des signaux et l'extraction des grandeurs physiques pertinentes repose sur la minimisation d'une fonctionnelle faisant intervenir un terme d'attache aux données qui préserve l'information contenue dans le signal et un terme de régularisation qui va contraindre la forme de la solution

recherchée. La pondération relative de ces grandeurs est guidée par un paramètre de régularisation  $\lambda$  dont le choix sera discuté dans notre étude.

$$\hat{u}_\lambda = \arg \min_u \underbrace{\frac{1}{2} \|u - y\|_p^p}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\lambda \|Lu\|_n^n}_{\text{régularisation}} \quad \text{où } p \geq 1 \text{ et } n \geq 1 \quad (18)$$

Le terme d'attache aux données est une norme  $\ell_p$ , définie comme

$$\|u\|_p^p = \sum_i |u_i|^p$$

permettant de pénaliser les différences entre  $y$  et la solution souhaitée. Des choix usuels pour  $p$  sont  $p = \{1, 2\}$ . Le terme de régularisation fait intervenir un opérateur  $L$  souvent un opérateur de différence d'ordre un ou deux (suivant si l'on cherche à imposer une régularité au signal ou sa dérivée). Un choix de  $n = 2$  permettra de favoriser des solutions lisses quant un choix de  $n = 1$  favorisera des solutions constantes ou linéaires par morceaux. Pour  $n$  et  $p \geq 1$ , ce critère est convexe mais peut être non-lisse, on se référera à [3] pour des algorithmes efficaces en grande dimension pour estimer  $\hat{u}_\lambda$ .

### 3.3 Interprétation Bayésienne

Pour guider dans le choix de  $p$ ,  $n$  et  $L$ , on peut avoir recours à l'interprétation Bayésienne [7]. Pour cela nous supposons que notre signal observé  $y$  et le signal d'intérêt  $\bar{u}$  sont des réalisations de vecteurs aléatoires  $Y$  et  $\bar{U}$ . L'objectif de la minimisation est de trouver l'estimateur  $\hat{u}$  qui maximise la distribution *a posteriori*  $f(u|y)$ . Le théorème de Bayes nous permet d'écrire :

$$\hat{u} \in \arg \max_u f(u|y) \Leftrightarrow \hat{u} \in \arg \max_u f(y|u) \frac{f(u)}{f(y)} \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \hat{u} \in \arg \max_u f(y|u)f(u) \quad (20)$$

Cette maximisation est équivalente à minimiser l'expression

$$\hat{u} \in \arg \min_u (-\log(f(y|u)) - \log(f(u))) \quad (21)$$

On retrouve alors une formulation proche de notre problème de départ avec un terme  $-\log(f(y|u))$  qui correspond à un terme de similitude par rapport aux données, nommé vraisemblance, et dépend donc du modèle de dégradation considéré. Le deuxième correspond à un terme d'*a priori*.

Lorsque l'on considère un signal décrit par notre modèle de dégradation avec un bruit blanc gaussien, le terme de vraisemblance s'écrit comme :

$$f(y|u) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|u-y\|_2^2}{2\sigma^2}} \quad (22)$$

Le terme d'attache aux données s'écrit alors :

$$-\log(f(y|u)) \propto \frac{1}{2\sigma^2} \|u - y\|_2^2 \quad (23)$$

Pour une distribution laplacienne l'expression suivante :

$$f(y|u) = \frac{1}{(2b)^N} e^{-\frac{\|u-y\|_1}{b}} \quad (24)$$

Qui donne :

$$-\log(f(y|u)) \propto \frac{1}{b} \|u - y\|_1 \quad (25)$$

L'écriture du problème à travers un formalisme bayésien permet de fixer un critère sur le choix de la norme du terme de dépendance aux données, une norme  $\ell_2$  correspond à un modèle prenant en compte un bruit blanc gaussien tandis qu'une norme  $\ell_1$  apparaît pour un bruit plus impulsif suivant une distribution laplacienne. Pour la distribution de Pareto l'écriture n'est pas aussi simple. Les calculs ne seront pas décrits dans ce rapport.

### 3.4 Variantes avec la pseudo-norme $\ell_0$

#### 3.4.1 Modèle de Potts

Le modèle de Potts consiste à ré-écrire l'Equation (18) avec une pénalisation de la forme  $\|Lx\|_0$  où  $\|\cdot\|_0$  est une pseudo-norme  $\ell_0$  qui consiste à compter le nombre d'éléments non nuls :

$$\|u\|_0 = \{\#u_i | u_i \neq 0\} \quad (26)$$

Des algorithmes efficaces sont développés dans [1] pour résoudre ce problème pour  $p = \{1, 2\}$  et  $L$  modélisant l'opérateur de différences.

#### 3.4.2 Méthode par dictionnaire

Une autre méthode étudiée, et finalement assez similaire dans sa formulation, consiste à utiliser un dictionnaire [6] [2]. Ce dictionnaire est composé d'atomes  $A$  qui seront utilisés comme base pour reproduire le signal. La fonctionnelle à minimiser devient :

$$\hat{u}_\lambda \in \arg \min_u \underbrace{\frac{1}{2} \|Au - y\|_p^p}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\lambda \|u\|_0}_{\text{régularisation}} \quad (27)$$

On remarque une grande similitude entre la formulation du problème d'optimisation précédent, la grande différence ici est que l'opérateur se trouve dans le terme d'attache aux données. Le choix du dictionnaire utilisé va être prépondérant dans la qualité de l'estimation de notre signal. Des algorithmes efficaces tels que OMP (pour *Orthogonal Matching Pursuit*) ont été développés pour résoudre efficacement ce problème.

### 3.5 Mesure de l'erreur de débruitage

Pour chacune des méthodes, on évaluera les performances d'estimation en terme de MSE (*Mean Squared Error* qui signifie erreur quadratique moyenne) ou RMSE (erreur quadratique moyenne relative) dont les définitions sont rappelées ci-après.

$$MSE(\hat{u}) = \|\hat{u}_\lambda - \bar{u}\|_2^2 \quad (28)$$

La RMSE pour (*Relative Mean Squared Error*) qui correspond à la même grandeur, mais normalisée par l'énergie du signal (sa norme  $l_2$ )

$$RMSE(\hat{u}) = \frac{\|\hat{u}_\lambda - \bar{u}\|_2^2}{\|\bar{u}\|_2} \quad (29)$$

### 3.6 Constant par morceaux sur la position ( $u = X$ )

Notre première approche fut d'estimer le signal de position du patin (Figure 4 (b)) par un estimateur constant par morceaux (Section 3.4.1). Le problème de minimisation associé s'exprime ainsi :

$$\hat{u}_\lambda = \arg \min_u \frac{1}{2} \|u - y\|_p^p + \lambda \|Lu\|_0 \quad (30)$$

$$\text{avec } p \in \{1, 2\} \text{ et } (Lu)_n = |u_{n+1} - u_n| \quad (31)$$

La RMSE est représentée Figure 7, on remarque que pour un  $\lambda$  faible on recopie strictement les données en entrée ( $\lambda \simeq 10^{-11}$ ). Pour un  $\lambda$  très grand la solution comporte très peu de segments et fait des grands sauts, les évènements de glissement du patin ne sont alors plus détectés ( $\lambda \simeq 10^{10}$ ). Tandis que pour la solution minimisant la MSE on observe un effet d'escalier. On peut remarquer que la solution optimale obtenue avec  $\ell_2$ -Potts est moins bonne qu'avec  $\ell_1$ -Potts qui semble mieux gérer le caractère impulsionnel du bruit. On retrouve des impulsions de bruit dans la solution de  $\ell_2$ -Potts comme on pourrait s'y attendre au vue de notre discussion sur l'interprétation Bayésienne de notre problème de minimisation.

