# Processus stochastiques

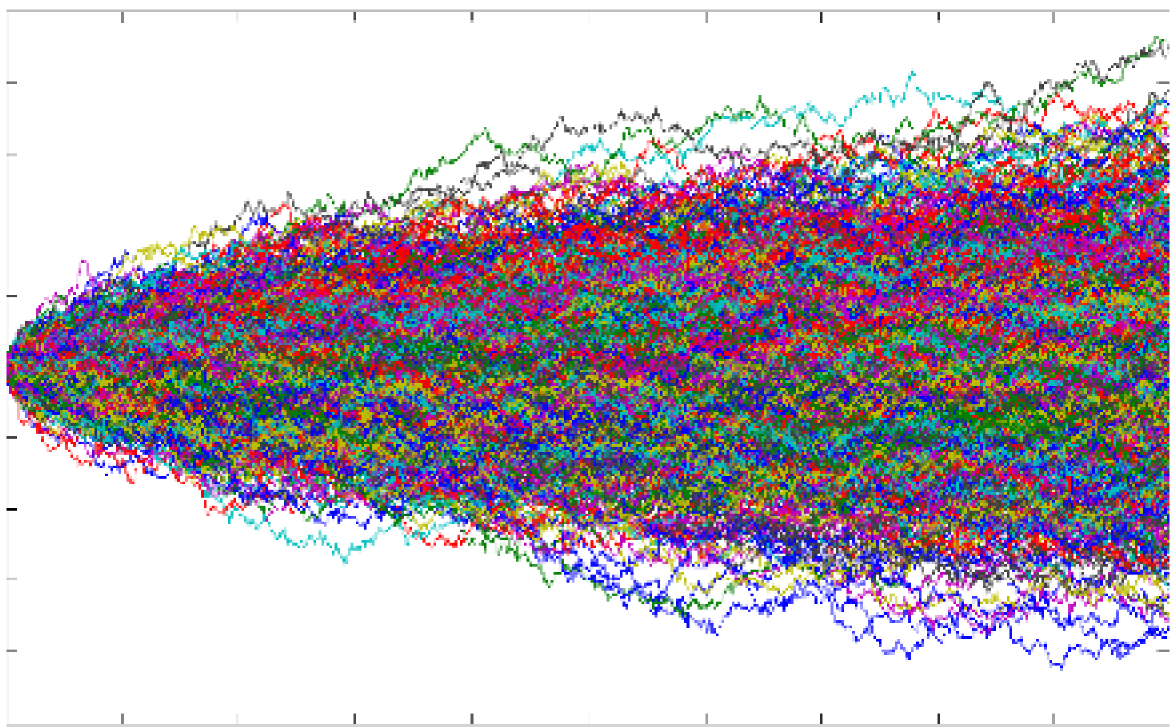
17 décembre 2014


Cours donné par Jean-Christophe Mourrat (ENS Lyon)

http ://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.mourrat/index/html

Script rédigé par Nils Caillerie (UCBL)

http ://math.univ-lyon1.fr/~caillerie/

# Table des matières

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et on note $\mathbb{E}$ l'espérance associée à $\mathbb{P}$.

# 1 Mouvement brownien

## 1.1 Vecteurs gaussiens

**Définition 1.** On dit que $X$ suit une loi gaussienne standard sa loi a pour densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$$

On note $X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ si $X = m + \sigma X_0$ où $X_0$ suit une loi gaussienne standard.

Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, le processus $\langle \lambda, X \rangle$ suit une loi gaussienne.

**Proposition 2.** *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien tel que $\mathbb{E}[X_i] = 0 \; \forall i$. Soit $C = \left(\mathbb{E}[X_I X_J]\right)_{i,j}$ . On a*

*i)* $\operatorname{Var}\left(\sum \lambda_i X_i\right) = \lambda^{\mathrm{t}} C \lambda$

*ii)* $\mathbb{E}\left[e^{i \sum \lambda_j X_j}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{t}} C \lambda\right)$

*iii) La loi de $X$ est déterminée par $C$. En particulier, $(X_1, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si $C$ est diagonale.*

(La preuve de ce résultat se trouve dans la littérature standard sur le sujet)

**Proposition 3.** *1) Soit $(X_n)_n$ telle que $X_n \sim \mathcal{N}\left(m_n, \sigma_n^2\right)$ telle que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. Alors,*

$$X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$$

*où $m = \lim_n m_n$ et $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ .*

*2) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors la convergence a lieu dans tous les espaces $L^p$.*

*Démonstration.* 1) La convergence en loi est équivalente à

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \; \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_n}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right] = e^{i\xi m_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\xi^2}$$

En prenant le module,

$$e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}\xi^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left|\mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\right| \text{ (continue en } \xi = 0)$$

ceci implique que $\sigma_n^2$ converge. Soit $\sigma^2$ la limite.

$$e^{i\xi m_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{\sigma^2}{2}\xi^2} \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]$$

Si on sait a priori que $(m_n)$ est bornée, soient $m$ et $m'$ deux valeurs d'adhérence. On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\xi m} = e^{i\xi m'} = 1 + i\xi m' + o(\xi)$$

et on a $m = m'$. Montrons donc que la suite $(m_n)$ est bornée supérieurement. Si on suppose le contraire, on peut extraire une sous-suite $m_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a :

$$\mathbb{P}\left(X_{n_k} \geq m_{n_k}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq A) &\geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{n_k} \geq A\right) \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{n_k} \geq m_{n_k}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pour tout $A$, $\mathbb{P}(X \geq A) \geq \frac{1}{2}$ . Or, $\lim\limits_{A\to\infty} \mathbb{P}(X \geq A) = 0$. De la même manière, on montre que $(m_n)_n$ est bornée inférieurement.

2) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\theta X_n}\right] &= e^{\theta m_n + \frac{\theta^2}{2}\sigma_n^2} \\ \sup_n \mathbb{E}\left[e^{\theta X_n}\right] &< +\infty \\ \sup_n \mathbb{E}\left[e^{\theta |X_n|}\right] &< +\infty \end{aligned}$$

car $e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$. En particulier, pour tout $q > 0$,

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|^q\right] &< +\infty \\ \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n - X|^q\right] &< +\infty \end{aligned}$$

$Y_n = |X_n - X|^p$ est tel que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $Y_n$ est bornée dans $L^2$ donc uniformément intégrable. Donc $Y_n \to 0$ dans $L^1$ :

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

## 1.2 Une construction du mouvement brownien

### 1.2.1 Définitions

**Définition 4.** Un processus stochastique est une collection de variable aléatoires indexées par “le temps”, i.e $\mathbb{R}_+$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$.

Un processus stochastiques $(X(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si la loi de $X(t+s) - X(t)$ ne dépend que de $s$, i.e $\forall t_1, t_2, s \geq 0$,

$$X(t_1 + s) - X(t_1) \overset{\mathscr{L}}{=} X(t_2 + s) - X(t_2)$$

$(X(t))$ est à accroissements indépendants si pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, la famille de variables aléatoires $(X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}))$ indépendante.

$(X(t))$ est un processus gaussien si pour tout $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$, le vecteur $(X(t_0), \ldots, X(t_n))$ est gaussien.

**Exemple 5.** Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots$ des variables aléatoires de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$. On pose $N(t) = \mathrm{card}\{k \mid \tau_1 + \ldots + \tau_k \leq t\}$. Alors, $N$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires.

**Définition 6.** On appelle mouvement brownien standard (issu de 0) tout processus stochastique $(B_t)_t$ tel que

i) $B_0 = 0$ p.s.

ii) $\forall s, t \geq 0,\ B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$.

iii) $B$ est à accroissements indépendants.

iv) Il existe $A$ mesurable tel que $\mathbb{P}(A)$ et tel que pour tout $\omega \in A$, la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto B_t(\omega) \end{cases}$ est continue.

*Remarque* 7. Par le théorème d’extension de Kolmogorov, on peut construire un processus stochastique sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ muni de la topologie produit et qui satisfait i), ii) et iii). L’ensemble $\{\omega \mid t \mapsto B_t(\omega) \text{ est continue}\}$ n’est pas mesurable. C’est même pire que ça ! Imaginons que $B$ soit un mouvement brownien. Soit $\tau \sim \mathrm{Exp}(1)$ et $\overline{B_t} = \begin{cases} B_t & \text{si } t \neq \tau \\ B_t + 1 & \text{si } t = \tau \end{cases}$. Alors, $\overline{B_t}$ n’est pas continu mais il satisfait i), ii) et iii). En effet, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(B_t = \overline{B_t}\right) = \mathbb{P}(\tau \neq t) = 1$$

même si $\mathbb{P}\left(\forall t \geq 0,\ B_t = \overline{B_t}\right) = 0$.

**Définition 8.** Quand on a deux processus $\left(\overline{B_t}\right)_t$, $(B_t)_t$ qui vérifient $\mathbb{P}\left(B_t = \overline{B_t}\right) = 1$, on dit que $\overline{B}$ est une modification de $B$.

Les propriétés i), ii), iii) concernent seulement les “lois fini-dimensionnelles” : la loi de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est celle de $\left(\overline{B_{t_1}}, \ldots, \overline{B_{t_n}}\right)$.

### 1.2.2 Construction rigoureuse

On va construire le mouvement brownien sur $[0,1]$. On peut "recoller" ensuite pour l'avoir sur $\mathbb{R}_+$. On choisit une base orthonormée de $L^2[0,1]$ (base de Haar). On pose

$$H(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t<\frac{1}{2}\\ -1 & \text{si } \frac{1}{2}\leq t<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Pour $n\geq 1$ entier, on pose $n=2^j+k$ où $0\leq k<2^j$ et

$$H_n(t)=H_{j,k}(t)=2^{\frac{j}{2}}H\left(2^jt-k\right)$$

Pour $n=0$, $H_0(t)=1$. Alors $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1])$.

Soit $(Z_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$\xi(f)=\sum_{n\in\mathbb{N}}Z_n\langle H_n,f\rangle_{L^2([0,1])}$$

La variable aléatoire $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}Z_n\langle H_n,f\rangle$ est une gaussienne centrée de variance $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\langle H_n,f\rangle^2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\langle H_n,f\rangle^2\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\|f\|_{L^2}$ donc $\sum_{n=0}^{N}Z_n\langle H_n,f\rangle$ converge en norme $L2$ vers une variable aléatoire gaussienne de variance $\|f\|_{L^2}^2=\xi(f)$. On a envie de poser $B_t=\xi\left(\mathbb{1}_{[0,t]}\right)$, mais pour chaque $t$, $B_t$ est défini p.s. donc on n'aura pas de sens à la question de la continuité. On regarde

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}Z_n\langle H_n,\mathbb{1}_{[0,t]}\rangle \tag{1}$$

On va montrer que, sauf sur un ensemble de probabilité nulle, cette série converge uniformément en $t$.

**Lemme.** *Si $(Z_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\sup_n\frac{|Z_n|}{\sqrt{\ln n}}<+\infty$ p.s.*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_1\geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{u}{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\\ &\leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Si $x\geq 1$, $\mathbb{P}(|Z_1|\geq x)\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z_n\geq 2\sqrt{\ln n}\right) &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp(2\ln n)\\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

qui est sommable. Il suffit ensuite d'appliquer le lemme d Borel-Cantelli. □

Retour à la construction :

$$\begin{aligned}\langle H_{j,k},\mathbb{1}_{[0,t]}\rangle &= \int_0^t H_{j,k}(s)\,ds\\ &= \int_0^t 2^{\frac{j}{2}}H\left(2^js-k\right)ds\\ &\leq 2^{-\frac{j}{2}}\mathbb{1}_{\left\{t\in[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}[\right\}}\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la série (1) converge uniformément pour tout $\omega$ tel que $C(\omega) := \sup\frac{|Z_n(\omega)|}{\sqrt{\ln n}} < +\infty$. On rappelle que $n = 2^j + k \leq 2^{j+1}$ et donc $\ln n \leq C(j+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\left|Z_n(\omega)\left\langle H_n, \mathbb{1}_{[0,t]}\right|\right. &\leq \sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} C(\omega)\cdot C\sqrt{j+1}\cdot 2^{-\frac{j}{2}}\mathbb{1}_{\left\{t\in\left[\frac{k}{2^j},\frac{k+1}{2^j}\right[\right\}} \\ &\leq C\cdot C(\omega)\times\sum_{j=J}^{+\infty}\sqrt{j+1}2^{-\frac{j}{2}}\end{aligned}$$

aussi petit que voulu, uniformément en $t$. Conclusion : pour tout $\omega$ tel que $C(\omega) < +\infty$, la série (1) converge uniformément. On note $t \mapsto B_t$ la limite (continue !). il reste à vérifier les propriétés i), ii) et iii) :

i) $B_0 = 0$ p.s : évident

ii) On veut vérifier $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$ :

$$B_{t+s} = \xi\left(\mathbb{1}_{[0,t+s]}\right)$$

et $\begin{cases} L^2([0,1]) & \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \\ f & \mapsto \xi(f)\end{cases}$ est une isométrie.

$$\begin{aligned}B_{t+s} - B_t &= \xi\left(\mathbb{1}_{[0,t+s]} - \mathbb{1}_{[0,t]}\right) \\ \mathbb{E}\left[(B_{t+s} - B_t)^2\right] &= s\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\xi(f)$ est gaussienne pour tout $f \in L^2([0,1])$, ce qui démontre ii)

iii) Montrons que les accroissements sont indépendants. Soit $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$. On veut montrer $\left(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ est indépendante. $\left(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ est un vecteur gaussien. Toute combinaison linéaire est $\xi(f)$ donc une gaussienne. Il suffit alors de voir que, pour tout $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi\left(\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}\right)\cdot\xi\left(\mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\xi(f)\,\xi(g)\right] \\ &= \langle f, g\rangle_{L^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

par isométrie.

### 1.3 Propriétés du mouvement brownien

**Théorème 9.** *Théorème limite centrale. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires iid $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$. Soit $S_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\lfloor t/\varepsilon\rfloor} X_k$. Alors,*

$$S_\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{L}} B$$

*où $B$ est un mouvement brownien standard au sens des lois fini-dimensionnelles : pour tout $t_1, \ldots, t_n$,*

$$\left(S_\varepsilon(t_1), \ldots, S_\varepsilon(t_n)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \left(B_{t_1}, \ldots, Bt_n\right).$$

**Proposition 10.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Il y a équivalence entre :*

*a) $X$ est à accroissements indépendants stationnaires et $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t \geq 0$*

*b) $X$ est un processus gaussien tel que pour tout $t, s$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\mathbb{E}[X_s X_t] = s \wedge t$.*

*Démonstration.* On procède par double inclusion

"a⇒b"

$\mathbb{E}[X_t] = 0$ OK.

Mettons que $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_s X_t] &= \mathbb{E}[X_s(X_t - X_s)] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}[(X_s - X_0)(X_t - X_s)] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] \\ &= 0 + s = s = s \wedge t\end{aligned}$$

Il reste à voir que $X$ est un processus gaussien. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$. On veut voir que $\sum \lambda_i X_{t_i}$ est gaussienne. Par sommation par parties,$\sum \lambda_i X_{t_i} = \sum \mu_i \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)$ (gaussiennes indépendantes) où on pose $t_0 = 0$ donc $\sum \lambda_i X_{t_i}$ est gaussienne.

"b⇒a"

On a bien $X_0 = 0$ p.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_{t+s} - X_t)^2\right] &= \mathbb{E}\left[X_{t+s}^2\right] + \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - 2\mathbb{E}[X_t X_{t+s}] \\ &= s\end{aligned}$$

$X_{t+s} - X_t$gaussienne centrée de variance $s$. on a bien $X_s \sim \mathcal{N}(0, s)$ et accroissements stationnaires. Reste à voir que les accroissements sont indépendants. Soit $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. $\left(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ est un vecteur gaussien. il suffit donc de voir que pour tout $i \neq j$, (disons $i < j$),

$$\mathbb{E}\left[\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)\left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right)\right] = t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i = 0$$

□

**Théorème 11.** *Soit $B_t$ un mouvement brownien standard. Les processus suivants sont aussi des mouvements browniens standards :*

*1) $X_1(t) = B_{t+s} - B_s$ avec $s \geq 0$ fixé*

*2) $X_2(t) = -B_t$*

*3) $X_3(t) = \frac{1}{\sqrt{C}} B_{Ct}$ avec $C > 0$ fixé*

*4) $X_4(t) = \begin{cases} t \cdot B_{\frac{1}{t}} & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$*

*Démonstration.* Pour les trois premiers processus, la preuve est laissée en exercice.

Pour $X_4$ :

C'est un processus gaussien et il est continu sauf peut-être en 0. On montre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_4(s) X_4(t)] &= \mathbb{E}\left[st \cdot B_{\frac{1}{s}} \cdot B_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= \frac{st}{s \vee t} = s \wedge t\end{aligned}$$

Il reste à voir la continuité en 0. Comme $B$ est continu :

$$\left\{\omega \mid \lim_{t \to 0} B_t = 0\right\} = \bigcap_{m \in n} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \mid \forall t \in \mathbb{Q} \cap \left]0, \frac{1}{n}\right],\ \left|B_t(\omega) \leq \frac{1}{m}\right|\right\}$$

$$\left\{\omega \mid \lim_{t \to 0} X_4(t) = 0\right\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \mid \forall t \in \mathbb{Q} \cap \left]0, \frac{1}{n}\right],\ \left|X_4(t) \leq \frac{1}{m}\right|\right\}$$

Donc $\mathbb{P}\left(\lim_0 X_4(t) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_0 B_t = 0\right) = 1$ car les lois fini-dimensionnelles de $X_4$ et $B$ coïncident. on a bien la continuité en 0. □

Conséquence : $\lim_{t \to 0} t \cdot B_{\frac{1}{t}} = 0$ p.s. et $\lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ presque sûrement par la loi des grands nombres. Soit $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1} - B_k)$. Par le théorème limite centrale et la loi du 0-1, on peut montrer

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ p.s.}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty \text{ p.s.}$$
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\cdot B_{\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ p.s.}$$
$$\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ p.s.}$$
$$\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \text{ p.s.}$$

En particulier, $B$ change de signe une infinité de fois sur tout intervalle $[0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Presque sûrement, $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable en 0.

**Définition 12.** Soient $\left(B^{(1)},\ldots,B^{(d)}\right)$ $d$ mouvements browniens standards indépendants. On dit que $B = \left(B^{(1)},\ldots,B^{(d)}\right)$ est un mouvement brownien standard $d$-dimensionnel.

## 1.4 L'espace de Wiener

Soit $C = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soit $\mathscr{C}$ la tribu des boréliens sur $C$.

**Proposition 13.** *La tribu $\mathscr{C}$ coïncide avec $\mathscr{B}$, la plus petite tribu qui rend mesurable les applications coordonnées* $\begin{cases} C & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x(t) \end{cases}$.

*Démonstration.* Les applications coordonnées sont continues sur $C$ donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$. Pour l'autre inclusion, notons que la topologie est métrisable par la distance

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \sup_{0\le t\le n} |x(t) - y(t)|\right)$$

L'espace $C$ est séparable (par exemple les polynômes à coefficients rationnelles forment une base dénombrable dense). Tout ouvert est donc union dénombrable de boules. Il suffit de montrer que toute boule est dans la tribu $\mathscr{B}$. Il suffit donc de voir que $\forall y \in C$, l'application $x \mapsto d(x,y)$ est mesurable pour la tribu $\mathscr{B}$. On constate que

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,n]} |x(t) - y(t)|\right)$$

qui est $\mathscr{B}$-mesurable. $\square$

Conséquence 1 : si $\mathbb{P}$ et $P$ sont deux mesures de probabilité sur $C$ qui ont les mêmes marginales fini-dimensionnelles (i.e. $\mathbb{P}(\{x \mid x(t_1) \in A_1,\ldots,x(t_n) \in A_n\}) = P(\{x \mid x(t_1) \in A_1,\ldots,x(t_n) \in A_n\})$ pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathscr{B}$ et tout $t_1 \le \ldots \le t_n$) alors $\mathbb{P} = P$, par le lemme des classes monotones.

Conséquence 2 : Soit $B$ un brownien défini sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. L'application $\begin{array}{cccc} \Phi: & \Omega & \to & C \\ & \omega & \mapsto & B(\omega) \end{array}$ est mesurable. En effet, il suffit de vérifier que pour tout $t$, $\omega \mapsto B_t(\omega)$ est mesurable, ce qui est clair par définition d'un processus stochastique.