Sur la Figure 8, nous représentons l'estimée de la vitesse et de l'accélération pour le lambda optimal. Il apparaît clairement que les discontinuités fournies par le modèle de Potts ne permettront pas une étude précise de la dynamique.

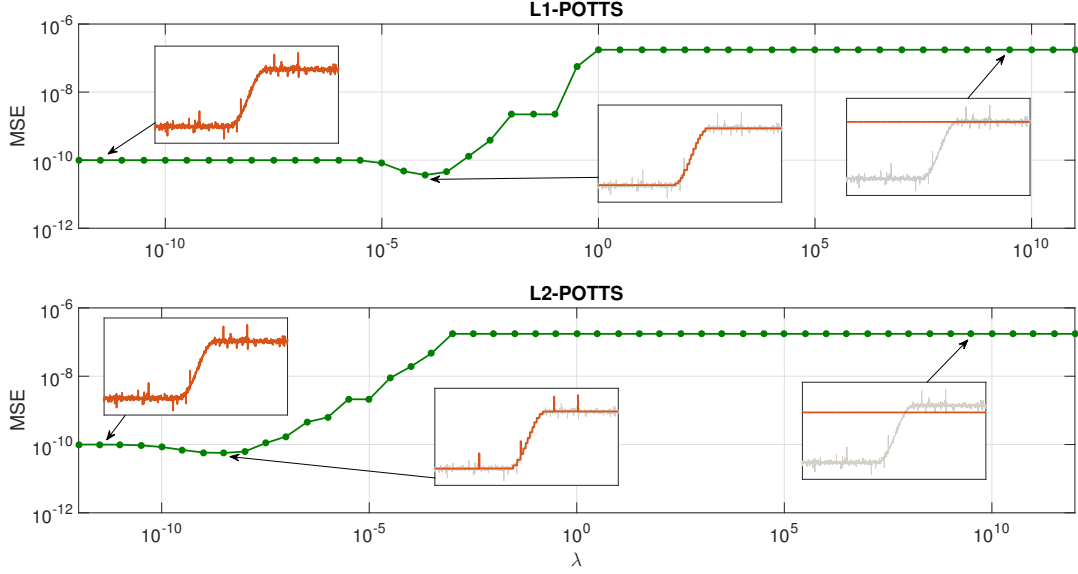


FIGURE 7 – MSE des deux approches constantes par morceaux (vert) et zoom sur la forme de la solution sur un évènement de glissement sur le signal de position pour différents  $\lambda$  (rouge).

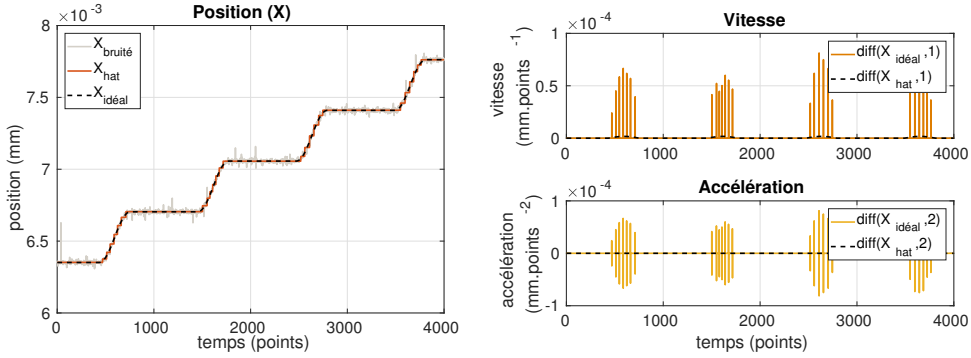


FIGURE 8 – Vitesse et accélération du patin (dérivée en points) pour la solution au minimum de MSE - norme  $\ell_1$  sur l'attache au données. Solution idéale en pointillés noirs

## Synthèse

L'intérêt de cette méthode était d'obtenir des paliers nets pour le déplacement du patin dans l'optique d'étudier la corrélation et les effets de mémoires dans la dynamique du système qui ne sont pas présents dans le modèle de friction considéré. Mais la principale limitation réside dans la forme des signaux expérimentaux. Ces derniers n'étant pas composés d'évènements réguliers en temps et en amplitude. Pour une même valeur de  $\lambda$  on ne peut pas récupérer tous les évènements, ce qui fausserait notre étude des corrélations au sein du système.

### 3.7 Linéaire par morceaux ( $u = X$ ou $u = F$ )

En adoptant une démarche similaire nous avons voulu approximer les signaux de force de traction ( $F$ ) et de position ( $X$ ) par un estimateur linéaire par morceaux.

$$\hat{u}_\lambda = \arg \min_u \frac{1}{2} \|u - y\|_2^2 + \lambda \|Lu\|_1 \quad (32)$$

$$\text{avec } (Lu) = |u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n| \quad (33)$$

Sur le signal  $F$ , cette approche semblait intéressante pour obtenir de manière approchée les temps de collé et les temps de glissé en détectant les variations de pente. Et sur le signal  $X$  cette approche permettait de se débarrasser de l'effet d'escalier visible sur la Figure 8. Comme nous sommes intéressés par l'obtention de la dynamique du système nous avons représenté la RMSE des dérivée première et seconde (vitesse et accélération)

des deux signaux (Figure 9). Le décrochage dans la RMSE de la dérivée seconde des signaux de position et de force respectivement aux alentours de  $\lambda \simeq 10^{-3}$  et  $\lambda \simeq 10^{-1}$  est dû à un arrêt de l'algorithme avant qu'il ait convergé. Lorsque l'algorithme n'a pas convergé, la solution retournée n'est pas linéaire par morceaux mais lisse et approxime mieux le signal. C'est pourquoi avant la convergence de l'algorithme la RMSE est plus faible (intervient à grands  $\lambda$ ). Comme la solution n'a pas convergé totalement, il peut s'agir d'un minimum local et cette solution n'a pas nécessairement de sens physique. C'est pourquoi nous nous arrêterons avant ces valeurs limites de  $\lambda$  pour étudier les résultats de cet algorithme.

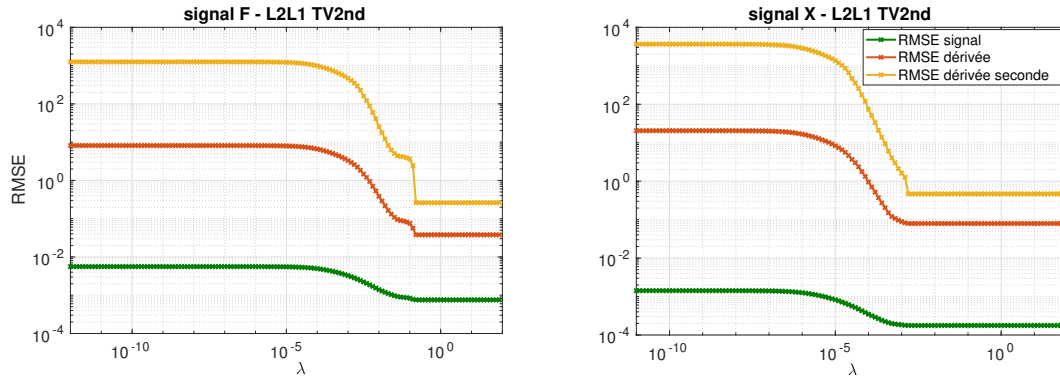


FIGURE 9 – RMSE en fonction de  $\lambda$  pour l'approche linéaire par morceaux avec l'opérateur de dérivée seconde. RMSE sur le signal  $X$  ou  $F$  (vert), sa dérivée (rouge) et sa dérivée seconde (jaune).

Le signal en lui-même est relativement bien approximé, l'effet d'escalier a disparu du résultat de l'estimation du signal  $X$ . Par contre, et comme on pouvait s'y attendre, le signal de vitesse présente cet effet d'escalier. La dynamique du système n'est par conséquent pas bien estimée (Figure 10).

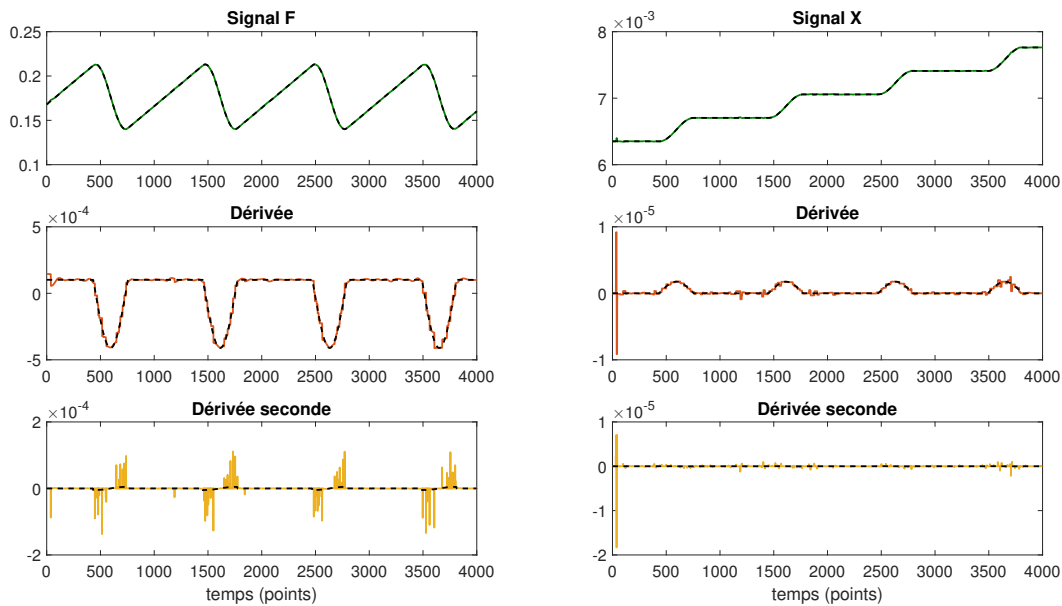


FIGURE 10 – Dynamique du système extraite du signal de déflexion de la lame  $F$  et du signal de position du patin  $X$  en utilisant l'estimateur linéaire par morceaux. Résultat du débruitage (vert), dérivée de l'estimée du signal (rouge) et dérivée seconde de l'estimée du signal (jaune). La solution idéale obtenue à partir du signal non bruité est représentée en pointillés noirs sur chaque graphique.

## Synthèse

L'estimation linéaire par morceaux offre un débruitage intéressant pour obtenir la pente du signal de force (donc estimer  $kv$ ) mais n'est pas satisfaisant pour estimer la vitesse et encore moins l'accélération du patin.

### 3.8 Estimation lisse ( $u = X$ et $u = F$ )

Pour obtenir la dynamique de manière plus convaincante nous avons changé d'approche et modifié notre fonctionnelle à optimiser pour à obtenir une solution lisse. La fonction à minimiser devient :

$$\hat{u}_\lambda = \arg \min_u \frac{1}{2} \|u - y\|_p^p + \lambda \|Lu\|_2^2 \tag{34}$$

$$\text{avec } p \in \{1, 2\} \text{ et } (Lu)_n = |u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n| \tag{35}$$

#### 3.8.1 Pour $p = 2$ , norme $\ell_2$ sur les données avec $u = X$ et $u = F$

La RMSE de cette méthode est représentée Figure 11 pour le traitement du signal de position (gauche) et de force (droite). Les résultats obtenus pour le minimum de RMSE du signal (courbe verte) sont présentés Figure 12. Nous pouvons dire que cette méthode permet d'extraire de manière très satisfaisante la dynamique du système.

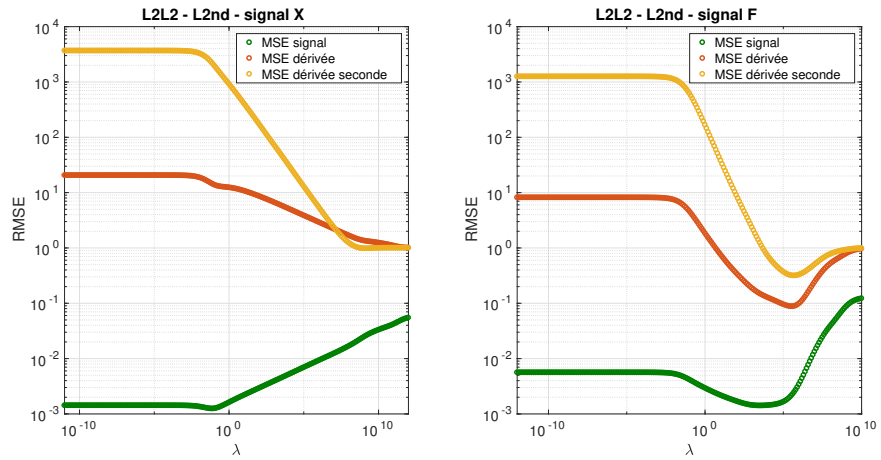


FIGURE 11 — RMSE des solutions obtenues avec la méthode  $\ell_2 - \ell_2$  sur les signaux  $u = X$  et  $u = F$  (vert), leur dérivée (rouge) et leur dérivée seconde (jaune) en fonction du paramètre de régularisation  $\lambda$

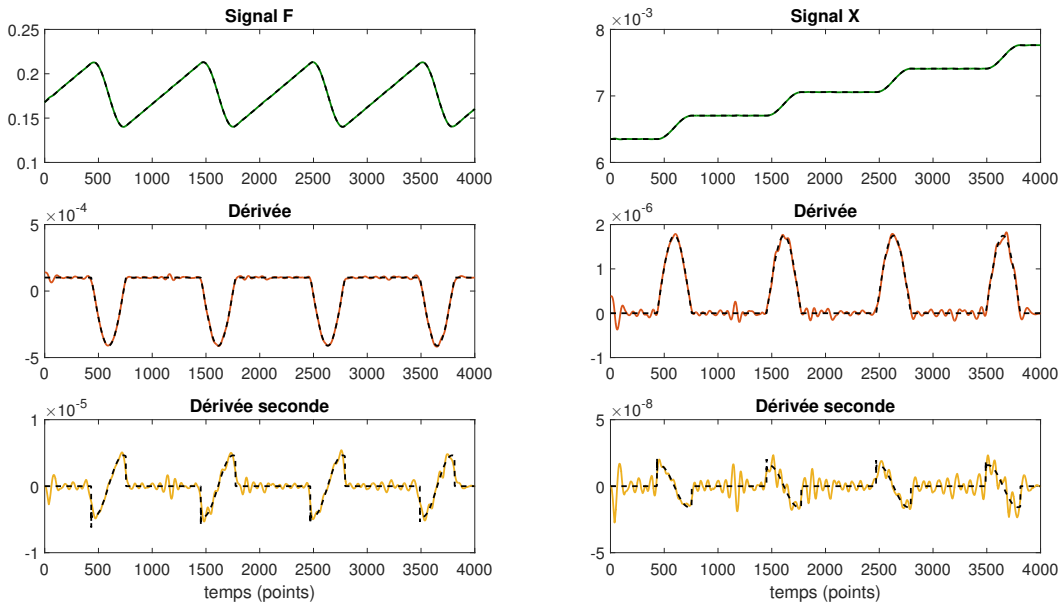


FIGURE 12 — Estimation de la dynamique du système par la méthode de débruitage  $p = 2$  et  $n = 2$  avec opérateur de dérivée seconde. En noir la solution idéale.