Conséquence 3 : L'application $G : \begin{cases} \mathbb{R}\times\Omega & \to \mathbb{R} \\ (t,\Omega) & \mapsto B_t(\omega) \end{cases}$ est mesurable. En effet, si $F$ est définie par $F : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times C & \to \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto x(t) \end{cases}$, alors $G(t,\omega) = F(t,\Phi(\omega))$.

**Définition 14.** La mesure de Wiener est la mesure image de $\mathbb{P}$ par $\Phi$, autrement dit la loi de $B$, notée $\mathbb{P}_0$. La définition a un sens car deux browniens $B$ et $B'$ ont même loi par la conséquence 1. L'espace de Wiener est le triplet $(C,\mathscr{C},\mathbb{P}_0)$. L'image de $\mathbb{P}_0$ par l'application $\begin{cases} C & \to C \\ x & \mapsto x+z \end{cases}$ avec $z \in \mathbb{R}$ est la mesure $\mathbb{P}_z$.

## 1.5 Filtration

On note $X : \begin{array}{ccc} C & \to & C \\ \omega & \mapsto & \omega \end{array}$ le processus canonique : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\omega \in C$, $X_t(\omega) = \omega(t)$.

**Définition 15.** Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille de tribus croissante pour l'inclusion. On dit que $(\mathcal{F}_t)_t$ est continue à droite si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Une filtration possible sur $(C, \mathscr{C})$ est $\sigma(\omega \mapsto \omega(s), s \leq t) =: \mathcal{F}_t^0$. Or, $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_t$ n'est pas continue à droite. Exemple : $L = \limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log|\log t|}}$ est $\bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t^0$-mesurable mais pas $\mathcal{F}_0^0$-mesurable. car $\{L = 1\} \in \mathcal{F}_0$ mais $\{L = 1\} \notin \mathcal{F}_0^0$.

On pose $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$ : c'est clairement continu à droite.

**Définition 16.** L'espace de Wiener filtré est le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}\right)$.

## 1.6 Propriété de Markov

### 1.6.1 Propriété de Markov faible

**Proposition 17.** *Pour tout $s \geq 0$, le processus $X_t^{(s)} := X_{t+s} - X_s$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s^0$ sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x$ .*

*Démonstration.* Sous $\mathbb{P}_x$, $X$ est un brownien car il a même loi que $B$", un brownien issu de $x$ : en effet, pour tout $A \in \mathscr{C}$, $\mathbb{P}_x\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}\left(B_x^{-1}(A)\right)$. On a déjà vu que cela implique que $X_t^{(s)}$ est un mouvement brownien. Il reste à justifier l'indépendance. Soient $t_1, \ldots, t_p \geq 0$ et $A_1, \ldots, A_p$ des boréliens de $\mathbb{R}$.$\left\{X_{t_1}^{(s)} \in A_1, \ldots, X_{t_p}^{(s)} \in A_p\right\}$ est indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s) = \mathcal{F}_s^0$. Par le lemme des classes monotones, $\sigma\left(X_t^{(s)}, t \geq 0\right)$ est indépendante de $\mathcal{F}_s^0$ donc $X^{()}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s^0$. □

**Théorème 18.** *Loi du 0-1 de Blumenthal. $\mathcal{F}_0$ est une tribu triviale i.e. pour tout $A \in \mathcal{F}_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}$.*

*Démonstration.* Soit $A \in \mathcal{F}_0$, $t_1 < \ldots < t_p$ et $0 < \varepsilon < t$. La famille $\left(X_{t_1} - X_\varepsilon, \ldots, X_{t_p} - X_\varepsilon\right)$ est indépendante de $\mathcal{F}_\varepsilon^0$ donc de $A$. pour tout $F$ continue bornée,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(X_{t_1} - X_\varepsilon, \ldots, X_{t_p} - X_\varepsilon\right)\right] = \mathbb{P}_x(A)\,\mathbb{E}_x\left[F\left(X_{t_1} - X_\varepsilon, \ldots, X_{t_p} - X_\varepsilon\right)\right]$$

Par continuité en 0,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F\left(X_{t_1} - x, \ldots, X_{t_p} - x\right)\right] = \mathbb{P}_x(A)\,\mathbb{E}_x\left[F\left(X_{t_1} - x, \ldots, X_{t_p} - x\right)\right]$$

$A$ est indépendant de $\sigma((X_s), s \geq 0)$. $A$ est indépendant de $\mathcal{F}_\varepsilon^0$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc de $\mathcal{F}^0 = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon^0$. Ainsi $A$ est indépendant de $A$ d'où $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A)^2$ □

**Corollaire 19.** *La propriété de Markov faible reste vraie si on remplace $\mathcal{F}_s^0$ par $\mathcal{F}_s$.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{F}_t^{(s,0)} = \sigma\left(X_r^{(s)}, r \leq t\right)$. $\mathcal{F}_t^{(s)} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^{(s,0)}$. Par la loi du 0-1, $\mathcal{F}_0^{(s)}$ est triviale. De plus : $\mathcal{F}_s = \sigma\left(\mathcal{F}_s^0, \mathcal{F}_0^{(s)}\right)$. $X^{(s)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s^0$ par la propriété de Markov. $X^{(s)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_0^{(s)}$ car cette tribu est triviale. Donc $X^{(s)}$ est indépendantes de $\mathcal{F}_s$. □

Conséquence : la loi du 0-1 assure que $L$ = constante $\mathbb{P}_0$-presque sûrement. Si $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t > 0\}$, $\mathbb{P}(T \leq t) \geq \frac{1}{2}$ par symétrie donc $\mathbb{P}(T = 0) \geq \frac{1}{2}$. Par la loi du 0-1, $\mathbb{P}(T = 0) = 1$.

**Théorème 20.** *Soit $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{t\geq 0} \sigma(X_s, s \geq t)$. La tribu $\mathcal{F}^\infty$ est triviale : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_x(\mathcal{F}^\infty) \in \{0, 1\}$.*

*Démonstration.* $\tilde{X} : t \mapsto t \cdot X_{\frac{1}{t}}$ est un brownien sous $\mathbb{P}_0$. On transforme un événement $A \in \mathcal{F}^\infty$ en un événement $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}_0$. cette tribu est triviale, donc $\mathbb{P}_0(A) \in \{0, 1\}$. L'application $\begin{cases} C & \to C \\ \omega & \mapsto \omega + x \end{cases}$ préserve l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$ mais change $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_x$. Donc on en déduit le résultat sous $\mathbb{P}_x$. □

**Exercice.** Si $A \in \mathcal{F}^\infty$, alors $\mathbb{P}_x(A)$ ne dépend pas de $x$.

### 1.6.2 Temps d'arrêt

**Définition 21.** Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$, l'événement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

**Exemple.** 1) Un temps d'arrêt constant est un temps d'arrêt.

2) Pour $a$ fixé, $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = a\}$ est un temps d'arrêt : $\{T_a \leq t\} = \left\{ \sup\limits_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,s]} X_s \geq a \right\}$

**Proposition 22.** *$T$ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

*Démonstration.* "⇒" facile

"⇐" $\{T \leq t\} = \bigcap\limits_{\varepsilon < 0} \{T < t + \varepsilon\} \in \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t$ par continuité à droite de la filtration. □

**Proposition 23.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^d$ pour le brownien multi-dimensionnel) et soit $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \mathcal{O}\}$. Alors, $T$ est un temps d'arrêt.*

*Démonstration.* Il suffit de voir $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ : $\{T < t\} = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t[} \{X_s \in \mathcal{O}\} \in \mathcal{F}_t$. □

*Remarque.* La démonstration utilise seulement la continuité à droite du processus.

**Proposition 24.** *Soit $T_n$ une suite de temps d'arrêt. Les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêt :*
*1)* $\sup T_n$
*2)* $\inf T_n$
*3)* $\limsup T_n$
*4)* $\liminf T_n$

*Démonstration.* 1) $\{\sup T_n \leq t\} = \bigcap\limits_n \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

2) $\{\inf T_n\} = \bigcup\limits_n \{T_n \geq t\}$

3) $\limsup T_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} T_k$ donc c'est bon.

4) idem □

**Proposition 25.** *Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^d$ pour le brownien multi-dimensionnel) et soit $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in F\}$. Alors, $T$ est un temps d'arrêt.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{O}_n := \left\{x \mid \exists y \in F,\ |x - y| < \frac{1}{n}\right\}$. $\mathcal{O}_n$ est un ouvert qui contient $F$. On note $T_n$ le temps d'atteinte de $\mathcal{O}_n$. $T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt. Soit $S = \lim\limits_n T_n$. Par la propriété précédente, $S$ est un temps d'arrêt. Clairement, $T_n \leq T$ donc $S \leq T$. On veut montrer que $S \geq T$.

Si $S = +\infty$ il n'y a rien à démontrer.

Si $S < +\infty$, $X_{T_n} \in \overline{\mathcal{O}_n} \subset \overline{\mathcal{O}_m}$ pour $n \leq m$. En utilisant la continuité des trajectoires, $\lim\limits_{n \to \infty} X_{T_n} = X_S \in \overline{\mathcal{O}_m}$ donc $X_S \in \bigcap\limits_m \overline{\mathcal{O}_m} = F$ donc $T \leq S$ et $T$ est un temps d'arrêt. □

*Remarque.* On utilise la continuité à gauche de $X$. En fait, on a seulement besoin de la quasi-continuité à gauche, i.e. pour tout $T_n$ et $T$ temps d'arrêt tels que $T_n \to T$ et $T_n \leq T$ alors $X_{T_n} \to X_T$.

**Définition 26.** On définit la tribu associée au temps d'arrêt $T$ par $\mathcal{F}_T = \{A \text{ mesurable } \mid \{T \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t\}$.

Définition d'un processus adapté :

**Définition 27.** Un processus stochastique $(Y_t)_t$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, $Y_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

**Proposition 28.** *Soient $T, T_n$ des temps d'arrêt.*
*1) $T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
*2) si $T_1 \leq T_2$, $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.*
*3) Si $T_n \searrow T$, alors $\mathcal{F}_T = \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{T_n}$.*
*4) Si $(Y_t)$ est adapté et continu à droite (càd $t \mapsto T_t$ est presque sûrement continue à droite) alors $Y_T \mathbb{1}_{\{T < \infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

*Démonstration.* 1) On doit vérifier que $\{T \le s\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout $s$ : $\{T \le s\} \cap \{T \le t\} = \{T \le s \wedge t\} \in \mathcal{F}_T$.

2) Soient $t \ge 0$ et $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. $A \cap \{T_2 \le t\} = (A \cap \{T_1 \le t\}) \cap \{T_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

3) Il est clair que $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$ d'où $\mathcal{F}_T \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$,

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_n A \cap \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\begin{aligned} A \cap \{T \le t\} &= \bigcap_{\varepsilon > 0} A \cap \{T < t + \varepsilon\} \\ &\in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

4) Si $T$ prend des valeurs dans un ensemble dénombrable $\{t_1, t_2, \ldots\}$ alors avec $\mathcal{B}$ borélien,

$$\left\{Y_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \in \mathcal{B}\right\} \cap \{T \le t\} = \bigcup_{k,\ t_k \le t} \{T = t_k, Y_{t_k} \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F}_t$$

Supposons $T < +\infty$ presque sûrement. on approche $T$ par $T_n = \frac{k+1}{2^n}$ si $\frac{k}{2^n} \le T < \frac{k+1}{2^n}$ avec $k$ entier (autrement dit $T_n = \frac{\lfloor 2^n T \rfloor + 1}{2^n}$). Alors,

$$\{T_n \le t\} = \left\{T < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t$$

si $\frac{k}{2^n} \le t < \frac{k+1}{2^n}$. On a donc bien que $T_n$ est un temps d'arrêt. Or, $T_n \searrow T$. Comme $Y$ est continu à droite, $Y_{T_n} = \lim_{n \to +\infty} Y_T$, $Y_{T_n}$ est $\mathcal{F}_{T_n}$-mesurable (OK car $T_n$ prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable) et $T_n \le T_m$ pour $n \ge m$ : $\mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{T_m}$. $Y_{T_n}$ est $\mathcal{F}_{T_m}$-mesurable. $Y_T$ est $\mathcal{F}_{T_m}$ mesurable. $Y_t$ est $\bigcap_m \mathcal{F}_{T_m}$-mesurable c'est à dire $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Il reste à voir les cas où $T = \infty$ est autorisé. On peut utiliser le résultat pour $T \wedge m$ : $Y_{T \wedge m}$ est $\mathcal{F}_{T \wedge m}$-mesurable donc $\mathcal{F}_T$-mesurable.

$Y_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \lim_{n \to \infty} Y_{T \wedge n} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. □

### 1.6.3 Propriété de Markov forte

**Théorème 29.** *Soit $T$ un temps d'arrêt. Sur l'événement $\{T < \infty\}$, le processus $X^{(T)}$ défini par*

$$X_t^{(T)} = (X_{t+T} - X_T)\, \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}$$

*est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.*

*Démonstration.* Supposons $T < \infty$ presque sûrement. On va montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \le t_1 < \ldots < t_p$ et pour tout $F$ continue bornée,

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_A F\left(X_{t_1}^{(T)}, \ldots, X_{t_p}^{(T)}\right)\right] = \mathbb{P}_0(A)\, \mathbb{E}_0\left[F\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}\right)\right]$$

Si $A = \Omega$, l'égalité montre que la loi de $X^{(T)}$ est la loi d'un mouvement brownien (il est clair que $t \mapsto X_t^{(T)}$ est continu). L'indépendance suit de l'égalité générale.

$$F\left(X_{t_1}^{(T)}, \ldots, X_{t_p}^{(T)}\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k}{2^n} \le T < \frac{k+1}{2^n}\right\}} F\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, X_{\frac{k}{2^n}+t_p} - X_{\frac{k}{2^n}}\right)$$

par continuité des trajectoires et de $F$. Par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_A F\left(X_{t_1}^{(T)}, \ldots, X_{t_p}^{(T)}\right)\right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A \cap \left\{\frac{k}{2^n} \le T < \frac{k+1}{2^n}\right\}} F\left(X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, X_{\frac{k}{2^n}+t_p} - X_{\frac{k}{2^n}}\right)\right]$$

L'événement $A \cap \left\{\frac{k}{2^n} \le T < \frac{k+1}{2^n}\right\}$ est dans $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$, $(A \cap \left\{T \le \frac{k}{2^n}\right\}$ est dans $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subset \mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^n}})$. Par la propriété de Markov faible,

$$\mathbb{E}_0[\cdot] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A \cap \left\{\frac{k}{2^n} \le T < \frac{k+1}{2^n}\right\}}\right] \mathbb{E}_0\left[F\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}\right)\right]$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_A F\left(X_{t_1}^{(T)},\dots,X_{t_p}^{(T)}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A\cap\left\{\frac{k}{2^n}\leq T<\frac{k+1}{2^n}\right\}}\right]\mathbb{E}_0\left[F\left(X_{t_1},\dots,X_{t_p}\right)\right]\\ &= \mathbb{P}_0\left(A\right)\mathbb{E}_0\left[F\left(X_{t_1},\dots,X_{t_p}\right)\right]\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}_0\left(T=+\infty\right)>0$,

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T<+\infty\}}F\left(X_{t_1}^{(T)},\dots,X_{t_p}^{(T)}\right)\right]=\mathbb{P}_0\left(A\cap\{T<+\infty\}\right)\mathbb{E}_0\left[F\left(X_{t_1},\dots,X_{t_p}\right)\right]$$

(la preuve est identique à la précédente). □

**Lemme 30.** *Soit $f(\cdot,\cdot)$ une fonction mesurable positive, $Y$ $\mathcal{G}$-mesurable, $Z$ est indépendante de $\mathcal{G}$. Alors,*

$$\mathbb{E}\left[f\left(Y,Z\right)\mid\mathcal{G}\right]=g\left(Y\right)\quad p.s.$$

*où $g(y)=\mathbb{E}\left[f\left(y,Z\right)\right]$.*

*Démonstration.* Soit $X$ une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable. $(X,Y)$ et $Z$ sont indépendantes. la loi jointe de $(X,Y,Z)$ a la forme $\mu\left(x,y\right)\otimes\nu\left(z\right)$. On veut vérifier

$$\mathbb{E}\left[Xf\left(Y,Z\right)\right] \quad=\quad \mathbb{E}\left[Xg\left(Y\right)\right]$$

$\mathbb{E}\left[Xf\left(Y,Z\right)\right]=\int xf\left(y,z\right)d\mu\left(x,y\right)d\nu\left(z\right)=\int x\int f\left(y,z\right)d\nu\left(z\right)d\mu\left(x,y\right)$ par Fubini donc $\mathbb{E}\left[Xf\left(Y,Z\right)\right]=\int xg(y)d\mu\left(x,y\right)=\mathbb{E}\left[Xg\left(Y\right)\right]$. □

On peut donner à la propriété de Markov une reformulation plus adaptée à des processus “moins homogènes”. On définit les trajectoires temporelles $\theta_s:\ C\ \to\ C$ par $\left(\theta_s\omega\right)(t)=\omega\left(t+s\right)$. On se place sur l'espace canonique de Wiener.

**Théorème 31.** *Soit $F$ une variable aléatoire positive sur $\Omega=C$ et soit $T$ un temps d'arrêt. Pour tout $x$,*

$$\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_T\mid\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right]\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}\quad\mathbb{P}_x\text{-}p.s.$$

*Démonstration.* $T<+\infty$ presque sûrement.

$$\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_t\mid\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{E}_x\left[F\left(X^{(T)}+X_T\right)\mid\mathcal{F}_T\right]$$

$X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, $X^{(T)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_T$.

Soit $g(y)=\mathbb{E}_x\left[F\left(X^{(T)}+y\right)\right]=\mathbb{E}_y\left[F\right]$ car $X^{(T)}$ a pour loi $\mathbb{P}_0$. Par le lemme, $\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_T\mid\mathcal{F}_T\right]=g\left(X_T\right)=\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right]$. □

### 1.6.4 Principe de réflexion

Soit $M_t=\sup_{0\leq s\leq t}X_s$.

**Théorème 32.** *Principe de réflexion. Soit $a>0$ et $b<a$. Pour tout $t>0$,*

$$\mathbb{P}_0\left(M_t\geq a,\ X_t\leq b\right)=\mathbb{P}_0\left(X_t\geq 2a-b\right)$$

*Remarque.* Cela décrit complètement la loi jointe $(M_t,X_t)$.

*Démonstration.* Soit $T=\inf\left\{s\geq 0,\ X_s=a\right\}$ (on a vu que $\limsup\frac{B_t}{\sqrt{t}}=+\infty$ et $\liminf\frac{B_t}{\sqrt{t}}=-\infty$ $\mathbb{P}_0$-p.s. donc $T<+\infty$ presque sûrement). On pose $\overline{X}_t=X_{t+T}-X_T=X_{t+T}-a$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\left(M_t\geq a,\ X_t\leq b\right) &= \mathbb{P}_0\left(T\leq t,\ X_t\leq b\right)\\ &= \mathbb{P}_0\left(T\leq t,\ \overline{X}_{t-T}\leq b-a\right)\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov forte, $T$ et $\overline{X}$ sont indépendantes et $\overline{X}$ est un mouvement brownien issu de 0 donc $-\overline{X}$ est un brownien issu de 0. $T$ et $-\overline{X}$ sont indépendantes. Donc $\left(T, \overline{X}\right)$ et $\left(T, -\overline{X}\right)$ ont la même loi. Soit $A = \{(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times C \mid s \leq t \text{ et } x_{t-s} \leq b - a\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0\left(\left(T, \overline{X}\right) \in A\right) &= \mathbb{P}_0\left(\left(T, -\overline{X}\right) \in A\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(T \leq t,\ -\overline{X}_{t-T} \leq b - a\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(T \leq t,\ -X_t + a \leq b - a\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(T \leq t,\ X_t \geq 2a - b\right)
\end{aligned}$$

Or, $X_t \geq 2a - b \Rightarrow X_t \geq a \Rightarrow T \leq t$ donc $\mathbb{P}_0\left(T \leq t,\ X_t \leq 2a - b\right) = \mathbb{P}_0\left(X_t \geq 2a - b\right)$. □

Conséquence 1 : $M_t$ et $|X_t|$ ont la même loi pour tout $t$ fixé.

$$\mathbb{P}\left(M_t \geq a\right) = \mathbb{P}\left(M_t \geq a,\ X_t < a\right) + \mathbb{P}\left(M_t \geq a,\ X_t \geq a\right)$$

Par le théorème précédent et passage à la limite,

$$\mathbb{P}_0\left(M_t \geq a,\ X_t < a\right) = \mathbb{P}\left(X_t > a\right)$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}_0\left(M_t \geq a,\ X_t \geq a = \mathbb{P}_0\left(X_t \geq a\right)\right)$$

donc

$$\mathbb{P}_0\left(M_t \geq a\right) = 2\mathbb{P}_0\left(X_t \geq a\right) = \mathbb{P}_0\left(|X_t| \geq a\right)$$

Conséquence 2 :

**Exercice.** Montrer que $(M_t - X_t)$ et $|X_t|$ ont la même loi pour chaque $t$ fixé (en fait les deux processus ont la même loi).