En prenant l'expression à minimiser on peut montrer que l'opération réalisée est un filtrage linéaire :

$$\hat{u}_\lambda = \arg \min_u \frac{1}{2} \|u - y\|_2^2 + \lambda \|Lx\|_2^2 \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_\lambda - y + \lambda L^* L \hat{u}_\lambda = 0 \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_\lambda = (\mathbb{1} + \lambda L^* L)^{-1} y \tag{38}$$

La forme explicite de l'opération de filtrage s'écrit alors :

$$\hat{u}_\lambda = H(\lambda)y \tag{39}$$

$$H(\lambda) = (\mathbb{1} + \lambda L^* L)^{-1} \tag{40}$$

Cette forme permet de se passer de l'étape de minimisation très coûteuse en temps. Le filtre est représenté Figure 13 pour différentes valeurs de lambda.

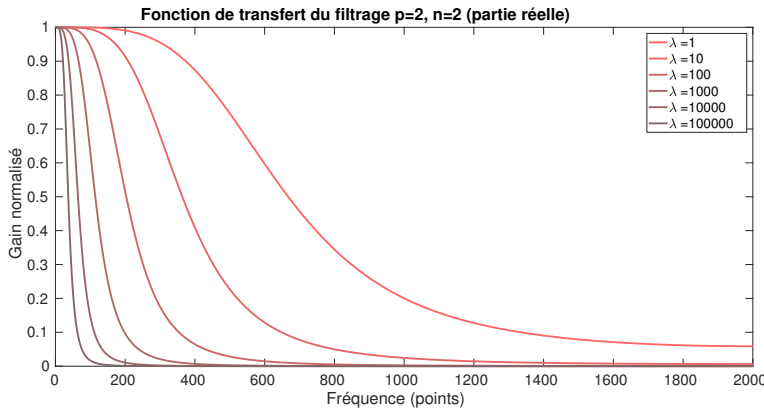


FIGURE 13 – Allure de la partie réelle du filtre associé à  $H(\lambda)$  correspondant à la méthode  $\ell_2$ - $\ell_2$  pour différents lambda. Le filtre est représenté pour un signal de taille  $N = 4000$  de 0 à  $\frac{N}{2}$

### 3.8.2 Pour $p = 1$ , norme $\ell_1$ sur les données avec $u = X$ et $u = F$

Comme dit précédemment la norme  $\ell_2$  sur les données semble être préférable pour un bruit gaussien or dans nos signaux expérimentaux le bruit est plus impulsif. On peut donc supposer qu'une norme  $\ell_1$  sur les données donnerait de meilleurs résultats. Pour vérifier cette hypothèse nous avons donc calculé la RMSE dans ce cas (Figure 14)

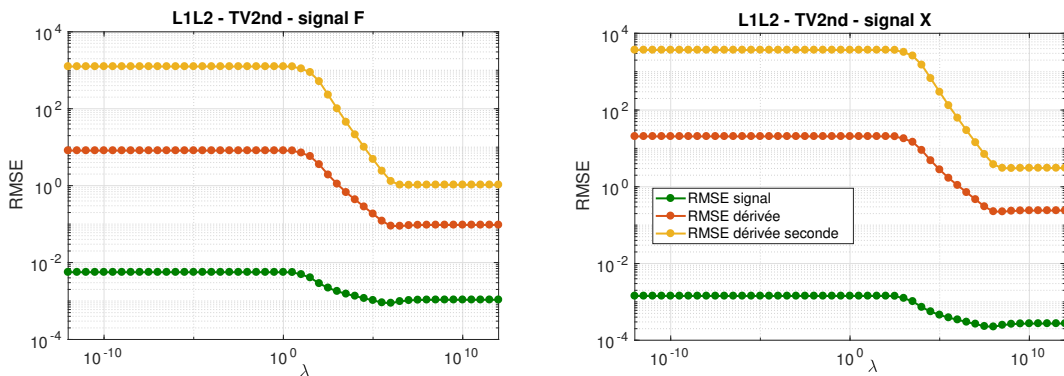


FIGURE 14 – RMSE en fonction de  $\lambda$  obtenue lors de la mesure de débruitage pour l'approche lisse avec l'opérateur de dérivée seconde et une norme  $\ell_1$  sur le terme de vraisemblance (données). RMSE sur le signal  $X$  ou  $F$  (vert), sa dérivée (rouge) et sa dérivée seconde (jaune).

Le changement principal est que pour cette méthode il semble y avoir un minimum local avant les éventuels problèmes de convergence discutés plus tôt (Section 3.7). On se placera dans son voisinage pour tracer les signaux relatifs à la dynamique du système (Figure 15).

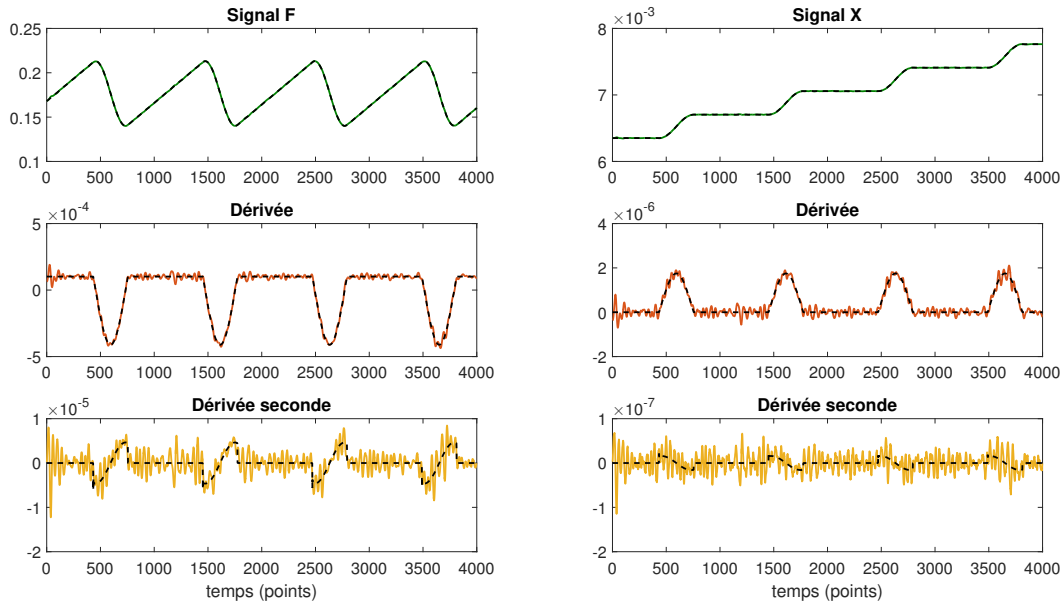


FIGURE 15 – Estimation de la dynamique du système par la méthode de débruitage  $p = 1$  et  $n = 2$  avec opérateur de dérivée seconde. En noir la solution idéale.

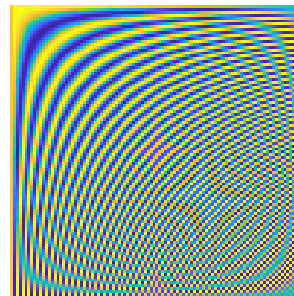
### Synthèse

Contrairement à ce qui était attendu il se trouve que la norme  $\ell_2$  sur les données permet une meilleure estimation de la dynamique qu'une norme  $\ell_1$  sur les signaux simulés, ce qui s'observe particulièrement sur l'accélération (en jaune sur les Figures 12 et 15). Mais on peut garder en tête que le comportement des algorithmes pourrait être différent sur les signaux expérimentaux.

### 3.9 Orthogonal Matching Pursuit - DCT

Il existe différentes approches concernant le débruitage par dictionnaire. La plus simple, et celle que nous avons réalisée, qui consiste à fournir un dictionnaire connu à l'algorithme. L'autre approche consisterait à ajouter une phase d'apprentissage de dictionnaire. L'algorithme extrait lui-même les atomes qu'il juge pertinent pour reconstruire le signal. Dans notre cas nous avons choisi d'utiliser un dictionnaire de cosinus discret (DCT pour *Discrete Cosinus Transform*) (Figure 16). Sur les signaux théorique cette approche s'est révélée être particulièrement efficace (Figure 17).

FIGURE 16 – Visualisation d'un dictionnaire DCT  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  de taille  $N = 100$ . Les axes représentent les fréquences (origine angle supérieur gauche) et l'échelle de couleur la valeurs des coefficients du dictionnaire. Il s'agit d'une simple représentation qui n'a pas de vocation quantitative.



La RMSE de cette méthode est bien meilleure pour la vitesse et l'accélération, et il est intéressant de remarquer le saut dans la RMSE une itération après la RMSE optimale (Figure 18). Ceci reflète un caractère sensible de l'algorithme sur le nombre d'itérations, une itération supplémentaire et la dynamique peut être totalement faussée. Néanmoins on peut limiter cet effet en augmentant progressivement le nombre d'itération et en s'arrêtant avant ce phénomène.

La reconstruction du signal ce déroule comme suit (Figure 19). Au début (faible nombre d'itérations) l'algorithme va tenter d'approximer le signal avec un très faible nombre d'atomes. Ensuite on va observer un effet de lissage



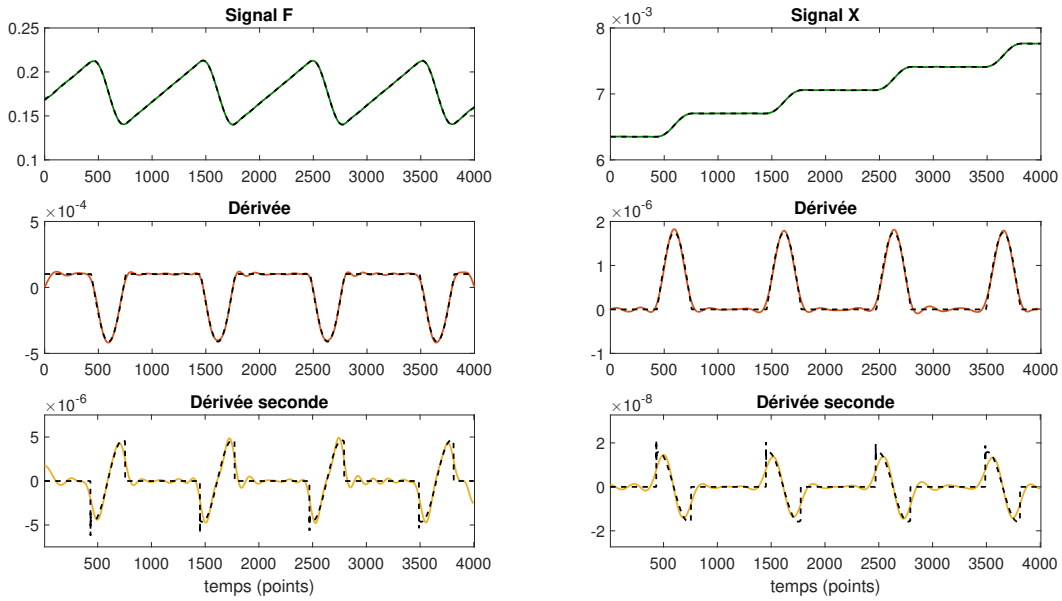


FIGURE 17 – Estimation de la dynamique du système par orthogonal matching pursuit (OMP) et dictionnaire de cosinus discret (DCT). L'estimation idéale est représentée en pointillés noirs

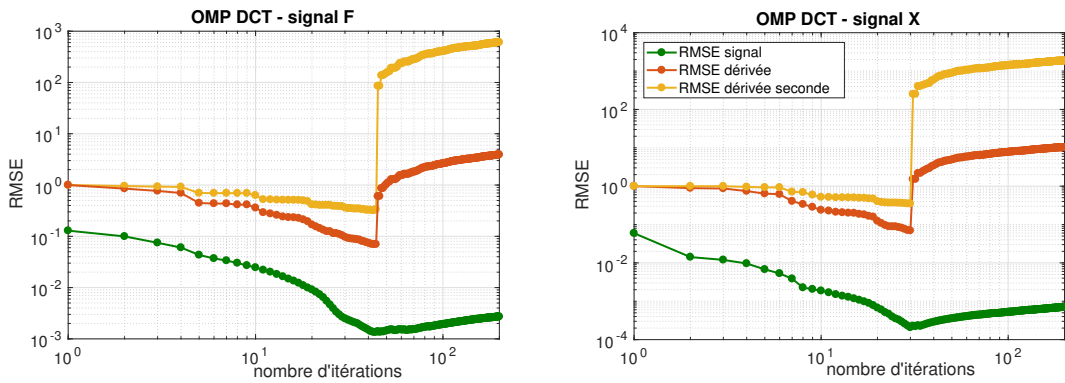


FIGURE 18 – RMSE en fonction du nombre d'itération de l'algorithme pour les signaux  $X$  et  $F$  (vert) et leurs dérivées (rouge) et dérivées secondes (jaune).

dû au fait que le bruit est plus coûteux à reproduire à cause de son caractère impulsionnel. Enfin on finit par reproduire le bruit, de manière de plus en plus fidèle. En fait la détection du bruit intervient au décrochage visible sur la Figure 18.

**Synthèse**

OMP présente des performances très intéressantes pour le débruitage, mais le temps d'exécution et les ressources mémoire nécessaires croissent très rapidement avec la taille du signal à analyser ce qui pose problème pour l'analyse de signaux longs pour faire des statistiques.