Conséquence 3 : Soit $T = \inf\{t \geq 0,\ X_t = 0\}$. pour tout $x \neq 0$,

$$\mathbb{P}_x\left(T \leq t\right) = \int_0^t \frac{|x|}{\sqrt{2\pi z^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2z}\right) dz$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(T \leq t\right) &= \mathbb{P}_{|x|}\left(T \leq t\right) \\
&= \mathbb{P}_{|x|}\left(\exists s \leq t,\ X_s = 0\right) \\
&= \mathbb{P}_{|x|}\left(\exists s \leq t,\ X_s = 2\,|x|\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(M_t \geq |x|\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(|X_t| \geq |x|\right) \\
&= 2\mathbb{P}_0\left(X_t \geq |x|\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy
\end{aligned}$$

On pose $y = |x| \sqrt{\frac{t}{z}}$ et ça fonctionne.

### 1.6.5 Zéros du brownien

**Proposition 33.** *Soit $Z = \{t \geq 0,\ X_t = 0\}$. $\mathbb{P}_0$-presque sûrement, l'ensemble $Z$ est parfait (i.e. c'est un fermé tel que tout point est point d'accumulation de $Z$).*

*Démonstration.* $Z$ est fermé car $X$ est continue. Soit $T_a = \inf\{t \geq a,\ X_t = 0\}$. Soit $A = \left\{\exists\, (t_n)_n \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}\right.$ tendant vers $0 \mid X_{t_n} =$
$A$ est l'événement : "0 est un point d'accumulation à droite". $\mathbb{P}_0(A) = 1$ (déjà vu). Par propriété de Markov forte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_A \circ \theta_{T_a} \mid \mathcal{F}_{T_a}\right] &= \mathbb{E}_{X_{T_a}}\left[\mathbb{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_A\circ\theta_{T_A}\right]=1$. $\{X \mid \theta_{T_a}X\in A\}=\{\exists t_n\to 0, t_{n>0}\div\text{mid }\forall n, X_{T_a+t_n}=0\}$. Presque sûrement, $\forall a\in\mathbb{Q}_+$, $T_a$ est un point d'accumulation à droite. Soit $x\in Z\setminus\bigcup_{a\in\mathbb{Q}_+}T_a$. Alors, $\forall a\in\mathbb{Q}_+$, $a<x$ il existe un $x'\in]a,x[\cap Z$. Donc $x$ est un point d'accumulation à gauche. $\square$

L'ensemble $Z$ a une mesure nulle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_Z(t)dt\right] &= \int_0^{+\infty}\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_Z(t)\right]dt\\
&= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}_0\left(X_t=0\right)dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

### 1.6.6 Un contre-exemple pour la propriété de Markov

La propriété de Markov faible n'implique pas la propriété de Markov forte en général. Soit, pour tout $x\neq 0$, $\mathbb{P}_x$ la loi usuelle du brownien partant de $x$ et $\mathbb{P}_0$ le dirac sur la trajectoire $X=0$. Alors, pour tout $s>0$, $F$ mesurable positive et $x$,

$$\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_s \mid \mathcal{F}_s\right]=\mathbb{E}_{X_s}\left[F\right]\quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

C'est vrai :
si $x\neq 0$ car $X_s\neq 0$ $\mathbb{P}_x$-p.s. (et par la propriété usuelle)
si $x=0$ (évident)

On n'a pas la propriété de Markov forte : Soit $T=\inf\{t\geq 0 \mid X_t=0\}$. On n'a pas $\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_T\mid\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right]$ car $\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right]=\mathbb{E}_0\left[F\right]=F\left(t\mapsto 0\right)\neq\mathbb{E}_x\left[F\circ\theta_T\mid\mathcal{F}_T\right]$. Pour avoir Markov faible $\Longrightarrow$ Markov faible, il semble nécessaire que $\mathbb{P}_{x_n}\to\mathbb{P}_x$ quand $x_n\to x$.

## 2 Martingales

Tous les résultats sur les martingales à temps discret sont supposés connus. Soit $\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ espace de probabilité muni d'une filtration continue à droite.

**Définition 34.** Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ adapté et tel que pour tout $t$, $\mathbb{E}\left[|M_t|\right]<+\infty$ est :
une martingale si pour tout $s,t\geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_{t+s}\mid\mathcal{F}_s\right]=M_t$
une sur-martingale si pour tout $s,t\geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_{t+s}\mid\mathcal{F}_s\right]\leq M_t$
une sous-martingale si pour tout $s,t\geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_{t+s}\mid\mathcal{F}_s\right]\geq M_t$

**Exemple 35.** Soit $(X_t)_t$ processus adapté et a accroissements indépendants par rapport à $(\mathcal{F}_t)_t$ i.e. pour tout $s,t\geq 0$, $(X_{t+s}-X_t)$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. On a :
i) si $X_t\in L^1$ pour tout $t$ alors $M_t=X_t-\mathbb{E}\left[X_t\right]$ est une martingale
ii) si $X_t\in L^2$ pour tout $t$, alors $\overline{M_t}=M_t^2-\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$ est une martingale
iii) si pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}\right]<+\infty$, alors $N_t=\frac{e^{\lambda X_t}}{\mathbb{E}[e^{\lambda X_t}]}$ est une martingale.

*Démonstration.* i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{t+s}\mid\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[(X_{t+s}-X_t)+X_t\mid\mathcal{F}_t\right]\\
&= X_t+\mathbb{E}\left[X_{t+s}-X_t\right]\\
\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[M_{t+s}\mid\mathcal{F}_t\right] &= X_t+\mathbb{E}\left[X_{t+s}-X_t\right]-\mathbb{E}\left[X_{t+s}\right]\\
&= M_{t+s}
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{t+s}^2 \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(M_{t+s}-M_t+M_t\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(M_{t+s}-M_t\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] + 2\mathbb{E}\left[M_{t+s}-M_t \mid \mathcal{F}_t\right]\cdot M_t + M_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(M_{t+s}-M_t\right)^2\right] + M_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t+s}^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_{t+s}\cdot M_t\right] + \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + M_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t+s}^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\right] M_t\right] + \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + M_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t+s}^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + M_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t+s}^2\right] - \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + M_t^2
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left[\overline{M_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t\right] = -\mathbb{E}\left[M_t^2\right] + M_t^2 = \overline{M_t}$

iii) $\mathbb{E}\left[N_{t+s}\mathcal{F}_t\right] = \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\left(X_{t+s}-X_t+X_t\right)} \mid \mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\left(X_{t+s}-X_t+X_t\right)}\right]} = e^{\lambda X_t}\frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\left(X_{t+s}-X_t\right)}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\left(X_{t+s}-X_t\right)}\right]\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}\right]} = N_t$ ☐

Par exemple si $B$ est un brownien, $t \mapsto B_t$ est une martingale (1), $t \mapsto B_t^2 - t$ est une martingale (2) et $t \mapsto \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ est une martingale.

*Remarque.* Les propriétés (1)-(2) caractérisent le mouvement brownien parmi les processus adaptés continues (caractérisation due à Paul Lévy).

**Proposition 36.** *Soit $\left(M_t\right)_t$ une martingale et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(M_t\right)\right|\right] < \infty$. Alors, $\left(\phi\left(M_t\right)\right)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale.*

*Démonstration.* $\mathbb{E}\left[\phi\left(M_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \underset{\text{Jensen}}{\geq} \phi\left(\mathbb{E}\left[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\right]\right) = \phi\left(M_t\right)$. ☐

*Remarque.* La propriété est aussi vraie si $M$ est une sous-martingale et $\phi$ est convexe croissante.

Conséquence : si $\left(M_t\right)$ est une martingale, alors $\left|M_t\right|, M_t^+$ sont des sous-martingales. Si $M_t \in L^p$ pour tout $t$ $(p \geq 1)$ alors $\left(\left|M_t\right|^p\right)_t$ est une sous-martingale.

**Proposition 37.** *Si $\left(M_t\right)_t$ est une sous-martingale (resp. une sur-martingale), alors pour tout $t \geq 0$, $\sup_{s\leq t}\mathbb{E}\left[\left|M_s\right|\right] < +\infty$.*

*Démonstration.* Il suffit de le voir pour une sous-martingale (si $M$ est une sur–martingale, $-M$ est une sous-martingale).

Soit donc $M$ une sous-martingale. $\left(M_t^+\right)_t$ est une sous-martingale. $\mathbb{E}\left[M_s^+\right] \leq \mathbb{E}\left[M_t^+\right]$. $\left(M_t\right)_t$ est une sous-martingale donc $\mathbb{E}\left[M_s\right] \geq \mathbb{E}\left[M_0\right]$. Or $|x| = 2x^+ - x$ donc

$$\mathbb{E}\left[\left|M_s\right|\right] = 2\mathbb{E}\left[M_s^+\right] - \mathbb{E}\left[M_s\right] \leq 2\mathbb{E}\left[M_t^+\right] - \mathbb{E}\left[M_0\right]$$

☐

**Proposition 38.** *Soit $\left(M_t\right)_t$ martingale de carré intégrable. Soit $0 \leq s = t_0 < \ldots < t_p = t$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^p \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(M_t - M_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

*En particulier, $\mathbb{E}\left[\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}}^2\right] - \mathbb{E}\left[M_{t_i}^2\right]$.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] - 2M_{t_{i-1}}\mathbb{E}\left[M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] + M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

☐

**Proposition 39.** *Inégalité maximale. Soit $(X_t)_t$ une sur-martingale (resp une sur-martingale) continue à droite. Pour tout $t > 0$ et $\lambda > 0$,*

$$\lambda \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} |X_s| > \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_0|\right] + 2 \cdot \mathbb{E}\left[|X_t|\right]$$

*Inégalité de Doob. Soit $(X_t)_t$ une martingale continue à droite. Pour tout $t > 0$ et $p > 1$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

*Démonstration.* Fixons $t > 0$ et soit $D$ un sous-ensemble dénombrable dense de $[0, t]$ tel que $0 \in D$, $t \in D$. On écrit$D = \underset{m}{\cup} D_m$ avec $D_m$ fini et $D_m \subset D_{m+1}$. Par exemple card$D_m = m + 1$ et $D_m = \{t_0^m, \ldots, t_m^m\}$ avec $t_0^m = 0$ et $t_m^m = t$. La suite $Y_n^{(m)} = X_{t^m_{n \wedge m}}$. $Y^{(m)}$ est une martingale pour la filtration $\left(\mathcal{F}_{t^m_{n \wedge m}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Par la version discrète de l'inégalité maximale,

$$\lambda \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \{0, \ldots, m\}} \left|Y_n^{(m)}\right| > \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_0|\right] + 2 \cdot \mathbb{E}\left[|X_t|\right]$$

$$\lambda \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{s \in D_m} |X_s| > \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_0|\right] + 2 \cdot \mathbb{E}\left[|X_t|\right]$$

Par passage à la limite, comme $\left\{\sup_{s \in D_m} |X_s| > \lambda\right\}_m$ est une suite croissante, on a

$$\underbrace{\lambda \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{s \in D} |X_s| > \lambda\right)}_{= \sup_{s \in [0,t]} |X_s|} \quad \leq \quad \mathbb{E}\left[|X_0|\right] + 2 \cdot \mathbb{E}\left[|X_t|\right]$$

Le raisonnement pour Doob est similaire :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in D_m} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in D} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

Par continuité à droite, on a le résultat. □

**Définition 40.** Si $f = I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}_+$, on définit le nombre de montées de $X$ de $a$ à $b$ où $a < b$ comme le plus grand $k \geq 1$ tel qu'il existe $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_k < t_k$ tous dans $I$ et tel que $X_{s_i} < a$, $X_{t_i > b}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ (le nombre de montées est égal à 0 s'il n'existe pas de tel $k$). On le note $U_{ab}^X(I)$.

**Proposition 41.** *Inégalité du nombre de montées. Soit $(X_t)_t$ une sur-martingale continue à droite et soit $a < b$, $t > 0$. Alors,*

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X([0, t])\right] \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right]$$

*Démonstration.* On reprend $D_m$ défini comme précédemment. Par l'inégalité du nombre de montées discrète,

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X(D_m)\right] \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right]$$

$U_{ab}^X(D_m)$ converge en croissant vers $U_{ab}^X(D)$ quand $m \to +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X(D)\right] \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right]$$

On conclut par continuité à droite. □

**Théorème 42.** *Théorème de convergence des martingale presque sûr. Soit $X$ une surmartingale continue à droite et bornée dans $L^1$ : $\sup_t \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. Alors, il existe $X_\infty \in L^1$ tel que $X_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} X_\infty$ presque sûrement.*

*Démonstration.* On a vu que pour tout $a < b$ et pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}\left[U_{ab}^X([0,t])\right] \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}\left[(X_t - a)^-\right]$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\mathbb{E}\left[U_{ab}^X([0,t])\right] \leq \frac{1}{b-a} \cdot C$$

avec $C = \sup_t \mathbb{E}[|X_t|] + a < \infty$. Presque sûrement, pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, $U_{ab}^X(\mathbb{R}_+) < +\infty$. Ceci implique $X_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} X_\infty \in [-\infty, +\infty]$ (convergence presque sûre). Par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$$

Donc $X_\infty \in L^1$ (en particulier, $|X_\infty| \neq +\infty$). □

*Remarque.* La condition $\sup \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ est vérifiée dès que $(X_t)$ est une sur-martingale positive.

**Définition 43.** Une famille de variables aléatoires $(X_t)_t$ est uniformément intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m > 0$ tel que pour tout $t$,

$$\mathbb{E}\left[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq m\}}\right] \leq \varepsilon$$

**Proposition 44.** *Soit $(X_t)_t$ uniformément intégrable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A$ mesurable,*

$$\mathbb{P}(A) \leq \delta \implies \forall t,\ \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$$

*Démonstration.* Soit $m$ tel que $\mathbb{E}\left[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq m\}}\right] \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_A] &\leq \mathbb{E}\left[|X_t| \mathbb{1}_{A\cap\{|X_t| \geq m\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_t| \mathbb{1}_{A\cap\{|X_t| \leq m\}}\right] \\ &\leq \varepsilon + m \cdot \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$ pour $2\varepsilon$. □

Conséquence : Soit $Z \in L^1$. Alors, $(\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}])$ (où $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$) est uniformément intégrable.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A$ mesurable, $\mathbb{P}(A) \leq \delta \implies \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}]| \mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]| \geq m\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|Z| \mid \mathcal{G}] \mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]| \geq m\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|Z| \mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]| \geq m\}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}]| \geq m) &\leq \frac{\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}]|]}{m} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{m} \end{aligned}$$

On prends $m = \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{\delta}$ et c'est bon. □

**Définition 45.** Une martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite fermée s'il existe $Z \in L^1$ tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_t]$.

**Proposition 46.** *Soit $(X_t)$ une martingale continue à droite. il y a équivalence entre :*
*1) $(X_t)$ est une martingale fermée*
*2) $X_t$ converge presque sûrement et dans $L^1$ quand $t \to \infty$.*
*3) $(X_t)$ est uniformément intégrable.*

*Démonstration.* 1) $\Longrightarrow$ 3) déjà vu

3) $\Longrightarrow$ 2) par le théorème de convergence, $X_t \to X_\infty$ p.s. $(X_t)$ uniformément intégrable $\implies$ la convergence a lieu dans $L^1$.

2) $\Longrightarrow$ 1 $X_\infty = \lim X_t$. $X_s = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$. $X_t \to X_\infty$ dans $L^1$ donc $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_s]$ et $X_s = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_s]$. □

*Remarque.* Il n'est pas vrai que $X_t \overset{\text{p.s}}{\to} X_\infty$ implique $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \overset{\text{p.s}}{\to} \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_s]$.

Si $X_t \overset{\text{ps}}{\to} X_\infty$ et si $T$ est un temps d'arrêt, on note

$$X_T = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} X_T + \mathbb{1}_{\{T=\infty\}} X_\infty$$

$X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

**Théorème 47.** *Théorème d'arrêt. Soit $(X_t)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Soient $S$ et $T$ deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Alors, $X_S$ et $X_T$ sont dans $L^1$ et $X_S = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_s]$. En particulier, $X_S = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_s]$ et $\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$.*

*Démonstration.* On utilise le résultat en temps discret. Soit $S_n = \frac{1}{2^n}\lceil 2^n S \rceil$ et $T_n = \frac{1}{2^n}\lceil 2^n T \rceil$ . On a $S_n \searrow S$ et $T_n \searrow T$. $S_n$et $T_n$ sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}\right)_k$ . Par le résultat discret,

$$X_{S_n} = \mathbb{E}[X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n}]$$

Soit $A \in \mathcal{F}_s$. On veut $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_S] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_T]$ car $X_S$ est $\mathcal{F}_S$ mesurable. $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$. On a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{S_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{T_n}]$$

On a également $X_{S_n} \overset{\text{ps}}{\to} X_S$ et $X_{T_n} \overset{\text{ps}}{\to} X_T$ par continuité à droite. Toujours par le résultat discret, $X_{S_n}\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_{S_n}]$ donc $X_{S_n}$ est uniformément intégrable. Donc $X_{S_n} \overset{L^1}{\to} X_S$. De même, $X_{T_n} \overset{L^1}{\to} X_T$. On a donc $X_S, X_T \in L^1$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_S] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_T]$ i.e $X_S = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S]$. ☐

*Remarque.* On peut montrer un résultat analogue : si $X_t$ est une surmartingale fermée par $X_\infty$ ie pour tout $t \geq 0$, $X_t \geq \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ et si $S \leq T$ alors $X_S \geq \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$.

**Proposition 48.** *Soit $(X_t)$ une martingale continue à droite et $S \leq T$ des temps d'arrêt bornés presque sûrement alors $X_S, X_T \in L^1$ et $X_S = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S]$.*

*Démonstration.* Soit $m$ tel que $T \leq m$ presque sûrement. $(X_{t\wedge m})_t$ est une martingale fermée par $X_m$. Il suffit 'appliquer le théorème d'arrêt à cette martingale. ☐

*Remarque.* De même, si $(X_t)$ est une surmartingale continue à droite et $S \leq T$ temps d'arrêt bornés alors $X_S \geq \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_s]$.

**Proposition 49.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$une martingale continue à droite et $T$ un temps d'arrêt. Alors,*

*1) $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale*

*2) Si $(X_t)_t$ est uniformément intégrable, alors $(X_{t\wedge T})_t$ est uniformément intégrable et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_t] = X_{t\wedge T}$.*

*Démonstration.* On commence par montrer 2). On sait déjà $X_T \in L^1$ et $X_{t\wedge T} = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}]$ par le théorème d'arrêt. $X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. $X_T \mathbb{1}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et aussi $\mathcal{F}_T$-mesurable donc aussi $\mathcal{F}_{T\wedge t}$-mesurbale.

$$\mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T\leq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] = X_T \mathbb{1}_{\{T\leq t\}} = \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T\leq t\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Il reste à voir :

$$\mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Soit $A \in \mathcal{F}_t$. $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$. On a aussi $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ donc dans $\mathcal{F}_{t\wedge T}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>t\}} \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right]\right] \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right]$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable donc on a bien $\mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T>t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}\right]$. En résumé,

$$X_{t\wedge T} = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t]$$

donc $(X_{t\wedge T})_t$ est une martingale fermée donc uniformément intégrable.

Pour montrer 1), on observe que pour tout $t_0 \geq 0$ fixé, $(X_{t\wedge t_0})_t$ est une martingale fermée (par $X_{t_0}$). Donc $(X_{t\wedge t_à \wedge T})_{t\geq 0}$ es une martingale. Si $t \leq t_0$,

$$X_{t\wedge T} = \mathbb{E}[X_{t_0\wedge T} \mid \mathcal{F}_t]$$

donc $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale. ☐

**Exemple 50.** 1) $T = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$ pour le brownien partant de 1. $(B_{t\wedge T})_t$ est une martingale positive. $B_{t\wedge T} \overset{\text{ps}}{\to} 0$. Mais on a pas de convergence dans $L^1$, pas uniformément intégrable, pas fermée etc...