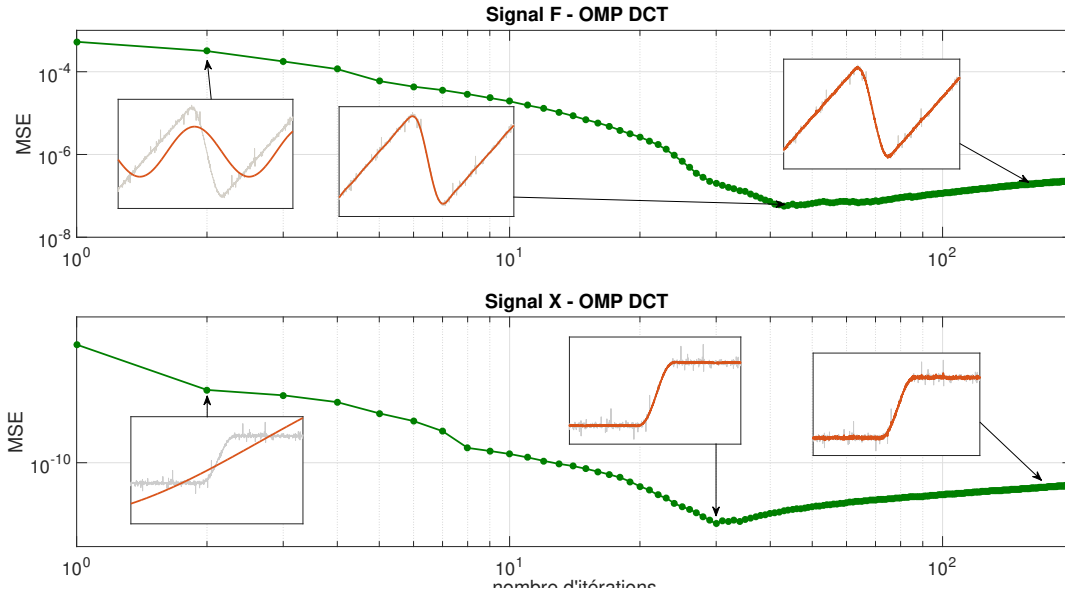


FIGURE 19 – MSE et forme des estimations pour différents nombre d'itérations maximum de l'algorithme

### 3.10 Synthèse globale

Les performances des différentes méthodes explorées sont synthétisées dans le tableau ci-dessous. Pour l'analyse des signaux expérimentaux nous ne garderons que les trois dernières méthodes qui semblent offrir les performances et les comportements les plus satisfaisant.

	Convergence	RMSE	Débruitage	Dynamique	Temps exec
$\ell_2$ -Potts	✓	×	Effet d'escalier + bruit résiduel	×	✓
$\ell_1$ -Potts	✓	×	Effet d'escalier	×	✓
$\ell_2 - \ell_1$ -L2nd	×	✓	Discontinuités des pentes	×	×
$\ell_1 - \ell_2$ -L2nd	×	✓	Solution lisse	✓	×
$\ell_2 - \ell_2$ -L2nd	✓	✓	Solution lisse	✓	✓✓
OMP-DCT	×	✓✓	Oscillations résiduelles	✓	✓

TABLE 1 – Tableau récapitulatif des différentes méthodes explorées. Les méthodes retenues pour l'analyse des signaux expérimentaux sont le filtrage  $\ell_2 - \ell_2$ -L2nd ( 3.8.1),  $\ell_1 - \ell_2$ -L2nd ( 3.8.2) et OMP-DCT ( 3.9)

L'analyse des signaux  $X$  et  $F$  n'a pas mis en évidence de différences significatives entre le traitement de ces deux représentations pour les traitements sélectionnés. C'est pourquoi nous traiterons uniquement le signal de force  $F$  expérimental par commodité.

## 4 Résultats Physiques

### 4.1 Performance de débruitage

**Remarque :** nous comparerons les méthodes sélectionnées avec le traitement de signal anciennement utilisé qui consiste à appliquer un filtre de lissage. Ce filtre effectue la moyenne des valeurs du signal sur un intervalle localement défini. Il est réalisé à l'aide de la fonction *smooth* de Matlab.

#### 4.1.1 Débruitage

La première utilité des méthodes mises en œuvre est de débruiter le signal expérimental. Les résultats des différentes méthodes sont présentés Figure 20. On ne remarque pas de différence significative entre les différentes solutions pour le signal inertiel et pour le signal de collé-glissé.

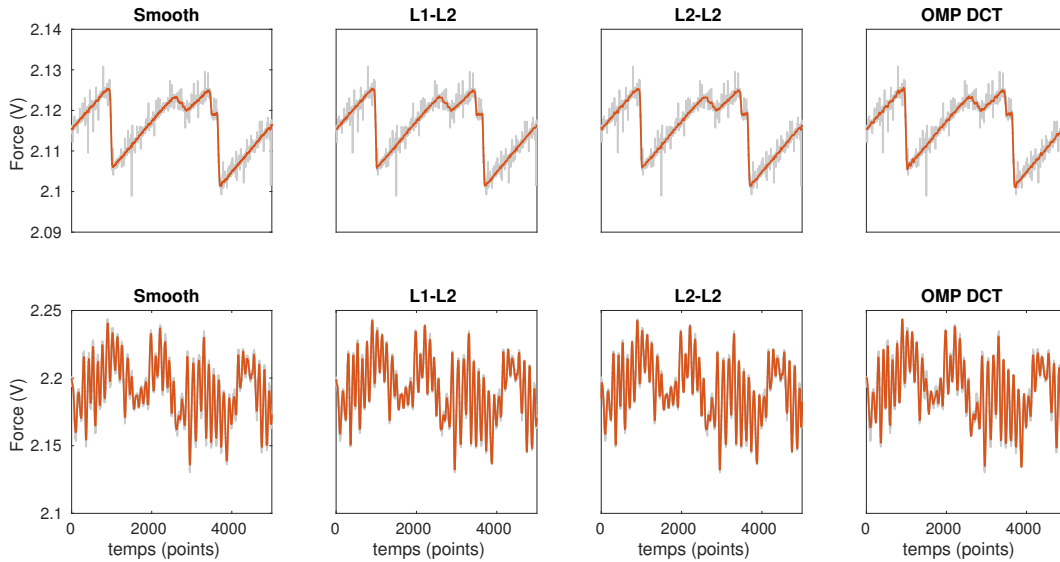


FIGURE 20 – Résultat du débruitage pour les méthodes sélectionnées sur une portion de signal  $u = F$  dans un régime de collé-gléissé (en haut) et un régime inertiel (en bas). Le régime inertiel est un cas jugé difficile car le niveau de bruit est très élevé.

### 4.2 Analyse dynamique

L'analyse de la friction nécessite l'étude précise de la dynamique du système. Pour cela on représente Figures 21 et 22 les résultats obtenus pour l'extraction de la vitesse et de l'accélération du patin. Sur les signaux dérivés on remarque un net apport des trois méthodes  $l_1 - l_2$ ,  $l_2 - l_2$  et OMP DCT par rapport au *smooth*. La détection des évènements de glissement (pulses de vitesse) est bien plus efficace. On peut maintenant détecter les petits évènements qui étaient inaccessibles et faussaient les analyses statistiques (visible aux alentours de  $t \lesssim 2s$ ).