2) Soit $B$ un brownien issu de 0 et soit $a < 0 < b$, $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ $T_b = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = b\}$. $T = T_a \wedge T_b < \infty$ presque sûrement. On a :

$$\mathbb{P}_0(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}$$

et

$$\mathbb{P}_0(T_b < T_a) = \frac{-a}{b-a}$$

en effet, soit $M_t = B_{t\wedge T}$ martingale bornée donc uniformément intégrable.

$$0 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[B_T] = \mathbb{P}(T_a < T_b)\,a + \mathbb{P}(T_b < T_a)\,b$$

3) $T = \inf\{t \geq 0 \mid |B_t| = 1\}$. $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale. Soit $n > 0$, $(M_{t\wedge T\wedge n})_{t\geq 0}$ martingale bornée.

$$0 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{T\wedge n}]$$

$$\mathbb{E}\left[B_{T\wedge n}^2\right] = \mathbb{E}[T\wedge n]$$

d'où, par convergence dominée et convergence monotone, en passant à la limite,

$$\mathbb{E}\left[B_t^2\right] = \mathbb{E}[T] = 1$$

**Proposition 51.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ surmartingale positive continue à droite et $S \leq T$ un temps d'arrêt. Alors, $X_S$ et $X_T$ sont dans $L^1$ et*

$$\mathbb{E}\left[X_S \mathbb{1}_{\{S<\infty\}}\right] \geq \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right]$$

*Démonstration.* On a vu le résultat si $S$ et $T$ sont des temps d'arrêt bornés. Donc, pour tout $n$,

$$\mathbb{E}[X_{S\wedge n}] \geq \mathbb{E}[X_{T\wedge n}]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{S\wedge n}\mathbb{1}_{\{S>n\}}\right] &= \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{S>n\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{T>n\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\mathbb{1}_{\{T>n\}}\right] \end{aligned}$$

En prenant la différence,

$$\mathbb{E}\left[X_{S\wedge n}\mathbb{1}_{\{S\leq n\}}\right] \geq \mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\right] &= \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\right] \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right] \end{aligned}$$

car $X_T \geq 0$ et par le théorème de convergence monotone.

$$\mathbb{E}\left[X_S \mathbb{1}_{\{S<\infty\}}\right] \geq \mathbb{E}\left[X_S \mathbb{1}_{\{S\leq n\}}\right]$$

$\square$

Quelques résultats techniques pour le chapitre suivant :

**Proposition 52.** *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ une surmartingale bornée. Presque sûrement, $\lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}_+} M_s$ et $\lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}_+} M_s$ existent.*

*Démonstration.* On a déjà vu que le nombre de montées est tel que $\mathbb{E}\left[U_{ab}^X(\mathbb{Q}_+\cap[0,t])\right] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left[(X_t-a)^-\right]$ uniformément borné. Donc, avec probabilité 1, pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, $U_{ab}^X(\mathbb{Q}_+) < \infty$, cela suffit à conclure. $\square$

**Proposition 53.** *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ une surmartingale positive. Pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$,*

$$\mathbb{P}\left(X_t > 0, \inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} X_s = 0\right) = 0$$

*Démonstration.* Soient $0 \leq s_1 < \ldots < s_p \leq t$ rationnelles, soit $\varepsilon > 0$. Soit $A_k := \{X_{s_k} < \varepsilon\} \cap \{\forall i < k, X_{s_i} \geq \varepsilon\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{A_k}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k} \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_{s_k}\right]\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k} X_{s_k}\right] \leq \varepsilon \mathbb{P}\left(A_k\right)\end{aligned}$$

Les $A_k$ sont disjoints et $\bigcup A_k = \left\{\min\limits_{1 \leq k \leq p} X_{s_k} < \varepsilon\right\}$.

$$\mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{\left\{\min\limits_{1 \leq k \leq p} X_{s_k} < \varepsilon\right\}}\right] \leq \varepsilon \mathbb{P}\left(\min X_{s_k} < \varepsilon\right)$$

$$\mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{\left\{\inf\limits_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} X_s < \varepsilon\right\}}\right] \leq \varepsilon \mathbb{P}\left(\inf_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} X_s < \varepsilon\right)$$

$$\mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{\{\inf X_s = 0\}}\right] = 0$$

□

# 3 Processus de Markov

On a vu la propriété de Markov pour le mouvement brownien. On va maintenant étudier des processus plus généraux qui ont cette propriété. Soit $S$ un espace métrique (espace "des états"). Soit $D = D(\mathbb{R}_+, S)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $S$ continues à droite et avec limite à gauche (noté cadlag). Soit $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui rende mesurable les applications coordonnées $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(t) \end{array}$. L'espace $(D, \mathcal{F})$ est notre nouvel espace mesurable canonique. On a des translations temporelles : $(\theta_s x)(t) = x(s+t)$ et $X$ le processus canonique $\begin{array}{cccc} X: & D & \to & D \\ & x & \mapsto & x \end{array}$.

## 3.1 Rappels sur les chaînes de Markov sur $S$ fini.

Soit $S$ un ensemble fini

**Définition 54.** Une chaîne de Markov (à temps continu) sur $S$ et la donnée :
a) d'une collection de mesures de probabilité $(\mathbb{P}_x)_{x \in S}$ sur $(D, \mathcal{F})$.
b) d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ continue à droite sur $(D, \mathcal{F})$ telle que $X$ est adaptée et pour tout $x \in S$, $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$
Pour tout $F$ mesurable positive $D \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}_x[F \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[F]$, $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.
$p_t(x, y) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$ sont les probabilités de transition associées.

On a

$$\begin{cases} p_t(x,y) \geq 0 \\ \sum\limits_y p_t(x,y) = 1 \\ \lim\limits_{t \to 0} p_t(x,x) = 1 \\ p_{s+t}(x,y) = \sum\limits_z p_s(x,z)\, p_t(z,y) \quad \text{(Chapman-Kolmogorov)} \end{cases} \tag{2}$$

Réciproquement, si $(p_t(x,y))$ satisfait (2) alors il définit une chaîne de Markov de manière unique.

**Proposition 55.** *Pour tout $x \in S$, il existe $C(x) \geq 0$ tel que $p_t(x,x) = 1 - C(x)t + o(t)$*
*Pour tout $x \neq y \in S$, il existe $q(x,y) \geq 0$ tel que $p_t(x,y) = tq(x,y) + o(t)$. On pose $C(x) = \sum\limits_{y \neq x} q(x,y)$. On pose $q(x,x) = -C(x)$. On a $\sum_y q(x,y) = 0$.*
*Soit $P_t = (p_t(x,y))_{x,y}$ et $Q = (q(x,y))_{x,y}$ (matrice de transition).*
*On a $P_t = e^{tQ}$.*
*On a $P_{t+s} = P_t P_s$, $P_t = 1 + tQ + o(t)$.*

$\frac{d}{dt}P_t = QP_t = P_tQ$ *(équation de Kolmogorov)*

*Réciproquement, si* $Q = (q(x,y))$ *telle que pour tout* $x \neq y$, $q(x,y) \geq 0$ *et pour tout* $x$ $\sum_y q(x,y) = 0$ *alors* $P_t = e^{tQ}$ *définit des probabilités de transition.*

Conclusion : Il y a correspondance entre chaîne de Markov, probabilité de transition et matrice de transition. On a toujours la propriété de Markov forte.

## 3.2 Processus de Feller

A partir de maintenant, on suppose que $S$ est un espace métrique séparable et localement compact (pour tout $x$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(x,\varepsilon)}$ est compacte).

**Exemple.** $S = \mathbb{R}^d$ ou $S = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit.

**Définition 56.** Une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ tend vers 0 en l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K$ tel que $\sup_{S\setminus K} |f| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, on note $\lim_{\infty} f = 0$. On note $C_0(S)$ l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en l'infini. On le munit de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_S |f|$. $C_0(S)$ est un espace de Banach.

NB : Toute fonction de $C_0(S)$ est uniformément continue.

**Définition 57.** Un processus de Feller est la donnée :

a) d'une collection de mesure de probabilités $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ sur $(D, \mathcal{F})$

b) d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continue à droite tel que $X$ est adapté et pour tout $x \in S$,

b1) $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$

b2) L'application $z \mapsto \mathbb{E}_z[f(X_t)]$ est dans $C_0(S)$ pour tout $f \in C_0(S)$ et $t \geq 0$

b3) Pour tout $F$ mesurable $D \to \mathbb{R}_+$, pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[F \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[F] \ \ \mathbb{P}_x\text{-p.s}$$

*Remarque.* La dernière propriété (b2) est la propriété de Feller. Elle implique que si $x_n \to x \in S$ alors la loi de $X_t$ sous $\mathbb{P}_{x_n}$ converge vers la loi de $X_t$ sous $\mathbb{P}_x$.

**Théorème 58.** *Propriété de Markov forte pour un processus de Feller. Soit* $T$ *un temps d'arrêt,* $F$ *mesurable positive* $D \to \mathbb{R}_+$. *Alors,*

$$\mathbb{E}_x[F \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T}[F] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s sur } \{T < \infty\}$$

**Lemme.** *Disons que* $F : D \to \mathbb{R}$ *est spéciale si elle s'écrit* $F(X) = \prod_{i=1}^{p} f_i(X_{t_i})$ *avec* $f_i \in C_0(S)$ *et* $0 \leq t_0 < \ldots < t_p$. *La fonction* $x \mapsto \mathbb{E}_x[F]$ *est continue.*

*Démonstration.* $p = 1$ vient de la définition

pour $p \geq 2$ soit $F = G.f_p(X_{t_p})$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F] &= \mathbb{E}_x\left[Gf_p\left(X_{t_p}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[G\mathbb{E}_{X_{T_{p-1}}}\left[f_p \circ \theta_{t_p - t_{p-1}}\right]\right] \end{aligned}$$

par la propriété de Markov et car $G$ est $\mathcal{F}_{t_{p-1}}$-mesurable. Si $g(x) = \mathbb{E}_x\left[f \circ \theta_{t_p - t_{p-1}}\right]$, on a$\mathbb{E}_x[F] = \mathbb{E}_x\left[Gg\left(X_{t_{p-1}}\right)\right]$ fonction spéciale avec $p \to p-1$. □

Retour à la démonstration du théorème 58 :

*Démonstration.* On suppose $T < \infty$ presque sûrement. Soit $A \in \mathcal{F}_T$ et $F$ mesurable bornée. Si $T$ prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $D$, alors :

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A F \circ \theta_T] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{X_T}[F]] \tag{3}$$

En effet,

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A F \circ \theta_T] = \sum_{s\in D} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=s\}} F \circ \theta_s\right]$$

par Markov faible (incluse dans la définition d'un processus de Feller)

$$\begin{aligned}\sum_{s\in D}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=s\}}F\circ\theta_s\right] &= \sum_{s\in D}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=s\}}\mathbb{E}_{X_S}\left[F\right]\right]\\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_A\mathbb{E}_{X_s}\left[F\right]\right]\end{aligned}$$

Sinon, on suppose $F$ spéciale et on approche $T$ par $T_n=\frac{1}{2^n}\lceil 2^nT\rceil$. Par continuité à droite, on a bien $X_{T_n}\xrightarrow{\text{p.s}}X_T$. Comme $F$ est spéciale, par le lemme, on a $\mathbb{E}_{X_{T_n}}\left[F\right]\xrightarrow{\text{p.s}}\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right]$. On arrive à (3) pour toute fonction spéciale $F$. Par densité des fonctions spéciales, on a le résultat pour toute $F$ mesurable bornée puis pour toute fonction mesurable positive. □

**Définition 59.** Un semi-groupe de Feller est une famille d'applications $(P_t)_{t\geq 0}$, linéaires continues de $C_0\left(S\right)$ dans $C_0\left(S\right)$ telle que pour tout $f\in C_0\left(S\right)$,

1) $P_0f=f$,
2) $\left\|P_tf-f\right\|\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$,
3) $P_{t+s}f=P_tP_sf$,
4) $f\geq 0\implies P_tf\geq 0$,
5) Si $S$ est compact, $P_t\mathbb{1}=\mathbb{1}$ ; si $S$ non compact, il existe $(f_n)_n\in\left(C_0\left(S\right)\right)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sup\left\|f_n\right\|<\infty$ et pour tout $x\in S$, $P_tf_n\left(x\right)\to 1$ pour tout $t\geq 0$.

*Remarque.* 2) est appelé la continuité forte. On a

$$\left\|P_{t+s}f-P_sf\right\|=\left\|P_s\left(P_tf-f\right)\right\|\leq C\left\|P_tf-f\right\|\to 0$$

$P_t:C_0\left(S\right)\to C_0\left(S\right)$ est appelé la propriété de Feller.
3) est la propriété de semi-groupe, parallèle de Chapman-Kolmogorov.

**Proposition 60.** *Pour tout* $t\geq 0$, $P_t$ *est une contraction i.e pour tout* $f\in C_0\left(S\right)$, $\left\|P_tf\right\|\leq\left\|f\right\|$.

*Démonstration.* Si $S$ est compact,

$$P_tf\leq P_t\left\|f\right\|=\left\|f\right\|$$

$$-P_tf=P_t\left(-f\right)\geq P_t\left(-\left\|f\right\|\right)=-\left\|f\right\|$$

Si $S$ est non compact, on fixe $x\in S$ et $t\geq 0$,

$$f\mapsto P_tf\left(x\right)$$

est une forme linéaire continue sur $C_0\left(S\right)$ donc, par le théorème de Riesz, il existe $\mu_{t,x}$ mesure finie telle que

$$P_tf\left(x\right)=\int fd\mu_{t,x}$$

$P_tf_n(x)=\int f_nd\mu_{t,x}$, $f_n\to f$ ponctuellement, $\sup\left\|f_n\right\|<\infty$ donc par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\int f_nd\mu_{t,x} & \to & \displaystyle\int d\mu_{t,x}\\ = & & \\ P_tf_n\left(x\right) & \to & 1\end{array}$$

donc $\mu_{t,x}$ est une mesure de probabilité et $\left|P_tf_n\left(x\right)\right|\leq\left\|f_n\right\|$. □

**Définition 61.** A tout semi-groupe $(P_t)$ on peut associer sa transformée de Laplace $U_\alpha f=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}P_tfdt$ pour $\alpha>0$.

*Remarque.* Comme $\left\|e^{-\alpha t}P_tf\right\|\leq e^{-\alpha t}\left\|f\right\|$, on a $\left\|U_\alpha f\right\|\leq\frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|$ donc $\alpha U_\alpha$ est une contraction.

$\alpha U_\alpha f=\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}P_tfdt\underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow}f$. En effet, $\left\|P_tf-f\right\|\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ donc $\forall\varepsilon>0$ , $\exists\delta$, $t\leq\delta\implies\left\|P_tf-f\right\|\leq\varepsilon$

$$\alpha U_\alpha f=\int_0^{\delta}\alpha e^{-\alpha t}P_tfdt+\int_\delta^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}P_tfdt$$

**Proposition 62.** *Equation résolvante : Pour tout $\alpha, \beta > 0$,*

$$U_\alpha - U_\beta = (\beta - \alpha) U_\alpha U_\beta$$

*En particulier, $U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha$.*

*Démonstration.* Pour $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned}
U_\alpha U_\beta f &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t (U_\beta f)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t \left( \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} P_s f ds \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t - \beta s} P_{t+s} f dt ds \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_0^r e^{-\alpha t - \beta (r-t)} dt P_r f dr \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{\beta - \alpha} P_r f dr \\
&= \frac{U_\alpha f - U_\beta f}{\beta - \alpha}
\end{aligned}$$

□

*Remarque.* Si $P_t f = e^{-\lambda t} f$ alors $U_\alpha f = \frac{1}{\alpha + \lambda} f$. On peut vérifier que $\frac{1}{\alpha+\lambda} - \frac{1}{\beta+\lambda} = \frac{\beta-\alpha}{(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)}$.

**Proposition 63.** *Dans la définition de semi-groupe de Feller, on peut remplacer l'hypothèse de continuité forte $\|P_t f - f\| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par : $\forall x \in S$, $P_t f(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.*

*Démonstration.* 1) on vérifie la propriété forte pour $f = U_\alpha g$, $\alpha > 0$, $g \in C_0(S)$.

$$\begin{aligned}
P_t f &= P_t \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} P_s g ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} P_{s+t} g ds \\
&= \int_t^{+\infty} e^{-\alpha (s-t)} P_s g ds \\
P_t f - f &= \int_t^{+\infty} \left(e^{\alpha t} - 1\right) e^{-\alpha s} P_s g ds \\
&\quad \underbrace{- \int_0^t e^{-\alpha s} P_s g ds}_{\|\cdot\| \leq t \|g\|}
\end{aligned}$$

$\int_t^{+\infty} (e^{\alpha t} - 1) e^{-\alpha s} P_s g ds$ converge vers 0 pour tout $s$ et on a la domination $\left\| \int_t^{+\infty} (e^{\alpha t} - 1) e^{-\alpha s} P_s g ds \right\| \leq \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \|g\|$. Par le théorème de convergence dominée $\int_t^{+\infty} (e^{\alpha t} - 1) e^{-\alpha s} P_s g ds \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

2) On montre que $\{U_\alpha g, \alpha > 0, g \in C_0(S)\}$ est dense dans $C_0(S)$. Par un argument de dualité, il suffit de montrer que pour toute mesure finie sur $S$, pour tout $\alpha > 0$, $g \in C_0(S)$, $\int U_\alpha g d\mu = 0 \Longrightarrow \mu = 0$. On veut justifier

$$\int \alpha U_\alpha g d\mu \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} \int g d\mu$$

On a vu $\|\alpha U_\alpha g\| \leq \|g\|$. il suffit de vérifier la convergence ponctuelle : pour tout $x \in S$, $\alpha U_\alpha g(x) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ (voir preuve précédente) et on conclut par le théorème de convergence dominée.

2) Conclusion : Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $h \in U$ tel que $\|f - h\| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|P_t f - f\| &\leq \|P_t f - P_t h\| + \|P_t h - h\| + \|h - f\| \\
&\leq 2 \|h - f\| + \|P_t h - h\|
\end{aligned}$$

donc $\limsup_{t\to 0} \|P_t f - f\| \leq 2\varepsilon$. □

## 3.3 Du processus au générateur infinitésimal

**Théorème 64.** *Etant donné un processus de Feller* $(X_t)_t$*, on pose*

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$$

*avec* $\mathbb{E}_x[\cdot]$ *l'espérance associée à* $\mathbb{P}_x$*. Alors,* $P_t$ *est un semi-groupe de Feller.*

*Démonstration.* $P_0 f = f$ OK
$f \geq 0 \implies P_t f \geq 0$
Si $S$ est compact, $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$ (admis pour $S$ non compact)
Propriété de semi-groupe :

$$\begin{aligned}
P_{t+s} f(x) &= \mathbb{E}_x[f(X_{t+s})] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t]] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)]] \\
&= \mathbb{E}_x[P_s f(X_t)] \\
&= P_t(P_s f)(x)
\end{aligned}$$

Pour montrer la continuité ponctuelle, il suffit de voir que pour tout $x \in S$, $P_t f(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$. C'est clair par continuité à droite des trajectoires. Par définition du processus de Feller, $P_t$ envoie $C_0(S)$ dans $C_0(S)$. $\square$

*Remarque.* On peut ré-écrire la propriété de Markov $\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] = P_s f(X_t)$.

**Proposition 65.** *Si* $f \in C_0(S)$*,* $f \geq 0$*,* $\alpha > 0$*, alors* $M_t := e^{-\alpha t} U_\alpha f(X_t)$ *est une sur-martingale sous* $\mathbb{P}_x$*.*

*Démonstration.* $\|U_\alpha f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|$ donc $M_t \in L^1$.

$$\begin{aligned}
P_s\left(e^{-\alpha s} U_\alpha f\right) &= e^{-\alpha s} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_{s+t} f dt \\
&= \int_s^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f dt \leq U_\alpha f
\end{aligned}$$

car $f \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha(t+s)} U_\alpha f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= P_s\left(e^{-\alpha(t+s)} U_\alpha f\right)(X_t) \\
&\leq e^{-\alpha t} U_\alpha f(X_t) = M_t
\end{aligned}$$

$\square$

Comment passe-t-on maintenant du semi-groupe au générateur infinitésimal ? Pour le cas où $S$ est fini, la matrice de transition est $Q = (q(x,y))$ qu'on peut voir comme l'application linéaire

$$Qf(x) = \sum_{y \neq x} q(x,y)(f(y) - f(x))$$

De même, on a $P_t = (p_t(x,y))$ qu'on peut voir comme $P_t f(x) = \sum_y p_t(x,y) f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ et $P_t = e^{tQ} = 1 + tQ + o(t)$. On a $P_t f(x) = f(x) + tQf(x) + o(t)$ et $\mathbb{E}_x[f(X_t)] = f(x) + tQf(x) + o(t)$. On se replace à présent dans le cadre général.

**Définition 66.** Soit $(P_t)$ un semi-groupe de Feller. Le générateur infinitésimal associé est l'opérateur linéaire $\mathscr{L} f = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}$ sur le domaine $\mathcal{D}(\mathscr{L}) := \left\{ f \in C_0(S) \mid \frac{P_t f - f}{t} \text{ existe dans } C_0(S) \right\}$.

**Proposition 67.** *Equation de Kolmogorov. Si* $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$*, alors* $t \mapsto P_t f$ *est une fonction* $C^1$ *et* $\frac{d}{dt}(P_t f) = P_t \mathscr{L} f = \mathscr{L} P_t f$*.*

*Démonstration.* $\frac{1}{s}\left(P_{t+s}f-P_tf\right)=P_t\left(\frac{P_sf-f}{s}\right)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}P_t\mathscr{L}f$ et la convergence est uniforme en $t$.

$$\begin{aligned}
P_tf-f &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{P_{\frac{k+1}{n}.t}f-P_{\frac{k}{n}.t}f}_{\sim\frac{1}{n}P_{\frac{k}{n}.t}\mathscr{L}f}\\
&= \int_0^t P_s\mathscr{L}fds
\end{aligned}$$

donc $t\mapsto P_tf$ est $C^1$ et $\frac{d}{dt}\left(P_tf\right)=P_t\mathscr{L}f$.

$$\begin{aligned}
P_t\mathscr{L}f &= \lim_{s\to 0}P_t\left(\frac{P_sf-f}{s}\right)\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{P_s\left(P_tf\right)-P_tf}{s}\\
&= \mathscr{L}P_tf
\end{aligned}$$

□

**Proposition 68.** *Soit $\alpha>0$,*

*1) $\forall f\in C_0(S)$, $U_\alpha f\in\mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $(\alpha-\mathscr{L})\,U_\alpha f=f$*

*2) Si $f\in\mathcal{D}(\mathscr{L})$ alors $U_\alpha\left((\alpha-\mathscr{L})\,f\right)=f$*

*3) $\mathrm{Im}U_\alpha=\mathcal{D}(\mathscr{L})$ et les applications $U_\alpha$ et $(\alpha-\mathscr{L})$ sont inverses l'une de l'autre.*

*4) $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ est dense dans $C_0(S)$*

*Démonstration.* 1) On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\left(P_sU_\alpha f-U_\alpha f\right) &= \frac{1}{s}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}P_{t+s}fdt-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}P_tfdt\right)\\
&= \frac{1}{s}\left(\int_s^{+\infty}\left(e^{\alpha s}-1\right)e^{-\alpha t}P_tfdt-\int_0^s e^{-\alpha t}P_tfdt\right)\\
&\underset{s\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}P_tfdt-f=\alpha U_\alpha f-f
\end{aligned}$$

donc $U_\alpha f\in\mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $\mathscr{L}\left(U_\alpha f\right)=\alpha U_\alpha f-f$, $(\alpha-\mathscr{L})\left(U_\alpha f\right)=f$.

2) Si $f\in\mathcal{D}(\mathscr{L})$, on a vu que $P_tf=f+\displaystyle\int_0^t P_s\mathscr{L}fds$

$$\begin{aligned}
U_\alpha f &= \int e^{-\alpha t}P_tfdt\\
\alpha U_\alpha f-f &= \alpha\int e^{-\alpha t}\int_0^t P_s\mathscr{L}fdsdt\\
&= \int P_s\mathscr{L}f\int_s^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}dtds\\
&= \int P_s\mathscr{L}fe^{-\alpha s}ds\\
&= U_\alpha\left(\mathscr{L}f\right)
\end{aligned}$$

donc $U_\alpha\left((\alpha-\mathscr{L})\,f\right)=f$.

3) provient immédiatement de 2) et 3)

4) En particulier, $\mathrm{Im}U_\alpha$ ne dépend pas de $\alpha$. Pour voir que $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ est dense, il suffit de voir que $\bigcup_{\alpha>0}\mathrm{Im}\left(U_\alpha\right)$est dense. On a vu $\alpha U_\alpha f\underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow}f$ donc c'est bon!. □

**Corollaire 69.** *Un semi-groupe de Feller est déterminé par son générateur infinitésimal (ce qui inclut l'information sur le domaine !)*

*Démonstration.* Soit $f \in C_0(S)$ positive. On veut montrer qu'on peut calculer $P_t f$ en utilisant seulement l'information sur $\mathscr{L}$. On vient de voir que pour tout $\alpha > 0$, $U_\alpha f = (\alpha - \mathscr{L})^{-1} f$ i.e. $U_\alpha f$ est l'unique élément de $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ tel que $(\alpha - \mathscr{L}) U_\alpha f = f$

$$U_\alpha f(x) = \int e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt$$

On peut donc retrouver la transformée de Laplace de $t \mapsto P_t f(x)$. Cela caractérise $P_t f(x)$ car $t \mapsto P_t f((x)$ est continue. $\square$

**Exemple 70.** Le mouvement brownien.

1) $P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} f(y)\, dy$

2) $U_\alpha f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int \exp\left(-\sqrt{2\alpha}\,|y-x|\right) f(y)\, dy$ et $\mathcal{D}(\mathscr{L}) = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f, f" \in C_0(\mathbb{R}) \right\}$ et pou $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$, on a $\mathscr{L} f = \frac{1}{2} f"$ (en dimension quelconque, $\mathscr{L} f = \frac{1}{2}\Delta f$)

*Remarque.* Il est en général difficile de déterminer $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ explicitement. La plupart du temps, on a simplement besoin de comprendre $\mathscr{L}$ sur un sous-domaine assez grand.

**Théorème 71.** *Soit $f, g \in C_0(S)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*1) $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $\mathscr{L} f = g$*

*2) $f(X_t) - \displaystyle\int_0^t g(X_s)\, ds$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$.*

*Démonstration.* 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $M_t = f(X_t) - \displaystyle\int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\, ds$. Alors, comme $f \in C_0(S)$, $M_t \in L^1$ pour tout $t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t+s} \mathscr{L} f(X_u)\, du \mid \mathcal{F}_t\right] &= \int_0^t \mathscr{L} f(X_u)\, du + \mathbb{E}_x\left[\int_t^{t+s} \mathscr{L} f(X_u)\, du \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_0^t \mathscr{L} f(X_u)\, du + \int_t^{t+s} \mathbb{E}_x\left[\mathscr{L} f(X_u) \mid \mathcal{F}_t\right] du \\
&= \int_0^t \mathscr{L} f(X_u)\, du + \int_0^s P_u \mathscr{L} f(X_t)\, du
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_x\left[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\right] = P_s f(X_t) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_u)\, du - \int_0^s P_u \mathscr{L} f(X_t)\, du$$

$P_s f - f = \int_0^s P_u \mathscr{L} f du$ par Kolmogorov donc $\mathbb{E}\left[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\right] = f(X_t) - \displaystyle\int_0^t \mathscr{L} f(X_u)\, du = M_t$.

2) $\Longrightarrow$ 1) $\mathbb{E}_x\left[f(X_t) - \displaystyle\int_0^t g(X_s)\, ds\right] = f(x)$

$$P_t f(x) - \int_0^t P_s g(x)\, ds = f(x)$$

$$\frac{P_t f - f}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t P_s g ds \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g$$

donc $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $\mathscr{L} f = g$. $\square$

**Exemple 72.** Pour le mouvement brownien $(B_t)_t$. On a :$f(B_t) - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^t f"(B_s)\, ds$ est une martingale (assez proche de la formule d'Itô). La martingale est $\int f'(B_s)\, dB_s$.

## 3.4 Mesures invariantes

**Définition 73.** Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $S$. On définit

$$P_{\mu}(A)=\int \mathbb{P}_x(A)\,d\mu(x)$$

où $A$ est un ensemble mesurable. On a bien que $\mathbb{P}_{\mu}(X_0\in B)=\mu(B)$. Dans ce cas, $\mathbb{P}_x=\mathbb{P}_{\delta_x}$.

Loi de $X_t$ sous $\mathbb{P}_{\mu}$ : $\mathbb{E}_{\mu}[f(X_t)]=\int P_tf(x)\,d\mu(x)=\int f(x)\,d(P_t^*\mu)(x)$. Plus proprement, $A\mapsto \mathbb{P}_{\mu}(X_t\in A)$ est une mesure de probabilité (c'est la loi de $(X_t)_t$ sous $\mathbb{P}_{\mu}$) on la note $P_t^*\mu$.

**Définition 74.** On dit que $\mu$ est une mesure invariante (ou stationnaire) si pour tout $t\geq 0$, $P_t^*\mu=\mu$ i.e. $X_t\overset{\text{loi}}{=}X_0$ sous $\mathbb{P}_{\mu}$.

**Proposition 75.** *Si $\mu$ est une mesure de probabilité sur $S$ telle que $P_t^*\mu\to\nu$ (au sens $\mathbb{E}_{P_t^*\mu}[f]\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}_{\nu}[f]$ pour tout $f\in C_0(S)$) alors $\nu$ est une mesure invariante.*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que pour tout $s\geq 0$ et pour tout $f\in C_0(S)$, $\int P_sfd\nu=\int fd\nu$

$$\begin{aligned}\left|\int P_sfd\nu-\int fd\nu\right| &\leq \left|\int P_sfd\nu-\int P_{s+t}fd\mu\right|+\left|\int P_{s+t}fd\mu-\int fd\nu\right|\\ &\leq \left|\int P_sfd\nu-\int P_t(P_sf)\,d\mu\right|+\left|\int P_{s+t}fd\mu-\int fd\nu\right|\\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

□

**Proposition 76.** *Si $S$ est compact, alors il existe une mesure invariante.*

*Démonstration.* Soit $\mu$ une mesure arbitraire. Soit $\mu_n=\frac{1}{n}\int_0^n P_s^*\mu ds$. $(\mu_n)_n$ est une suite de mesures de probabilité sur $S$ compact. Par le théorème de Prokorov, on peut en extraire une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ convergente vers une limite $\nu$. Pour vérifier que $\nu$ est invariante, il suffit de voir $\forall f\in C_0(S)$, $\forall t\geq 0$, $\int P_tfd\nu=\int fd\nu$.

$$\begin{aligned}\int P_tfd\mu_{n_k} &= \frac{1}{n_k}\int_0^{n_k}\int P_{t+s}fd\mu ds\\ &= \frac{1}{n_k}\int_t^{n_k+t}\int P_sfd\mu ds\end{aligned}$$

$$\int P_tfd\mu_{n_k}-\int fd\mu_{n_k}=\frac{1}{n_k}\left(-\int_0^t\int P_sfd\mu ds+\int_{n_k}^{n_k+t}\int P_sfd\mu ds\right)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

□

**Lemme 77.** *Pour tout $f\in C_0(S)$ et $t>0$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{Id}-\frac{t}{n}\mathscr{L}\right)^{-n}f=P_tf$$

*Remarque.* $P_t=P_{\frac{t}{n}}\dots P_{\frac{t}{n}}\simeq\left(1+\frac{t}{n}\mathscr{L}\right)^n$

*Démonstration.* $\left(\mathrm{Id}-\frac{t}{n}\mathscr{L}\right)^{-1}:C_0(S)\to\mathcal{D}(\mathscr{L})$ donc $\left(\mathrm{Id}-\frac{t}{n}\mathscr{L}\right)^{-n}f$ est bien définie.

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{\alpha}\mathscr{L}\right)^{-1} &= \alpha U_{\alpha}f\\ &= \int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}P_tf.dt\\ &= \mathbb{E}\left[P_{\frac{\mathscr{E}_1}{\alpha}}f\right]\end{aligned}$$

où $\mathscr{E}_1 \sim \text{Exp}(1)$

$$\begin{aligned}\left(\text{Id} - \frac{1}{\alpha}\mathscr{L}\right)^{-n} f &= \mathbb{E}\left[P_{\frac{\mathscr{E}_n}{\alpha}}\mathbb{E}\left[P_{\frac{\mathscr{E}_{n-1}}{\alpha}}\ldots\mathbb{E}\left[P_{\frac{\mathscr{E}_1}{\alpha}}f\right]\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[P_{\frac{\mathscr{E}_n+\ldots+\mathscr{E}_1}{\alpha}}f\right]\end{aligned}$$

où $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(1)$.

$$\left(\text{Id} - \frac{t}{m}\mathscr{L}\right)^{-m} f = \mathbb{E}\left[P_{t.\frac{\mathscr{E}_n+\ldots+\mathscr{E}_1}{n}}f\right]$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ :

$$\|P_t f - P_s f\| \leq \|\mathscr{L} f\| \, |t-s|$$

$$\left\|\left(\text{Id} - \frac{t}{m}\mathscr{L}\right)^{-n} f - P_t f\right\| \leq t\,\|\mathscr{L} f\|\,\mathbb{E}\left[\left|\frac{\mathscr{E}_n+\ldots+\mathscr{E}_1}{n} - 1\right|\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve le lemme pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$car les opérateurs sont des contractions et $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ est dense. □

**Théorème 78.** *$\mu$ est une mesure invariante si et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$, $\int \mathscr{L} f.d\mu = 0$.*

*Démonstration.* " $\Longrightarrow$ " On suppose $\int \frac{P_t f - f}{t}.d\mu = 0$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$, on a bien $\int \mathscr{L} f.d\mu = 0$ en faisant tendre $t$ vers 0.

"$\Longleftarrow$" On veut voir que pour tout $f \in C_0(S)$ et $t > 0$

$$\int P_t f.d\mu = \int f.d\mu$$

Si $\left(\text{Id} - \frac{1}{\alpha}\mathscr{L}\right)^{-1} f = 0$ alors $g \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$et $f = g - \frac{1}{\alpha}\mathscr{L} g$ et donc $\int f.d\mu = \int g.d\mu$.

$$\int f.d\mu = \int \left(\text{Id} - \frac{1}{\alpha}\mathscr{L}\right)^{-1} f.d\mu$$

En itérant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int f.d\mu = \int \left(\text{Id} - \frac{1}{n}\mathscr{L}\right)^{-n} f.d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int P_t f d\mu$$

et on a le résultat. □

*Remarque* 79. On est en général intéressé par la détermination de l'ensemble $\mathcal{I}$ des mesures invariantes d'un processus. Cet ensemble est convexe. Il suffit donc de déterminer les points extrémaux de cet ensemble convexe. C'est lié à la notion d'ergodicité. Une mesure n'est pas extrémale si elle s'écrit $\mu = p\nu_1 + (1-p)\nu_0$ avec $p \in ]0,1[$ et $\nu_0 \neq \nu_1$.

**Définition 80.** Une mesure de probabilité invariante $\mu$ est ergodique si pour tout $f$ continue bornée,

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu, \quad \mathbb{P}_\mu - \text{p.s}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu, \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s} \tag{4}$$

$d\mu(x)$ – p.s..

*Remarque* 81. Deux mesures invariantes ergodiques sont mutuellement singulières : si $\mu_1, \mu_2$ sont ergodiques avec $\mu_1 \neq \mu_2$ alors il existe $A$ mesurable telle que $\mu_1(A) = 1$ et $\mu_2(A) = 2$.

**Proposition 82.** *Une mesure invariante ergodique est extrémale (c.f. Remarque 79 pour la définition).*

*Démonstration.* Supposons que $\mu = p\nu_1 + (1-p)\nu_0$ avec $\mu$ invariante ergodique, $p \in ]0,1[$ et $\nu_0, \nu_1$ invariantes. On a $\nu_1 \ll \mu$ donc (4) est vrai $d\nu_1(x)-$p.s. donc

$$\frac{1}{t}\int_0^t \underbrace{\mathbb{E}\left[f\left(X_s\right)\right]}_{=\int f d\nu_1} ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$$

car $\nu_1$ est invariante. Donc $\int f d\nu_1 = \int f d\mu$ pour toute fonction continue bornée. Donc $\nu_1 = \mu = \nu_0$. $\square$

### 3.5 Formule de Feynman-Kac

On a vu que $u(t,\cdot) = P_t f$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathscr{L} u \\ u(0,\cdot) = f \end{cases}$$

et $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\Delta$ pour le brownien.

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f\left(B_t\right)\right] = \mathbb{E}_0\left[f\left(x \vdash B_t\right)\right]$$

La formule de Feynman-Kac donne une représentation probabiliste d'une équation "avec potentiel"

**Théorème 83.** *Formule de Feynman-Kac. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $h \in C_0(S)$. La fonction*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_t\right)\exp\left(\int_0^t h\left(X_s\right)ds\right)\right]$$

*est solution de l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u = (\mathscr{L} + h) u \\ u(0,\cdot) = f \end{cases}$$

*Démonstration.* La condition initiale est claire. Posons $I(s,t) = \int_s^t h\left(X_u\right)du$ pour simplifier la notation.

$$\begin{aligned} u(t+\varepsilon) - u(t,x) = \mathbb{E}_x\Big[&\left(f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right)e^{I(0,t)}\left(e^{I(t,t+\varepsilon)}-1\right) + && := A \\ &\left(f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right)e^{I(0,t)} + && := B \\ &f\left(X_t\right)e^{I(0,t)}\left(e^{I(t,t+\varepsilon)}-1\right)\Big] && := C \end{aligned}$$

$\mathbb{E}_x\left[|A|\right] \leq \mathbb{E}_x\left[\left|f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right|\right]e^{t\|h\|}\left(e^{\varepsilon\|h\|}-1\right) = o(\varepsilon)$ pourvu que $\left|f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right|$ tende vers 0

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[\left|f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right|\right]^2 &\leq \mathbb{E}_x\left[\left(f\left(X_{t+\varepsilon}\right) - f\left(X_t\right)\right)^2\right] \\ &\leq \mathbb{E}_x\left[f^2\left(X_{t+\varepsilon}\right) - 2f\left(X_{t+\varepsilon}\right)f\left(X_t\right) + f^2\left(X_t\right)\right] \\ &= P_{t+\varepsilon}\left(f^2\right) - 2P_t\left(fP_\varepsilon f\right) + P_t\left(f^2\right) \\ &= P_t\left[P_\varepsilon\left(f^2\right) - 2fP_\varepsilon f + f^2\right] \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ uniformément en t et en espace} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}_x[B] = \mathbb{E}_x\left[\left(P_\varepsilon f\left(X_t\right) - f\left(X_t\right)\right)e^{I(0,t)}\right]$ par Markov. Donc

$$\frac{u(t+\varepsilon,x) - u(t,x)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x\left[\mathscr{L} f\left(X_t\right)e^{I(0,t)}\right] + \mathbb{E}_x\left[f\left(X_t\right)e^{I(0,t)}h\left(X_t\right)\right]$$

uniformément en $t$ et en $x$. Donc $u(t,x) = \int_0^t \ldots$ et $u(\cdot,x)$ est $C^1$.

$$\begin{aligned} u(t+\varepsilon,x) &= \mathbb{E}_x\left[e^{I(0,\varepsilon)}f\left(X_{t+\varepsilon}\right)e^{I(\varepsilon,t+\varepsilon)}\right] \\ &\overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}_x\left[e^{I(0,\varepsilon)}u\left(t,X_\varepsilon\right)\right] \end{aligned}$$

$\frac{1}{\varepsilon}\left(u\left(t+\varepsilon,x\right)-u\left(t,x\right)\right)=\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_x\left[\left(e^{I(0,\varepsilon)}-1\right)u\left(t,X_\varepsilon\right)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\left(P_\varepsilon u\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right)$. Or,

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_x\left[\left(e^{I(0,\varepsilon)}-1\right)u\left(t,X_\varepsilon\right)\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}h\left(x\right)u\left(t,x\right)$$

et la limite de $\frac{1}{\varepsilon}\left(u\left(t+\varepsilon,x\right)-u\left(t,x\right)\right)$ existe donc la limite de $\frac{1}{\varepsilon}\left(P_\varepsilon u\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right)$ existe aussi. On a donc $u\left(t,\cdot\right)\in\mathcal{D}\left(\mathscr{L}\right)$ et on a

$$\mathscr{L}u\left(t,\cdot\right)=\partial_t u-hu$$

Quand est ce qu'un opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un processus stochastique ? □

**Proposition 84.** *Soit* $f\in\mathcal{D}\left(\mathscr{L}\right)$ *et* $g\in C_0\left(S\right)$, $\lambda\geq 0$. *Si* $\left(\mathrm{Id}-\lambda\mathscr{L}\right)f=g$, *alors* $\inf f\geq\inf \mathrm{g}$.