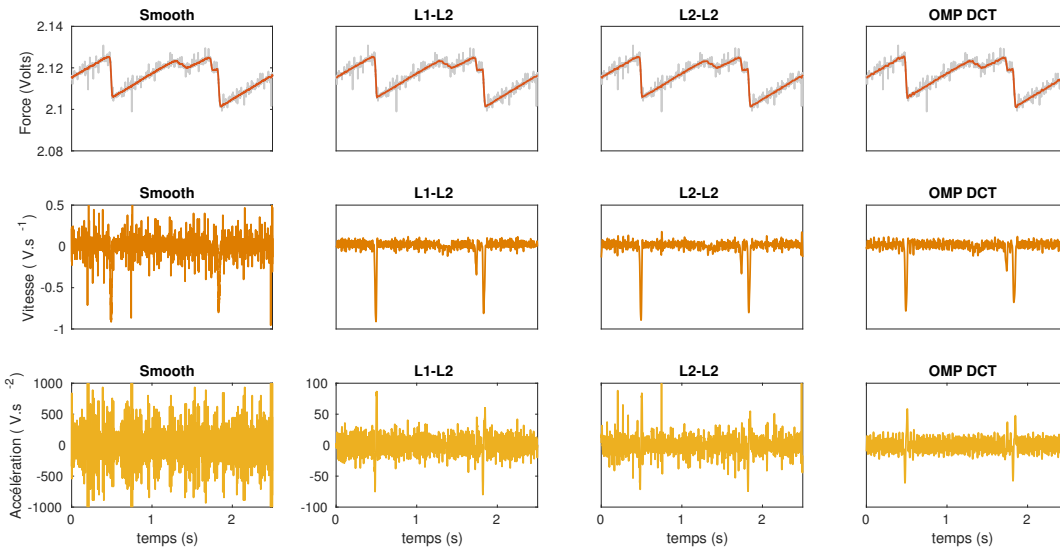


FIGURE 21 – Résultat du débruitage (Figure 20) sur l'extraction de la dynamique en régime de collé-gléissé.

La meilleure estimation de la dynamique du patin (vitesse et accélération) ne permet cependant pas de tracer de manière satisfaisante l'évolution du coefficient de friction effectif  $\mu_{\text{eff}}$  (force de friction adimensionnée par le poids) en fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$  comme on peut le voir Figure 23.

**Remarque :** La grande sensibilité du diagramme nécessite l'emploi d'un filtre différentiateur permettant de limiter le bruit induit par l'opération de dérivée. Cette méthode est tirée d'un tutoriel Matlab présent dans la documentation sous le nom "*Take Derivatives of a signal*".

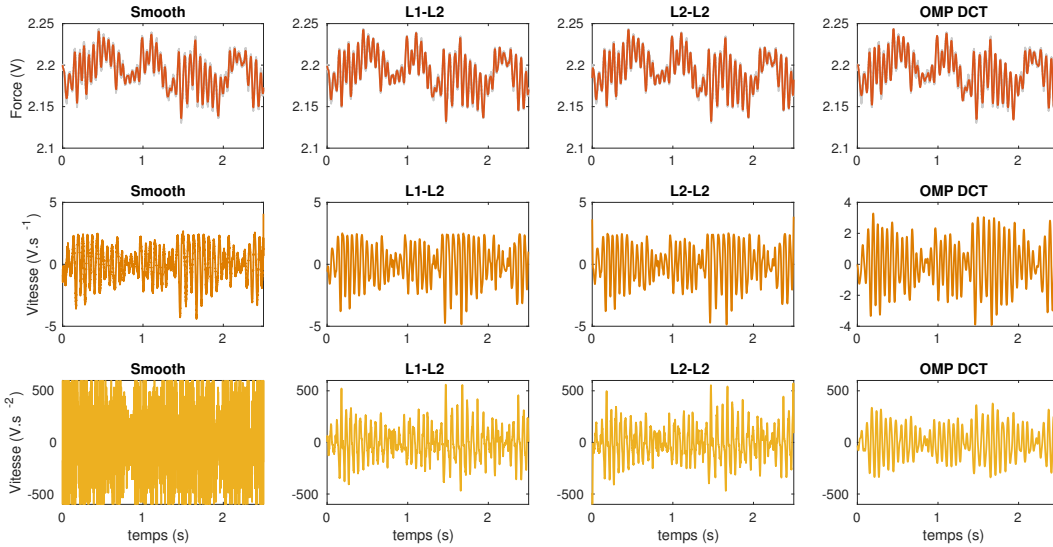
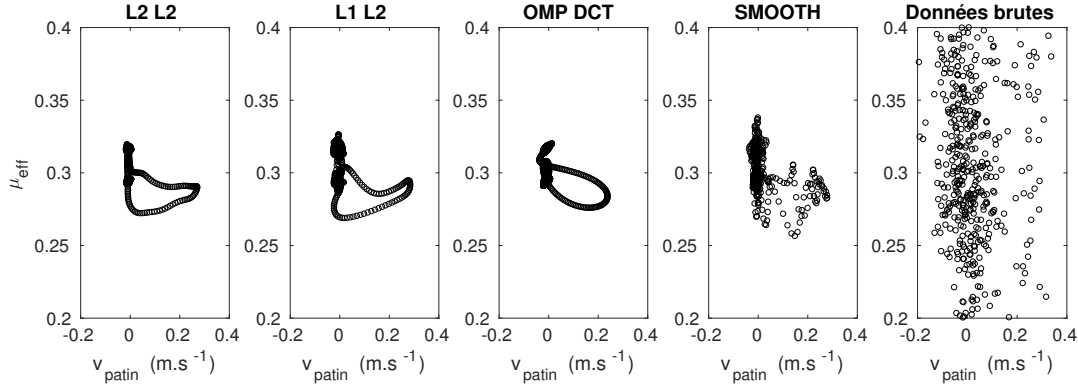


FIGURE 22 – Résultat du débruitage (Figure 20) sur l'extraction de la dynamique en régime inertiel.

FIGURE 23 – Diagramme force vitesses tracé sur un unique évènement pour les différentes méthodes de débruitage. De gauche à droite :  $\ell_2 - \ell_2$ ,  $\ell_1 - \ell_2$ , OMP DCT, Smooth et comparaison avec le résultat sans traitement.

### 4.3 Analyses statistiques

L'étude statistique de l'instabilité de collé-glissé préalablement réalisée consistait à détecter les minima et maxima locaux dans le signal  $F$ . Chaque maximum détecté correspond à un  $\mu_s$  et chaque minimum permet d'obtenir  $\mu_d$  (expression de la force  $F$  au temps  $t_2$  Section 2.3.1).

Le problème de cette approche est que les petits évènements de glissé intervenant durant les phases de collé ne sont pas détectés, faussant les mesures de durée entre les évènements et les distributions de coefficients de friction.

**Remarque :** les coefficients  $\mu_s$  et  $\mu_d$  ont des origines très différentes,  $\mu_s$  va caractériser la mise en mouvement du patin tandis que  $\mu_d$  représente plutôt une dissipation moyenne du système.

Dans l'objectif de résoudre ce problème de petits évènements nous avons changé la manière d'effectuer l'analyse en se basant sur le signal de vitesse. La détection des phases de glissé, qui prennent la forme d'impulsions d'amplitude plus ou moins grande, se fait à l'aide de la fonction *findpeaks* de Matlab. il devient possible d'isoler sur le signal  $F$  un voisinage pour chaque évènement de glissé et d'effectuer la recherche de maxima et minima sur ces portions. Ainsi les petits évènements sont pris en compte. Cette méthode est réalisable uniquement grâce à l'apport de la méthode de filtrage  $\ell_2 - \ell_2$  en terme d'estimation de la vitesse visible sur la détection des évènements sur la Figure 24 et sa capacité à traiter de longs signaux grâce à sa forme explicite. On remarque que la détection est très efficace, les évènements de glissé même très petits sont détecté à l'aide de la méthode  $\ell_2 - \ell_2$ , ce qui permet d'avoir des distribution sur les vitesses de glissement et sur les durées entre évènements qui représentent correctement la physique du système. Il va sans dire que les distributions obtenues avec smooth

ne sont pas satisfaisantes si l'on regarde la détection des évènements de glissé on peut voir que la détection intervient sur du bruit la plupart du temps (en vert sur la sous-figure du milieu).