*Démonstration.* $g_t=f-\lambda\frac{P_tf-f}{t}=\left(\mathrm{Id}+\frac{\lambda}{t}\right)f-\frac{\lambda}{t}P_tf\underset{t\to 0}{\longrightarrow}g$ par définition.

$\left(\mathrm{Id}+\frac{\lambda}{t}\right)\inf f\geq\inf g_t+\frac{\lambda}{t}\inf P_tf$. On a $P_tf\geq\inf f$.

$$\left(\mathrm{Id}+\frac{\lambda}{t}\right)\inf f\geq\inf g_t+\frac{\lambda}{t}\inf f$$

d'où $\inf f\geq\inf \mathrm{g}$. □

La propriété du haut est le principe du maximum. $\Delta$ satisfaire cette propriété : disons que $\inf f<0$ et soit $x$ tel que $f\left(x\right)=\inf f$. Il faut que $\Delta f\left(x\right)\geq 0$. Si $\left(\mathrm{Id}-\lambda\Delta\right)f=g$, on a $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\lambda\Delta f\left(x\right)\leq f\left(x\right)=\inf f$ et donc $\inf g\leq\inf g$.

Ainsi, si l'on veut qu'un opérateur linéaire soit le générateur infinitésimal d'un processus stochastique, il faut qu'il vérifie le principe du maximum.

**Exemple.** L'opérateur $D^3:f\mapsto f'''$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas un générateur infinitésimal.

## 3.6 Exemples de processus de Markov

### 3.6.1 Un exemple formel

**Exemple 85.** Soit $\beta>0$ et $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ tel que $\int e^{-\lambda V}<\infty$ pour tout $\lambda>0$. On verra plus tard comment donner un sens à

$$dX_t=\frac{dB_t}{\beta}-\nabla V\left(X_t\right)dt$$

Une façon détournée de définir $\left(X_t\right)$ est de dire que $Z_t=X_t-\frac{1}{\beta}\beta_t$ est bien définie par l'équation :

$$dZ_t=-\nabla V\left(Z_t+\frac{1}{\beta}B_t\right)dt$$

et poser $X_t=Z_t+\frac{1}{\beta}B_t$. On verra que $\mathscr{L}f\left(x\right)=\frac{1}{2\beta}\Delta f\left(x\right)-\nabla V\left(x\right)\cdot\nabla f\left(x\right)$. Si $\beta=+\infty$, $X_t\simeq x-t\nabla V\left(x\right)+o\left(t\right)$, $f\left(X_t\right)\simeq f\left(x\right)-t\nabla V\left(x\right)\cdot\nabla f\left(x\right)+o\left(t\right)$.

On cherche une mesure invariante à densité $g$. On veut vérifier que pour tout $f\in\mathcal{D}\left(\mathscr{L}\right)$, $\int\mathscr{L}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=0$ c'est à dire $\int\mathscr{L}fg=0\Leftrightarrow\int f\mathscr{L}^*g=0$. Or,

$$\mathscr{L}^*f=\frac{1}{2\beta}\Delta f+\nabla\left(f\nabla V\right)$$

En effet, $\int\nabla V\nabla fg=\int\left(\nabla f\right)\cdot\left(g\nabla V\right)=-\int f\nabla\left(g\nabla V\right)$. Il faut et il suffit que $\mathscr{L}^*g=0$. On montre que ça équivaut à $g=\exp\left(-2\beta V\right)$. Alors, $\nabla g=-2\beta\nabla V.g$ et $\mathscr{L}^*g=\frac{1}{2\beta}\nabla\left(-2\beta g\nabla V\right)+\nabla\left(g\nabla V\right)$.

### 3.6.2 Modèle d'Ising dynamique

**Exemple 86.** Soit $G=(V,E)$ un graphe fini ($V$ est l'ensemble des sommets, $E$ l'ensemble des arrêtes). On veut une dynamique sur $\{-1,1\}^V$ telle que la mesure invariante soit

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{Z}\exp(\beta H(\sigma))$$

où $Z=\sum_{\sigma\in\{-1,1\}^V}\exp(\beta H(\sigma))$ avec $H(\sigma)=\sum_{i\sim j}\sigma_i\sigma_j$ avec $i\sim j$ si $i$ et $j$ sont deux sommets adjacents. Pour $\sigma\in\{-1,1\}^V$, soit $\sigma^{(i)}\in\{-1,1\}^V$ défini par

$$\sigma_k^{(i)}=\begin{cases}\sigma_k & \text{si } k\neq i\\ -\sigma_i & \text{si } k=i\end{cases}$$

Un exemple important de dynamique est avec taux de transition de $\sigma$ à $\sigma^{(i)}$ donné par $C\left(\sigma,\sigma^{(i)}\right)=\exp\left(\frac{\beta}{2}\left(H\left(\sigma^{(i)}\right)-H(\sigma)\right)\right)$. On observe que

$$\mu(\sigma).C\left(\sigma,\sigma^{(i)}\right)=\mu\left(\sigma^{(i)}\right).C\left(\sigma^{(i)},\sigma\right)$$

En particulier, $\mu$ est invariante. On peut aussi vérifier que si $\mathscr{L}f(\sigma)=\sum_i C\left(\sigma,\sigma^{(i)}\right)\left(f\left(\sigma^{(i)}\right)-f(\sigma)\right)$ alors on a bien $\int\mathscr{L}f d\mu=0$. On peut construire cette dynamique sur $\mathbb{Z}^d$ par exemple en utilisant une variation de l'approche "construction graphique". On peut montrer :

pour $d=1$ : l'unicité de le mesure invariante

pour $d\geq 2$ : il existe $\beta_C\in]0,+\infty[$ tel que $\beta<\beta_C\implies$ unicité de la mesure et $\beta>\beta_C\implies$ pas d'unicité.

## 3.7 Construction et étude du processus de contact

### 3.7.1 Quelques rappels sur les processus de Poisson

Soit $\lambda>0$. Si $X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ pour $n$ assez grand, alors $\mathbb{P}(X_n=k)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

On définit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ (notée $\text{Poi}(\lambda)$) par $\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$.

Si $X\sim\text{Poi}(\lambda)$ et $Y\sim\text{Poi}(\mu)$ sont indépendantes alors $X+Y\sim\text{Poi}(\lambda+\mu)$.

Une façon directe de construire la processus de Poisson : on se donne $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\text{iid}}{\sim}\text{Exp}(\lambda)$ et on pose $N(t)=\text{card}\left\{k\mid\sum_{i=1}^{k}T_k\leq t\right\}$ le processus de Poisson. $N(t)\sim\text{Poi}(\lambda t)$.

Soit $\mathcal{P}=\left\{\sum_{i=1}^{n}T_k\mid n\geq 1\right\}$. On peut montrer que pour toute partie $A$ mesurable, si on pose $N(A)=\text{card}(P\cap A)$ alors $N(A)\sim\text{Poi}(\lambda.\lambda_1(A))$ avec $\lambda_1$ la mesure de Lebesgue. $\mathcal{P}$ est le processus ponctuel d'intensité $\lambda$.

$A\cap B=\emptyset\implies N(A)$ et $N(B)$ sont indépendantes.

Soit $\mathcal{P}(t)=\{s-t,\ s\in\mathcal{P},\ s\geq t\}$. Alors, $\mathcal{P}(t)\overset{\text{(loi)}}{=}\mathcal{P}$.

### 3.7.2 Construction graphique

On va construire le processus de contact sur $\mathbb{Z}$. on peut généraliser à tout graphe de degré localement fini (c'est à dire chaque sommet a un nombre fini de voisin) et à une classe de processus plus grande, à valeurs dans des espaces produits $S^V$, $S$ et $V$ sont dénombrables. Le processus de contact est un modèle de propagation d'épidémie dans une population : soit $(\xi_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Les points de $\mathbb{Z}$ sont les individus, ils sont en contact s'ils sont reliés par une arrête. $\xi_t(x)=0\Leftrightarrow$ l'individu $x$ est sain au temps $t$, $\xi_t(x)=1\Leftrightarrow$ l'individu $x$ est malade au temps $t$.

Un individu malade guérit avec un taux qu'on normalise égal à 1. un individu sain devient malade avec taux $\lambda.\text{card}\{y\mid x\sim y \text{ et } \xi_t(y)=1\}$. Pour $\xi\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, on définit $\xi^{0\to x}\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tel que $\xi^{0\to x}(z)=\begin{cases}\xi(z) & \text{si } z\neq x\\ 0 & \text{si } z=x\end{cases}$ et

$\xi^{1\to x}(z) = \begin{cases} \xi(z) & \text{si } z \neq x \\ 1 & \text{si } z = x \end{cases}$. Formellement, on veut un processus stochastique dont le générateur infinitésimal est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{L}f(\xi) &= \sum_x \mathbb{1}_{\{\xi(x)=1\}}\left(f\left(\xi^{0\to x}\right) - f(\xi)\right) + \sum_x \lambda \mathbb{1}_{\{\xi(x+1)=1\}}\left(f\left(\xi^{1\to x}\right) - f(\xi)\right) + \\ &\quad \sum_x \lambda \mathbb{1}_{\{\xi(x-1)=1\}}\left(f\left(\xi^{1\to x}\right) - f(\xi)\right)\end{aligned}$$

On pourrait définir la processus en partant de ce générateur mais on va le construire différemment. On se donne $(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_{x+}, \mathcal{P}_{x-})_{x\in\mathbb{Z}}$ des processus ponctuels indépendants, $(\mathcal{P}_x)$ d'intensité 1 et $(\mathcal{P}_{x+}), (\mathcal{P}_{x-})$ d'intensité $\lambda$. Pour $(x,s), (y,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}_+$, on dit qu'il y a un chemin actif de $(x,s)$ à $(y,t)$ et on note $(x,s) \to (y,t)$ si il existe $(x,s) = (x_0,t_0), \ldots, (x_n,t_n) = (y,t)$ tel que

a. $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

b. pour tout $k$, $|x_{k+1} - x_k| = 1$

c. $t_k \in \mathcal{P}_{x_k}(x_{k+1} - x_k)$

d. pour tout $s$, $t_k < s < t_{k+1} \implies s \notin P_{x_k}$

Le processus de contact partant de $\mathbb{1}_A$ où $A \subset \mathbb{Z}$ est défini par :

$$\xi_t^A = \{y \in \mathbb{Z} \mid \ \exists x \in A,\ (x,0) \to (y,t)\}$$

Notons $\mathbb{P}$ la loi des processus ponctuels. On a défini le processus pour toute configuration initiale de manière couplée. En particulier, on a immédiatement : $A \subset B \implies \xi_t^A \subset \xi_t^B$.

Renversement du temps : soit $\hat{\xi}_s^{t,A} = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in A,\ (y, t-s) \to (x,t)\}$ pour $0 \le s \le t$. Alors $\left(\hat{\xi}_s^{t,A}\right)_{0\le s\le t}$ a même loi que $\left(\xi_t^A\right)_{0\le s\le t}$.

**Lemme 87.** *$\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $y \in \mathbb{Z}$, il existe $R(y,t)$ tel que $|x-y| > R(y,t) \implies$ il n'existe pas de chemin actif entre $(x,0)$ et $(y,t)$*

*Démonstration.* Pour avoir $(x-n,0) \to (x,0)$ il fat avoir des "flèches" $0 < t_n < \ldots < t_1 < t$ tels que $t_k \in \mathcal{P}_{x-k,+}$. Presque sûrement, il existe $K_-$ tel que $\mathcal{P}_{x-K_-,+} \cap [0,t]$ est vide. De même, il existe $K_+$ tel que $\mathcal{P}_{x+K_+,-} \cap [0,t]$ est vide. On prend donc $R(y,t) = \max(K_+, K_-)$. ☐

**Lemme 88.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $A_{|[-N,N]} = B_{|[-N,N]} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\xi^A_{t|[-N_0,N_0]} \neq \xi^B_{t|[-N_0,N_0]}\right) \le \varepsilon$.*

*Démonstration.* Il suffit de voir que pour $N$ assez grand, $\mathbb{P}(R(-N_0,t) \ge N - N_0) \le \frac{\varepsilon}{2}$ et $\mathbb{P}(R(N_0,t) \ge N - N_0) \le \frac{\varepsilon}{2}$. C'est clair car $R(N_0,t) < \infty$presque sûrement. ☐

**Théorème 89.** *Le processus ainsi défini est un processus de Feller.*

*Démonstration.* On vérifie la propriété de Markov faible puis celle de Feller. Pour tout $t \ge 0$, on pose $\xi_{t+s}^{s,A} = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in A,\ (x,s) \to (y,t+s)\}$. Alors, $\left(\xi_{t+s}^{s,A}\right)_{t\ge 0}$ a la même loi que $\left(\xi_t^A\right)_{t\ge 0}$. Pour tout $s,t \ge 0$, $\xi_{t+s}^A = \xi_{t+s}^{s,\xi_s^A}$, (i.e. si $(x,0) \to (y,t+s)$ alors il existe $z \in \xi_s^A$ tel que $(x,0) \to (z,s) \to (y,t+s)$). Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, la loi de $\xi_{t+s}^{s,\xi_s^A}$ est celle du processus ponctuel au temps $t$ partant de $\xi_s^A$. Autrement dit, pour tout $F$ mesurable bornée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[F\left(\left(\xi_{t+s}^A\right)_{t\ge 0}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(\xi_{t+s}^{s,\xi_s^A}\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}_{\xi_s^A}\left[F\left(\left(\xi_t\right)_{t\ge 0}\right)\right]\end{aligned}$$

Il reste à vérifier la propriété de Feller :

Soit $f \in C_0(S)$ (i.e. une fonction continue sur l'espace compact). On veut vérifier que $\begin{array}{rccc} f_t: & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \mathbb{E}\left[f\left(\xi_t^A\right)\right] \end{array}$ est une fonction continue. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que $A_{|[-N,N]} = B_{|[-N,N]} \Longrightarrow |f_t(A) - f_t(B)| \le \varepsilon$. Comme $f$ est continue, il existe $N_0$ tel que $A_{|[-N_0,N_0]} = B_{|[-N_0,N_0]} \Longrightarrow |f_t(A) - f_t(B)| \le \varepsilon$.

Ainsi on obtient la propriété de Feller :

$$\begin{aligned}
|f_t(A) - f_t(B)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\xi_t^A\right) - f\left(\xi_t^B\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\xi_t^A\right) - f\left(\xi_t^B\right)\right| \mathbb{1}_{\left\{\xi^A_{t|[-N_0,N_0]} = \xi^B_{t|[-N_0,N_0]}\right\}}\right] + \\
&\quad \mathbb{E}\left[\left|f\left(\xi_t^A\right) - f\left(\xi_t^B\right)\right| \mathbb{1}_{\left\{\xi^A_{t|[-N_0,N_0]} \neq \xi^B_{t|[-N_0,N_0]}\right\}}\right] \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|\varepsilon
\end{aligned}$$

par continuité de $f$ et par le lemme 142. □

# 4 Variation quadratique

But : définir $\int_0^t H_S dB_S$ avec $B$ le cours d'une action et $H$ la quantité d'actions possédées.

Problème : le brownien n'est pas à variation finie. On va étudier la variation quadratique d'une martingale continue générale.

## 4.1 Processus à variation finie

### 4.1.1 Fonction à variation finie

**Définition 90.** Une fonction continue $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $a(0) = 0$ est à variation continue si pour tout $t > 0$,

$$F(t) := \sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |a(t_{k+1}) - a(t_k)|, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq t_0 < \ldots < t_n \leq t\right\}$$

est finie.

**Proposition 91.** *i) La fonction $t \mapsto F(t)$ est croissante et continue : il existe une mesure $|\mu|$ finie sur les compacts telle que $|\mu|([0,t]) = F(t)$.*

*ii) $\forall s \leq t$, $|a(s) - a(t)| \leq F(t) - F(s)$*

*iii) $t \mapsto \frac{F(t+a(t))}{2}$ et $t \mapsto \frac{F(t)-a(t)}{2}$ sont croissantes et continues. Il existe $\mu_+, \mu_-$ mesures finies sur les compacts elles que $\mu_+([0,t]) = \frac{F(t)+a(t)}{2}$, $\mu_-([0,t]) = \frac{F(t)-a(t)}{2}$. On a alors :*

$$|\mu| = \mu_+ + \mu_-$$

$$\begin{aligned}
a(t) &= \mu_+([0,t]) - \mu_-([O,t]) \\
&= \mu([0,t])
\end{aligned}$$

*où $\mu$ est la mesure signée $\mu = \mu_+ - \mu_-$.*

**Proposition 92.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, $t \geq 0$ et $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0. On a*

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)\, da(s) &:= \int_0^t f(s)\, d\mu(s) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t_k^{(n)}\right)\left(a\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - a\left(t_k^{(n)}\right)\right)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit $f_n$ telle que $f_n(s) = f\left(t_k^{(n)}\right)$ si $t_k^{(n)} < s \leq t_{k+1}^{(n)}$ . Alors, la somme s'écrit

$$\int f_n(s)\, d\mu(s) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t_k^{(n)}\right)\left(a\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - a\left(t_k^{(n)}\right)\right)$$

$f_n(s) \to f(s)$ pour tout $s$ et $f_n$ est bornée par $\sup_{0\leq s\leq t} |f(s)|$ donc on obtient le résultat par convergence dominée. □

Notation : pour toute $f$ mesurable positive, on note

$$\int f(s)\,|da(s)| := \int f(s)\,d|\mu|(s)$$

**Proposition 93.** *Pour tout $f$ mesurable bornée,*

$$\left|\int_0^t f(s)\,da(s)\right| \leq \int_0^t |f(s)|\,|da(s)|$$

### 4.1.2 Processus à variation finie

Soit $(\mathcal{F}_t)_t$ une filtration continue à droite.

**Définition 94.** Un processus $(X_t)_t$ est dit progressif si pour tout $t \geq 0$, l'application $\begin{array}{ccc} \Omega \times [0,t] & \to & \mathbb{R} \\ (\omega, s) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurable.

**Proposition 95.** *Si $(X_t)$ est continu à droite ou continu à gauche et adapté, alors il est progressif.*

On note $Prog = \left\{A \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : (\mathbb{1}_A(\omega,t))_{t\geq 0} \text{ est un processus progressif}\right\}$.

**Définition 96.** Un processus à variation finie est un processus adapté et sont toutes les trajectoires sont à variation finie (continues, partant de 0).

**Proposition 97.** *Soit $A$ un processus à variation finie et $H$ un processus progressif. Soit $H \cdot A$ le processus défini par*

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s dA_s$$

*bien défini si pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t |H_S|\,|dA_s| < +\infty$$

*Le processus $H \cdot A$ est à variation finie.*

*Démonstration.* Chaque trajectoire est à variation finie :

$$(H \cdot A)_t - (H \cdot A)_s = \int_s^t H_s dA_s$$

$$\implies |(H \cdot A)_t - (H \cdot A)_s| \leq \int_s^t |H_s|\,|dA_s|$$

Il reste à vérifier que le processus est adapté. On veut vérifier que si $h : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurable bornée, alors $\int_0^t h(\omega,s)\,dA_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Si $h(\omega,s) = \mathbb{1}_{]u,v]}(s)\,\mathbb{1}_B(\omega)$ avec $]u,v] \subset [0,t]$ et $B \in \mathcal{F}_t$, alors

$$\int_0^t h(\omega,s)\,dA_s = \mathbb{1}_B(\omega)\,(A(v) - A(u))$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Par le lemme des classes monotones $h = \mathbb{1}_\Gamma$ est mesurable si $\Gamma \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$. Puis, on conclue si $h$ est mesurable bornée en l'écrivant comme limite ponctuelle de fonctions étagées. $\square$

## 4.2 Martingale locale

**Exemple.** Brownien $B$ en dimension 3 : $f : x \mapsto \frac{1}{|x|}$ est harmonique, $\Delta f = 0$ . On a envie de dire

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \frac{\Delta}{2} f(X_S)\,ds + \text{Martingale}$$

$$f(B_t) = \text{Martingale}$$

C'est faux ! $\mathbb{E}[f(B_t)] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{|x|} \exp\left(-\frac{|x-3|^2}{2t}\right) dt \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Notation : Si $T$ est un temps d'arrêt, on note $X^T$ le processus $t \mapsto X_{t\wedge T}$.

**Définition 98.** Un processus adapté à trajectoires continues $(M_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_0 = 0$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante d temps d'arrêts $(T_n)$ telle que $T_n \to +\infty$ presque sûrement telle que pour tout $n$, $M^{T_n}$ est une martingale uniformément intégrable. Si $M_0 \neq 0$ ont dit que $M$ est une martingale locale si $M - M_0$ est une martingale locale. Dans tous les cas, on dit qu'une telle suite de temps d'arrêts réduit la martingale locale.

*Remarque.* On n'a pas forcément $M_t \in L^1$

**Proposition 99.** *a. Une martingale est une martingale locale*

*b. On pourrait changer la définition et demander simplement $\left(M^{T_n}\right)_n$ martingale.*

*c. Si $T$ temps d'arrêt et $M$ martingale locale, alors $M^T$ est une martingale locale.*

*d. Si $S_n$ réduit $M$ et $T_n$ est une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \nearrow +\infty$ presque sûrement, alors $T_n \wedge S_n$ réduit $M$.*

*e. L'ensemble des martingales locales et un espace vectoriel.*

*Démonstration.* a. prendre $T_n = n$

b. En effet, il suffit de considérer $T_n \wedge n$ □

**Proposition 100.** *1) Une martingale locale positive telle que $M_0 \in L^1$ est une surmartingale.*

*2) Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale telle que $|M_t| \leq Z$ pour tout $t \geq 0$ où $Z \in L^1$, alors $M$ est une martingale uniformément intégrable.*

*3) Si $M$ est une martingale locale telle que $M_0 = 0$ alors la suite $T_n = \inf\{t \geq 0,\ |M_t| \geq n\}$ réduit $M$.*

*Démonstration.* 1) On a $M_t = M_0 + N_t$ où $N$ est une martingale locale issue de 0. Soit $(T_n)$ qui réduit $N$. On a :

$$\mathbb{E}\left[N_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = N_{s\wedge T_n}$$

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge T_n}$$

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s \tag{5}$$

par Fatou ($M \geq 0$). En particulier, $\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0] < \infty$. $M_t \in L^1$ et (5) dit que $M$ est une surmartingale.

2) On a de même

$$\mathbb{E}\left[N_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = N_{s\wedge T_n}$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s$$

3) $M^{T_n}$ martingale locale bornée donc (vraie) martingale. □

Rappel : si $M$ est une martingale dans $L^2$,

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_u)^2\right] + \mathbb{E}\left[(M_u - M_s)^2\right]$$

si $s \leq u \leq t$.

**Théorème 101.** *Si $M$ est une martingale locale telle que $M_0 = 0$ à variation finie, alors $M = 0$.*

*Démonstration.* Soit $T_n = \inf\left\{t \geq 0,\ \int_0^t |sM_s| \geq n\right\}$, $T_n$ temps d'arrêt. $N := M^{T_n}$ martingale locale issue de 0.

$$N(t) \leq \int_0^{T_n} |dM_s| \leq n$$

donc $N$ est une martingale bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_t^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\left(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{E}\left[\left(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_k \left|N_{t_{k+1}} - N_{t_k}\right| \sum_{k=0}^{p-1}\left|N_{t_{k+1}} - N_{t_k}\right|\right]
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{p-1} \left| N_{t_{k+1}} - N_{t_k} \right| \leq \int_0^t |dN_s| \leq \int_0^{T_n} |dM_s| \leq n$

$$\mathbb{E}\left[N_t^2\right] \quad \leq \quad n.\mathbb{E}\left[\sup_k \left| N_{t_{k+1}} - N_{t_k} \right|\right]$$

et $\sup_k \left| N_{t_{k+1}} - N_{t_k} \right|$ est bornée car $N$ est bornée ainsi,

$$\mathbb{E}\left[N_t^2\right] \to 0 \text{ ps}$$

quand le pas de la subdivision tend vers 0. Donc $\mathbb{E}\left[N_t^2\right] = 0$. $N = 0$ presque sûrement par continuité. □

## 4.3 Variation quadratique d'une martingale locale

**Théorème 102.** *Soit $M$ une martingale locale. Il existe un unique processus $(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ croissant partant de 0 tel que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale locale. De plus, si $0 = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ est une suite de partitions emboîtées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0 alors*

$$\langle M, M\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}} \right)^2$$

*en probabilité. Le processus $\langle M, M\rangle$ est indépendant de la suite de partition. Il est appelé variation quadratique de $M$.*

*Remarque.* 1) Si $M_t = M_0 + N_t$ alors $\langle M, M\rangle_t = \langle N, N\rangle_t$

2) Pour le mouvement brownien $B$, on a $\langle B, B\rangle_t = t$. En effet,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 - \left( t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right) \xrightarrow{(\mathbb{P})} 0$$

En fait, la convergence a lieu dans $L^2$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 - \left( t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right) \right) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left( \left( B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right)^2 \right) \\
&= \quad c \sum_{k=0}^{n-1} \left( t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

3) L'hypothèse "emboîtés" n'est pas nécessaire.

4) La variation quadratique est continue.

*Démonstration.* Unicité : Soient $A$ et $A'$ des variations quadratiques

$$A - A' = \left(M^2 - A'\right) - \left(M^2 - A\right)$$

$A - A'$ est à variation finie et $\left(M^2 - A'\right) - \left(M^2 - A\right)$ est une martingale locale donc $A = A'$.

Existence :

Etape 1. On montre qu'on peut supposer $M_0 = 0$. Posons $M_t = M_0 + N_t$. $M_t^2 - \langle N, N\rangle_t$ est une martingale locale :

$$M_t^2 - \langle N, N\rangle_t = M_0^2 + 2M_0 N_t + N_t^2 - \langle N, N\rangle_t$$

$N_t^2 - \langle N, N\rangle_t$ est une martingale locale. Il reste à vérifier que $2M_0 N_t$ est une martingale locale.

Soit $T_n$ qui réduit $N$ et

$$\tilde{T}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |M_0| \geq n \\ T_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$\tilde{T}_n$ est un temps d'arrêt et réduit $N$.

$$\mathbb{E}\left[N_{t\wedge\tilde{T}_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = N_{s\wedge\tilde{T}_n}$$

$M_0 N_{t\wedge \tilde{T_n}} \in L^1$ et $\mathbb{E}\left[M_0 N_{t\wedge \tilde{T_n}} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_0 N_{s\wedge \tilde{T_n}}$ donc $(M_0 N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.

Etape 2. On montre qu'on peut supposer $M$ bornée par une constante. Si $M$ pas borné (mais $M_0 = 0$), on pose

$$T_n = \inf\{t \geq 0,\ |M_t| \geq n\}$$

$M^{T_n}$ est une martingale bornée. Sot $A^{(n)}$ sa variation quadratique. Par la partie unicité de la preuve, on a $A^{(n+1)}_{t\wedge T_n} = A^{(n)}_t$. $T_n \nearrow +\infty$ presque sûrement donc on peut définir $A_t = \lim_{n\to\infty} A^{(n)}_t$ est processus croissant partant de 0. Par construction,$M_{t\wedge T_n} - A_{t\wedge T_n}$ est une martingale locale.

Etape 3. Il reste à montrer le théorème en supposant $M_0 = 0$ et $|M_t| \leq K$ pour tout $t$. Soit $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ partition de $\mathbb{R}_+$. La pas de $\pi$ est $|\pi| = \sup|t_{k+1} - t_k|$. Pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$,

$$A_\pi(t) = \sum_{j=1}^{k}\left(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right)^2 + (M_t - M_{t_k})^2$$

Vérifions que $M_t^2 - A_\pi(t)$ est une martingale (l'appartenance à $L^1$ est OK). Soit $s < t$, soit $k, l$ tels que $t_k \leq s < t_{k+1}$, $t_l \leq t < t_{l+1}$ . Alors,

$$A_\pi(t) - A_\pi(s) = \sum_{j=k+1}^{l}\left(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\right)^2 + (M_t - M_{t_l})^2 - (M_s - M_{t_k})^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[A_\pi(t) - A_\pi(s) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - A_\pi(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - A_\pi(s)$$

Problème : $A_\pi$ n'est pas croissant ! Prendre la limité $|\pi| \to 0$. L'enjeu essentiel est d'estimer $\mathbb{E}\left[(A_\pi(t) - A_{\pi'}(t))^2\right]$ quand $\pi \subset \pi'$ avec $t \in \pi$. $\pi' = \{0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots\}$. $\xi_i = M_{s_i} - M_{s_{i-1}}$ est borné par $2K$. $M_{t_1} - M_{t_0} = \xi_1 + \ldots + \xi_{k_1}$, $M_{t_2} - M_{t_1} = \xi_{k_1+1} + \ldots + \xi_{k_2}$. Si $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{k-1} \leq i_k$ alors

$$\mathbb{E}\left[\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_l}\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{k-1}}\mathbb{E}\left[\xi_{i_l} \mid \mathcal{F}_{s_l}\right]\right]$$

Pour $t = t_m = s_{k_m}$,

$$\begin{aligned}A_\pi(t) - A_{\pi'}(t) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\xi_{k_{i-1}+1} + \ldots + \xi_{k_i}\right)^2 - \sum_{j=1}^{k_m}\xi_j^2\\ &= 2\sum_{i=1}^{m} T_i\end{aligned}$$

où $T_l = \sum_{k_{l-1}<i<j\leq k_l} \xi_i\xi_j$. $\mathbb{E}\left[T_l T_{l'}\right] = 0$ si $l \neq l'$. Donc

$$\mathbb{E}\left[(A_\pi(t) - A_\pi(t))^2\right] = 4\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left[T_i^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_l^2\right] &= \sum_{k_{l-1}<i,i'<j\leq k_l}\mathbb{E}\left[\xi_i\xi_{i'}\xi_j^2\right]\\ &= \sum_{j=k_{l-1}+1}^{k_l}\mathbb{E}\left[\left(M_{s_{j-1}} - M_{s_{k_{l-1}}}\right)^2\xi_j^2\right]\end{aligned}$$

Posons $\delta_t(\varepsilon) = \sup_{0\le u<v\le t,\ v\le u+\varepsilon} |M_u - M_v|$

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{m} \mathbb{E}\left[T_l^2\right] &\le \mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^2 \sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^4\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Il reste à voir que $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right)^2\right]$ est bornée uniformément en $\pi, \pi'$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right)^2\right] &= \sum_{j=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_j^4\right] + 2\sum_{i=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_i^2 \sum_{j=i+1}^{k_m} \xi_j^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_j^4\right] + 2\sum_{i=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_i^2 \left(M_{s_{k_m}} - M_{s_i}\right)^2\right] \\ &\le (2K)^2 \sum_{j=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_j^2\right] + 2(2K)^2 \sum_{i=1}^{k_m} \mathbb{E}\left[\xi_i^2\right] \\ &\le 12K^2 \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j\right)^2\right] \le 48K^4\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}\left[(A_\pi(t) - A_{\pi'}(t))^2\right] \le 28K^2 \mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\delta_t(|\pi|)^4$ est bornée par $2K$ donc $28K^2\mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^4\right]^{\frac{1}{2}} \underset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0$ presque sûrement.

$A_\pi - A_{\pi'}$ est une martingale car $A_\pi - A_{\pi'} = \left(M^2 - A_{\pi'}\right) - \left(M^2 - A_\pi\right)$. Par Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t} (A_\pi(s) - A_{\pi'}(s))^2\right] \le 112K^2 \mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

On peut trouver une suite de parties emboîtées $(\pi_n)$ telle que

$$\sum_n \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t} \left|A_{\pi_{n+1}}(s) - A_{\pi_n}(s)\right|\right] < +\infty$$

Presque sûrement, on peut définir $A(s) = \lim_{n\to\infty} A_{\pi_n}(s)$ $s < t$ limite uniforme de fonctions continues donc continue. $A_\pi$est croissante sur $\pi_n$ donc $A$ est croissante sur $\pi_n$ pour tout $n$. Par continuité, $A$ est croissante.

(Exercice pour la prochaine fois) Vérifier que pour tout $(\pi_n)_n$ suite de partitions emboîtées, $A_{\pi_n} \overset{(\mathbb{P})}{\to} A$. □

*Remarque.* On a montré :

1) $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t} (A_\pi(s) - A(s))^2\right] \le 112K^2 \mathbb{E}\left[\delta_t(|\pi|)^4\right]^{\frac{1}{2}}$

2) Si $T$ est un temps d'arrêt, alors

$$\langle M^T, M^T\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge T}$$

En effet, $\left(M_{t\wedge T}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge T}\right)_{t\ge 0}$ est une martingale locale.

3) On note $\langle M, M\rangle_\infty = \lim \langle M, M\rangle_t \in [0, +\infty]$

**Théorème 103.** *Soit $M$ une martingale lolcale avec $M_0 = 0$,*

*1) Il y a équivalence entre*

*a. $M$ est une martingale bornée dans $L^2$*

*b. $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < +\infty$*

*Si ces conditions sont satisfaites, alors $\left(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t\right)_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable. En particulier,*

$$\mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty\right]$$

*2) Il y a équivalence entre*

*a. $M$ est une martingale telle que pour tout $t$, $M_t \in L^2$*

*b. $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] < +\infty$*

*Dans ce cas, $\left(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t\right)_{t\geq 0}$ est une vraie martingale.*

*Remarque.* Dans a. l'hypothèse "vraie martingale" est nécessaire. Contre-exemple : brownien en dim 3.

*Démonstration.* "a $\Longrightarrow$ b" Doob (pour les vraies martingales) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|^2\right] &\leq 4\mathbb{E}\left[M_t^2\right]\\ &\leq C < +\infty\end{aligned}$$

Soit $(T_n)_n$ qui réduit $M^2 - \langle M, M\rangle$.

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_n}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge T_n}\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_{t\wedge T_n}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} M_s^2\right] \leq C < +\infty$$

$$\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty\right] \leq C < +\infty$$

par Fatou.

"b $\Longrightarrow$ a" Soit $T_n$ qui réduit $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$. Posons $S_n = T_n \wedge \inf\{t\geq 0,\ |M_t| \geq n\}$. $M^{S_n}$ est une martingale bornée.

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge S_n}^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_{t\wedge S_n}\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty\right] < +\infty$$

Par Fatou, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_\infty\right]$. $(M_{t\wedge S_n})_n$ est une martingale bornée dans $L^2$ donc uniformément bornée et converge presque sûrement dans $L^1$.

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge S_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge S_n}$$

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s$$

donc $M$ est une martingale. Il reste à voir que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale uniformément bornée.

$$\mathbb{E}\left[M^2 - \langle M, M\rangle\right] \leq \sup_{s\geq 0} M_s^2 + \langle M, M\rangle_\infty$$

$\sup_{s\geq 0} M_s^2$ est intégrable par Doob. Ainsi $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale uniformément bornée.

2) Il suffit d'appliquer le résultat 1) à $(M_{t\wedge t_0})_{t\geq 0}$ pour $t_0$ fixé. □

**Corollaire 104.** *Si $M$ est une martingale locale qui part de 0 telle que $\langle M, M\rangle = 0$, alors $M = 0$.*

*Démonstration.* On a $M^2$ vraie martingale : $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\right] = 0$. □

**Définition 105.** Soient $M, N$ deux martingales locales. On appelle covariation de $M$ et $N$ le processus $\langle M, N\rangle := \frac{1}{2}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle\right)$.

**Proposition 106.** *1) $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variation finie tel que $MN - \langle M, N\rangle$ tel que $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale locale.*

*2) L'application $M, N \mapsto \langle M, N\rangle$ est bilinéaire.*

*3) Si $0 = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ est une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, alors $\langle M, N\rangle_t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}}\right)\left(N_{t_{k+1}^{(n)}} - N_{t_k^{(n)}}\right)$.*

*4) Si $T$ est un temps d'arrêt, on a $\langle M^T, N^T\rangle_t = \langle M^T, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge T}$.*

*5) Si $M, N$ sont des martingales bornées dans $L^2$, alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale uniformément intégrable. De plus, $\langle M, N\rangle_t \underset{ps}{\longrightarrow} \langle M, N\rangle_\infty$ intégrable et tel que*

$$\mathbb{E}\left[M_\infty N_\infty\right] - \mathbb{E}\left[\langle M, N\rangle_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_0 N_0\right]$$

*Démonstration.* 1) découle des propriétés de la variation quadratique déjà vues. On montre l'unicité comme précédemment.

2) OK par définition.

3) OK par même propriété pour $\langle M, M\rangle$

4) Conséquence de 3)

5) On écrit $MN = \frac{1}{2}\left((M+N)^2 - M^2 - N^2\right)$ et on applique les résultats précédents. □

**Corollaire 107.** *Si $B$ et $B'$ sont deux browniens indépendants, alors $\langle B, B'\rangle = 0$.*

*Démonstration.* Soit $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B + B'\right)$. C'est un mouvement brownien.

$$\begin{aligned}\langle Z, Z\rangle_t &= t = \frac{1}{2}\langle B + B', B + B'\rangle \\ &= = \frac{1}{2}\left(\langle B, B\rangle_t + \langle B', B'\rangle_t\right) + \langle B, B'\rangle_t\end{aligned}$$

donc $\langle B, B'\rangle = 0$. □

**Proposition 108.** *Inégalité de Kunita-Watanabe (équivalent de Cauchy-Schwarz)*

*Soient $M, N$ deux martingales locales et $H, K$ deux processus mesurables. Alors,*

$$\left(\int_0^t |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M, N\rangle_s|\right)^2 \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right)\left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N\rangle_s\right)$$

*Démonstration.* Posons $\langle M, N\rangle_s^t = \langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s$ pour $s \leq t$. Presque sûrement,

$$\begin{aligned}\left|\langle M, N\rangle_s^t\right|^2 &= \lim\left(\sum\left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)\left(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}\right)\right) \\ &\leq \langle M, M\rangle_s^t \langle N, N\rangle_s^t\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_s^t |d\langle M, N\rangle_s| &= \lim\sum\left|\langle M, N\rangle_{t_k}^{t_{k+1}}\right| \\ &\leq \operatorname{limsup}\sum\left|\langle M, M\rangle_{t_k}^{t_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2}}\left|\langle N, N\rangle_{t_k}^{t_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \operatorname{limsup}\left(\sum\langle M, M\rangle_{t_k}^{t_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\langle N, N\rangle_{t_k}^{t_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_s^t d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_s^t d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donc $\left(\int_A |d\langle M, N\rangle_s|\right)^2 \leq \left(\int_A d\langle M, M\rangle_s\right)\left(\int_A d\langle N, N\rangle_s\right)$ est vraie pour tout $A$ mesurable par un argument de classe monotone. Si $H = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $K = \sum \mu_i \mathbb{1}_{A_i}$ sont étagées positives, alors

$$\begin{aligned}\int H_s K_s\,|d\langle M, N\rangle_s| &= \sum \lambda_i \mu_i \int_{A_i} |d\langle M, N\rangle_s| \\ &\leq \sum \lambda_i \mu_i \left(\int_{A_i} d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{A_i} d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int K_s^2 d\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Pour conclure, on écrit $H, K$ comme limites croissantes de fonctions étagées positives et on utilise le théorème de convergence monotone. □

### 4.4 Semi-martingales continues

**Définition 109.** On dit que $X$ est une semi-martingale continue si $X$ s'écrit $X = M + A$ avec $M$ martingale locale et $A$ à variation finie (la décomposition étant unique).

Si $X = M + A$ et $Y = N + B$ avec $M, N$ martingales locales et $A, B$ à variation finie, on pose $\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle$.