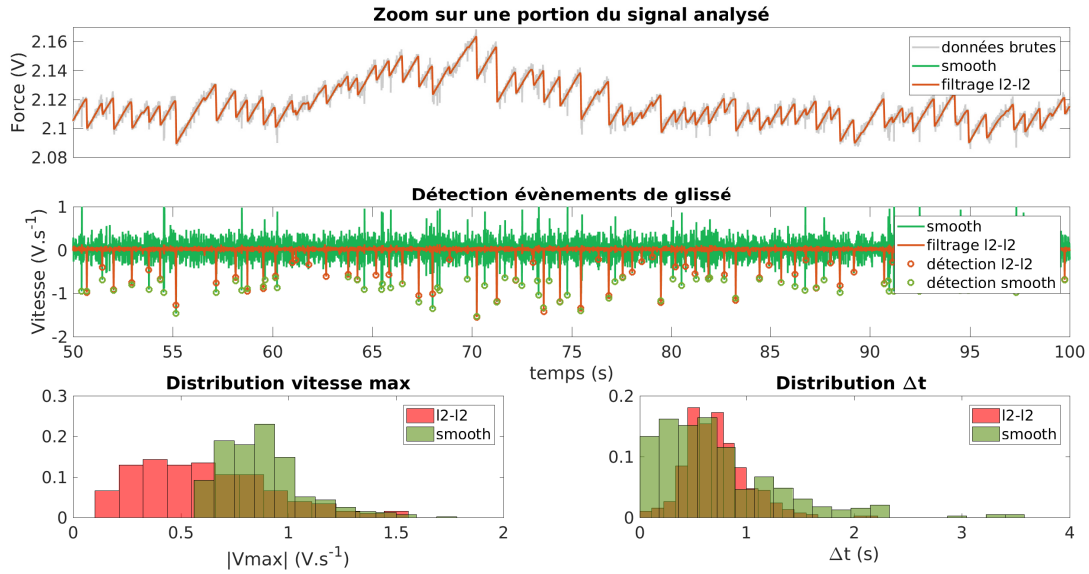


FIGURE 24 – Analyse d'un signal de 570 000 points par les méthodes smooth (vert) et  $\ell_2 - \ell_2$  (rouge). On ne remarque pas de différence sur le filtrage du signal (vert et rouge superposés) mais la différence est frappante lorsque l'on représente la vitesse pour la détection des évènements de glissé. Sont représentées en bas de la figure les distributions de vitesse maximale et les durées entre les évènements.

**Remarque :** Pour une analyse statistique la précision sur la vitesse n'est pas primordiale (on tolère une baisse de hautes fréquences) mais la méthode utilisée doit être capable de traiter rapidement des signaux de très grande taille ( $N \sim 10^5$ ). C'est pourquoi OMP n'est pas applicable, cette méthode nécessite un dictionnaire de taille ( $N^2$ ) et la mémoire vive nécessaire est bien trop élevée. La méthode  $\ell_1 - \ell_2$  n'est pas optimale pour l'analyse statistique de longs signaux à cause de son temps d'exécution. Cependant la forme explicite de la méthode  $\ell_2 - \ell_2$  offre la possibilité de filtrer de manière très satisfaisante (Figure 21) et très rapidement des signaux de grande taille.

#### 4.4 Etude des corrélations et des effets mémoire

L'étude des corrélations au sein du système permet d'établir un lien entre un évènement de glissé avec le suivant. Les corrélations présentées Figure 25 sont issues du traitement Figure 24, on étudie la vitesse maximum de glissement (rouge) par évènement et la corrélation entre la durée entre chaque phase de glissement (en vert). On ne retrouve cependant pas d'effets mémoire ou de tendance claire dans l'une ou l'autre des analyses contrairement à ce que présente [8] en friction granulaire.

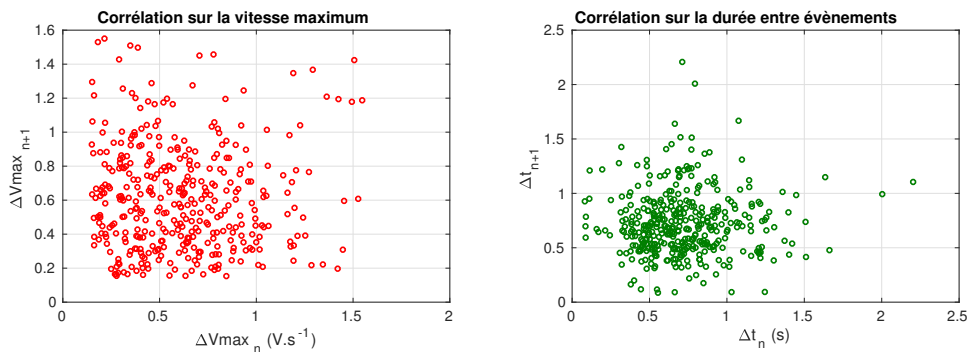


FIGURE 25 – Etudes des corrélations entre les évènements de glissé  $n$  et  $n+1$ . Corrélation des vitesses maximales (rouge) et des durées entre évènements (vert).

## 5 Conclusion générale

Nous avons vu que la dynamique d'un système en friction est complexe. En fonction des paramètres  $\{m, k, v\}$  le système peut être dans un régime de collé-glissé, inertiel ou de glissement continu. Pour caractériser les régimes de collé-glissé et inertiel j'ai fait l'acquisition de signaux expérimentaux sur lesquels j'ai mis en oeuvre des méthodes basées sur des approches variationnelles.

Durant ce stage nous avons montré qu'il y avait un intérêt à utiliser ces méthodes pour faire du débruitage de signaux expérimentaux, particulièrement pour l'estimation de la dérivée et la dérivée seconde d'un signal. Mais aussi pour des analyses statistiques de très longs signaux.

Cependant il reste encore beaucoup de pistes à explorer pour approfondir ce lien entre traitement du signal et extraction d'informations physique sur des signaux expérimentaux. Notamment l'approche par dictionnaire qui se veut très prometteuse pour le débruitage et présente un certain intérêt pour la caractérisation des régimes dynamiques. En effet, la caractérisation précise du régime dynamique du système à l'aide d'un critère quantitatif reste à faire.

D'un point de vue plus personnel ce stage, qui s'est déroulé dans le cadre d'une collaboration entre deux équipes de recherche issues de communautés scientifiques différentes (traitement du signal et physique des milieux granulaire), m'a donné l'opportunité de lier ces deux domaines de recherche passionnants dans mon parcours et d'apprendre au sein de ces deux communautés des méthodes et des approches très différentes et complémentaires.

## Références

- [1] L. Demaret A. Weinman, M. Storath. The l1-potts functional for robust jump-sparse reconstruction. *eprint arXiv :1207.4642*, 2012. DOI :10.1137/120896256.
- [2] T.T Cai and L. Wang. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011.
- [3] P.L. Combettes and J.-C. Pesquet. A douglas-rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007.
- [4] J. Herrmann F. Lacombe, S. Zapperi. Dilatancy and friction in sheared granular media. *The European Physical Journal E*, 2000.
- [5] V. Vidal H. Lastakowski, J.-C. Géminard. Granular friction : Triggering large events with small vibrations. *Scientific Reports*, 2015.
- [6] S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993.
- [7] Y. Zheng J.-C. Pesquet N. Pustelnik, A. Benazza-Benhayia. Wavelet-based image deconvolution and reconstruction. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, 2016. DOI : 10.1002/047134608X.W8294.
- [8] A. Bak S. Nasuno, A. Kudrolli and J.P. Gollub. Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers. *Physical Review E* 58, 1998.