**Proposition 110.** *Soit* $0 = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ *une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0 et soit* $X, Y$ *deux semi-martingales. On a :*

$$\langle X, Y\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}}\right)\left(Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}}\right)$$

*Démonstration.* Pour simplifier l'écriture, on suppose $X = Y$. On écrit $X = M + A$ avec $A$ à variation finie et $M$martingale locale.

$$\sum \left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)^2 = \sum \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 + \sum \left(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\right)^2 + 2\sum \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)\left(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\right)$$

Or, $\sum \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, M\rangle_t = \langle X, X\rangle_t$. On veut voir $\sum \left(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\right)^2 \to 0$.

$$\sum \left(A_{t_{k+1}^{(n)}} - A_{t_k^{(n)}}\right)^2 \quad \leq \quad \underbrace{\sup \left|A_{t_{k+1}^{(n)}} - A_{t_k^{(n)}}\right|}_{\to 0 \text{ ps}} \int_0^t |dA_s|$$

par continuité des trajectoires. Donc on a convergence en probabilité vers 0. De même,

$$\sum \left|M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}}\right| \left|A_{t_{k+1}^{(n)}} - A_{t_k^{(n)}}\right| \leq \sup_k \left|M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}}\right| \int_0^t |dA_s| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

□

# 5 Intégrale stochastique

### 5.1 Construction de l'intégrale stochastique

**Définition 111.** Soit $\mathbb{H}$ l'espace des martingales $M$ continues bornées dans $L^2$ (pour tout $M \in \mathbb{H}$, $\sup_t \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$) telles que $M_0 = 0$. On a vu que $M, N \in \mathbb{H} \implies \mathbb{E}\left[|\langle M, N\rangle_\infty|\right] < \infty$. On définit la forme bilinéaire symétrique

$$(M, N)_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\langle M, N\rangle_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty N_\infty\right]$$

On a vu que $(M, M)_{\mathbb{H}} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $M = 0$. On note $\|M\|_{\mathbb{H}} = (M, M)_{\mathbb{H}}^{2}$.

**Proposition 112.** *L'espace* $(\mathbb{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}})$ *est un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* Il est clair que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel et que $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}}$ est un produit scalaire. Il faut vérifier que $\mathbb{H}$ est complet pour $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$. Soit $\left(M^{(n)}\right)$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}$. C'est équivalent à dire que $\left(M_\infty^{(n)}\right)$ est de Cauchy dans $L^2$, donc $M_\infty^{(n)}$ converge dans $L^2$ vers $M_\infty \in L^2$. Par l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(m)} - M_t^{(n)}\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\left(M_\infty^{(m)} - M_\infty^{(n)}\right)^2\right] \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On peut extraire une sous-suite telle que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{t>0}\left|M_t^{(n_{k+1})} - M_t^{(n_k)}\right|\right] < +\infty$$

Presque sûrement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(n_{k+1})} - M_t^{(n_k)}\right| < +\infty$$

Donc $M^{(n_k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite, notée $M$. $M$ est donc continue comme limite uniforme de fonctions continues. $M_t^{(n_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M_t$ dans $L^2$. En particulier, $M_t \in L^2$ et $M_t^{(n_k)} = \mathbb{E}\left[M_s^{(n_k)} \mid \mathcal{F}_t\right]$ pour $t \leq s$ et $M_t = \mathbb{E}\left[M_s \mid \mathcal{F}_t\right]$ donc $M$ est une martingale et $M_t = \mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]$. Par Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|M_t^2\right|\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_\infty^2\right]$$

donc $(M_t)$ est uniformément bornée dans $L^2$ et on a bien

$$\left\|M^{(n)} - M\right\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E}\left[\left(M_\infty^{(n)} - M_\infty\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

**Définition 113.** Pour $M \in \mathbb{H}$, on pose

$$L^2(M) := L^2\left(\Omega \times \mathbb{R}_+, Prog, d\mathbb{P} \otimes d\langle M, M\rangle\right)$$

$L^2(M)$ est l'espace des processus progressifs tels que $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, M\rangle_s\right]$$

**Définition 114.** On note $\mathscr{E}$ le sous-espace de $L^2(M)$ formée des processus de la forme $H_s(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}(\omega)\mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(s)$ où $0 < t_0 < \ldots < t_p$ et $H^{(k)}$ est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable et borné pour tout $k$.

**Proposition 115.** *Pour tout $M \in \mathbb{H}$, l'espace $\mathscr{E}$ est dense dans $L^2(M)$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que $\mathscr{E}^\perp = \{0\}$. Soit $K \in \mathscr{E}^\perp$. On pose

$$X_t := \int_0^t K_u d\langle M, M\rangle_u$$

On vérifie que $(X_t)_t \subset L^1$.

$$\mathbb{E}\left[|X_t|\right] \overset{\text{CS}}{\leq} \mathbb{E}\left[\int_0^t K_u^2 d\langle M, M\rangle_u\right]^{\frac{1}{2}} \times \mathbb{E}\left[\int_0^t d\langle M, M\rangle_u\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Donc $X_t \in L^1$. Soit $0 \leq s < t$ et soit $F$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée et soit $H_s(\omega) := F(\omega)\mathbb{1}_{]s,t]}(u)$. On a $(H, K)_{L^2(M)} = 0$ ie $\mathbb{E}\left[F\int_s^t K_u d\langle M, M\rangle_u\right] = 0$ d'où $\mathbb{E}\left[F(X_t - X_s)\right] = 0$ pour tout $F$ $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée et $\mathbb{E}\left[F(X_t - X_s)\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_S$ : $(X_t)_t$ est une martingale à variation finie car $\int_0^t |K_u| d\langle M, M\rangle_u < +\infty$. Donc $X = 0$ ie pour tout $t$,

$$\int_0^t K_u d\langle M, M\rangle_u = 0$$

d'où $K = 0$ dans $L^2(M)$. □

**Théorème 116.** *Soit $M \in \mathbb{H}$. Pour tout $H \in \mathscr{E}$ de la forme*

$$H_s(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}(\omega)\mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(s)$$

*(comme précédemment), on définit le processus $H \cdot M$ par*

$$(H \cdot M)_t = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}\left(M_{t_{k+1}\wedge t} - M_{t_k \wedge t}\right)$$

*1) L'application $H \mapsto H \cdot M$ s'étend en une isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathbb{H}$.*

*2) Le processus $H \cdot M$ est caractérisé par :*

$$\forall N \in \mathbb{H}, \quad \langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle = \int H_s d\langle M, N \rangle_s$$

*3) Si $T$ est un temps d'arrêt, alors $\left(\mathbb{1}_{[0,T]} H\right) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot \left(M^T\right)$.*

**Définition 117.** On note $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$ l'intégrale stochastique.

*Démonstration.* 1) $H \cdot M$ est bien une martingale, bornée dans $L^2$, continue : $H \cdot M \in \mathbb{H}$. $H \mapsto H \cdot M$ est linéaire. Il reste à voir la propriété d'isométrie, ie

$$\|H \cdot M\|_{\mathbb{H}} = \|H\|_{L^2(M)}$$

$$\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t = \sum_{k=0}^{p-1} \left(H^{(k)}\right)^2 \left(\langle M, M \rangle_{t \wedge t_{k+1}} - \langle M, M \rangle_{t \wedge t_k}\right).$$

$$\begin{aligned} \|H \cdot M\|_{\mathbb{H}}^2 &= \mathbb{E}\left[\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_\infty\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p-1} \left(H^{(k)}\right)^2 \left(\langle M, M \rangle_{t_{k+1}} - \langle M, M \rangle_{t_k}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] \end{aligned}$$

car $s \mapsto \langle M, M \rangle_s$ est continue. Donc

$$\|H \cdot M\|_{\mathbb{H}}^2 = \|H\|_{L^2(M)^2}^2$$

L'espace d'arrivée $\mathbb{H}$ est complet et $\mathscr{E}$ est dense dans $L^2(M)$ donc on peut étendre l'isométrie $H \mapsto H \cdot M$ à tout $L^2(M)$.

2) On vérifie que c'est vrai pour les processus élémentaires. On prend $H$ de la forme habituelle. On a :

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, N \rangle_t &= \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)} \left(\langle M, N \rangle_{t \wedge t_{k+1}} - \langle M, N \rangle_{t \wedge t_k}\right) \\ &= \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s \end{aligned}$$

et $s \mapsto \langle M, N \rangle_s$ continue donc $\langle H \cdot M, M \rangle_t = (H \cdot \langle M, N \rangle)_t$. Pour voir que le propriété reste vraie pour tout $H \in L^2(M)$, on observe que $X \mapsto \langle X, N \rangle_t$ est continue de $\mathbb{H}$ dans $L^1$. En effet, par l'inégalité de Kunita-Watanabe 108,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\langle X, N \rangle_t|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\langle X, X \rangle_t\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\langle N, N \rangle_t\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|X\|_{\mathbb{H}} \|N\|_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

Si $H^{(n)} \in \mathscr{E}$ est tel que $H^{(n)} \to H$ dans $L^2(M)$ alors $H^{(n)} \cdot M \to H \cdot M$ dans $\mathbb{H}$ et donc $\langle H^{(n)} \cdot M, N \rangle_t \to \langle H \cdot M, N \rangle_t$ dans $L^1$.

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, N \rangle &= \lim_{n \to +\infty} \langle H^{(n)} \cdot M, N \rangle \\ &= \lim_{n \to +\infty} H^{(n)} \cdot \langle M, N \rangle \\ &= H \cdot \langle M, N \rangle \end{aligned}$$

Il reste à vérifier $H \cdot \langle M, N \rangle = \lim H^{(n)} \langle M, N \rangle$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(H^{(n)} - H\right) d\langle M, N \rangle_s\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H^{(n)} - H\right)^2 d\langle M, M \rangle_s\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\langle N, N \rangle_t\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|H^{(n)} - H\right\|_{L^2(M)} \|N\|_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

Voyons que si $X \in \mathbb{H}$ est tel que pour tout $N \in \mathbb{H}$, $\langle X, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$ alors $X = H \cdot M$. Dans ce cas, on a

$$\langle X - H \cdot M, N\rangle, \quad \forall N \in \mathbb{H}$$

On peut prendre $N = X - H \cdot M$ et on obtient $\|X - H \cdot M\|_{\mathbb{H}} = 0$ d'où $X = H \cdot M$.

3) Soit $T$ un temps d'arrêt. Pour tout $N \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \langle (H \cdot M)^T, N\rangle_t &= \langle H \cdot M, N\rangle_{t\wedge T} \\ &= (H \cdot \langle M, N\rangle)_{t\wedge T} \\ &= \left(H\mathbb{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N\rangle\right)_t \end{aligned}$$

Donc $(H \cdot M)^T = \left(H\mathbb{1}_{[0,T]}\right) \cdot M$. De la même façon,

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M^T, N\rangle &= \left(H \cdot \langle M^T, N\rangle\right)_t \\ &= H \cdot \left(\langle M, N\rangle^T\right) \\ &= H\mathbb{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N\rangle \end{aligned}$$

Donc $H \cdot (M^t) = \left(H\mathbb{1}_{[0,T]}\right) \cdot M$. □

*Remarque.* On peut utiliser la propriété 116 2) pour définir l'intégrale stochastique en utilisant le théorème de Riesz. On peut réécrire cette propriété sous la forme

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s$$

**Proposition 118.** *Associativité. Soit $M \in \mathbb{H}$. Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K \cdot M)$. Alors, $HK \in L^2(M)$ et $HK \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$.*

*Démonstration.* D'après la propriété caractéristique 116 2), on a

$$\begin{aligned} \langle K \cdot M, K \cdot M\rangle &= K \cdot \langle M, K \cdot M\rangle \\ &= K \cdot (K \cdot \langle M, M\rangle) \\ &= K^2 \cdot \langle M, M\rangle \end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} H_s^2 K_s^2 d\langle M, M\rangle_s = \int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle K \cdot M, K \cdot M\rangle_s$. Comme $H \in L^2(K \cdot M)$, on a bien $HK \in L^2(M)$. Soit $N \in \mathbb{H}$. On a

$$\begin{aligned} \langle (HK) \cdot M, N\rangle &= (HK) \cdot \langle M, N\rangle \\ &= H \cdot (K \cdot \langle M, N\rangle) \end{aligned}$$

par associativité de l'intégrale contre les processus à variation finie).

$$\langle (HK) \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle K \cdot M, N\rangle$$

ce qui montre $(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$. □

De manière informelle,

$$\int_0^t H_s d\left(\int_0^\cdot K_u dM_u\right)_s = \int_0^t H_s K_s dM_s$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t &= \int_0^t H_s d\left(\left\langle M, \int_0^\cdot K_u dN_u \right\rangle\right)_s \\ &= \int_0^t H_s d\left(\int_0^\cdot K_u d\langle M, N\rangle_u\right)_s \\ &= \int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s \end{aligned}$$

Pour tout $M, N \in \mathbb{H}$ et $H \in L^2(M)$, $N \in L^2(N)$,

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H_s dM_s, \int_0^{\cdot} K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s$$

Comme $H \cdot M$ est une martingale bornée dans $L^2$ : $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0$. Si $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u dM_u \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u dM_u$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u dM_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]$$

et plus généralement,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)\left(\int_0^t K_s dN_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s\right]$$

**Extension de l'intégrale stochastique**

Soit $M$ une martingale locale issue de 0. On note $L^2_{\text{loc}}(M)$ l'espace des processus progressifs $H$ tels que, presque sûrement, $\forall t \geq 0$, $\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s < +\infty$. On note $L^2(M)$ l'espace des processus tels que $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty$.

**Théorème 119.** *Soit $M$ martingale locale issue de 0. pour tout $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$, il existe une unique martingale locale $H \cdot M$ tel que, pour tout $N$ martingale locale,*

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$$

*Si $T$ est un temps d'arrêt, on a :*

$$\left(\mathbb{1}_{[0,T]} H\right) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot \left(M^T\right)$$

*Si $K \in L^2_{\text{loc}}(M)$ et $L \in L^2_{\text{loc}}(K \cdot M)$, alors $HK \in L^2_{\text{loc}}(M)$ et*

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$$

*Si $M \in \mathbb{H}$, alors $H \cdot M$ coïncide avec la définition précédente.*

*Démonstration.* Soit $T_n = \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t \left(1 + H_s^2\right) d\langle M, M\rangle_s \geq n\right\} \leq \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s \geq n \text{ ou } \langle M, M\rangle_t \geq n\right\}$. Presque sûrement, $T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ , temps d'arrêt.

$$\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle = \langle M, M\rangle_{t \wedge T_n} \leq n$$

donc $M^{T_n} \in \mathbb{H}$.

$$\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_s = \int_0^{T_n} H_s^2 \langle M, M\rangle_s \leq n$$

donc $H \in L^2\left(M^{T_n}\right)$. L'intégrale stochastique $H \cdot M^{T_n}$ est bien définie. Si $m > n$,

$$\left(H \cdot M^{T_m}\right)^{T_n} = H \cdot \left(M^{T_m \wedge T_n}\right) = H \cdot \left(M^{T_n}\right)$$

Donc il existe un unique processus $H \cdot M$ tel que $(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot \left(M^{T_n}\right)$. On sait que $(H \cdot M)^{T_n}$ est une martingale uniformément intégrable et $T_n \nearrow +\infty$ donc $H \cdot M$ est une martingale locale. Soit $N$ une martingale locale, qu'on suppose issue de 0 sans perte de généralité. Soit $T'_n = \inf\{t \geq 0 \mid |N_t| \geq n\}$ et on définit $S_n = T_n \wedge T'_n$.

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot M, N\rangle^{S_n} &= \langle (H \cdot M)^{T_n}, N^{S_n}\rangle \\
&= \langle H \cdot \left(M^{T_n}\right), N^{S_n}\rangle \\
&\qquad \in \mathbb{H} \quad \in \mathbb{H} \\
&= H \cdot \langle M^{T_n}, N^{S_n}\rangle
\end{aligned}$$

par la propriété caractéristique 116 2), d'où

$$\begin{aligned}\langle H\cdot M,N\rangle^{S_n} &= H\cdot\langle M^{T_n},N^{S_n}\rangle\\ &= H\cdot\langle M,N\rangle^{S_n}\\ &= (H\cdot\langle M,N\rangle)^{S_n}\end{aligned}$$

On a bien vérifié $\langle H\cdot M,N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle$ car $S_n\to+\infty$ presque sûrement. De même on montre que si $n\in\mathbb{H}$, $\langle (H\cdot M)^{T_n},N\rangle = H\cdot\langle M^{T_n},N\rangle$ caractérise $(H\cdot M)^{T_n}$ pour tout $n$.

Les autres propriétés se démontrent de même par localisation. □

*Remarque.* Par la propriété caractéristique 116 2),

$$\langle H\cdot M,H\cdot M\rangle = H\cdot\langle M,H\cdot M\rangle = H^2\cdot\langle M,M\rangle$$

Si $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right] < +\infty$ alors $(H\cdot M)^t$ est une martingale uniformément intégrable et $\left((H\cdot M)^t\right)^2 - \langle H\cdot M,H\cdot M\rangle$ aussi. En particulier, on a alors bien

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dM_s\right] = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right]$$

L'égalité n'est pas vraie en générale mais on a toujours :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right]$$

On peut finalement définir l'intégrale par rapport à une semi-martingale. On dit qu'un processus progressif $H$ est localement borné si, presque sûrement, pour tout $t\geq 0$, $\sup\limits_{0\leq s\leq t}|H_s|<+\infty$. En particulier, tout processus adapté et continu est localement borné. Si $H$ est localement borné et $A$ est à variation finie, alors $\int_0^t H_s\,|dA_s| < +\infty$ et si $M$ est une martingale locale, on a aussi

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s < +\infty$$

ie $H\in L^2_{\text{loc}}(M)$.

**Définition 120.** Soit $X=M+A$ une semi-martingale où $M$ est une martingale locale et $A$ à variation finie. Pour tout processus $H$ localement borné, on pose :

$$H\cdot X = H\cdot M + H\cdot A$$

$$(H\cdot X)_t = \int_0^t H_s dX_s$$

**Proposition 121.** *1)* $(HK)\cdot X = H(K\cdot X)$

*2) Pour tout $T$ temps d'arrêt,* $\left(\mathbb{1}_{[0,T]}H\right)\cdot X = H\cdot\left(X^T\right) = (H\cdot X)^T$

*3) Si $X$ est une martingale locale (resp. à variation finie) alors $H\cdot X$ est une martingale locale (resp. à variation finie).*

*4) Si* $H_s = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}\mathbb{1}_{\{t_k<s\leq t_{k+1}\}}$ *avec $H^{(k)}$ $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable (pas nécessairement borné) alors*

$$(H\cdot X)_t = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k)}\left(X_{t\wedge t_{k+1}} - X_{t\wedge t_k}\right)$$

*Démonstration.* 1),2),3) découlent des propriétés vues précédemment.

4) n'est pas immédiat car on a enlevé l'hypothèse $H^{(k)}$ bornés. on peut supposer $X = M$ martingale locale issue de 0, on peut supposer que $M$ est bornée par localisation.

Soit $T_n = \inf\{t \geq 0,\ |H_t| \geq n\} = \inf\left\{t_k,\ \left|H^{(k)}\right| \geq n\right\}$. Presque sûrement, $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et

$$H_s \mathbb{1}_{[0,T_n]} = \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k,n)} \mathbb{1}_{\{t_k < s \leq t_{k+1}\}}$$

et

$$H^{(k,n)} = H^{(k)} \mathbb{1}_{\{T_n < t_k\}} \leq n$$

donc $H\mathbb{1}_{[0,T_n]}$ est un processus élémentaire. On a

$$\begin{aligned}(H\cdot M)_{t\wedge T_n} &= \left(\left(H\mathbb{1}_{[0,T_n]}\right)\cdot M\right)_t \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} H^{(k,n)} \mathbb{1}_{\{t_k < s \leq t_{k+1}\}}\end{aligned}$$

et on conclut en faisant tendre $n$ vers $+\infty$. □

**Proposition 122.** *Soit $X$ une semi-martingale et $H$ adapté continu. Soit $0 = t_0^{(n)} < \ldots t_n^{(n)} = t$ subdivision dont le pas tend vers 0. On a*

$$\int_0^t H_s dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} H_{t_k^{(n)}} \left(X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}}\right)$$

*au sens de la convergence en probabilité.*

*Démonstration.* $X = M + A$. La partie faisant intervenir $A$ est OK. Soit

$$H_s^{(n)} = \begin{cases} H_{t_k^{(n)}} & \text{si } t_k^{(n)} < s \leq t_{k+1}^{(n)} \\ 0 & \text{si } s = 0 \text{ ou } s \geq t \end{cases}$$

Soit $T_p = \inf\{s \geq 0,\ |H_s| + \langle M, M\rangle_s \geq p\}$. $H$, $H^{(n)}$ et $\langle M, M\rangle$ sont bornés sur $[0, T_p]$. On a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\left(H^{(n)}\cdot M^{T_p}\right)_t - \left(H\cdot M^{T_p}\right)_t\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_p} \left(H_s^{(n)} - H_s\right)^2 d\langle M, M\rangle_s\right]$$

Or, $H_s^{(n)} - H_s \to 0$ presque sûrement donc $\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_p} \left(H_s^{(n)} - H_s\right)^2 d\langle M, M\rangle_s\right] \to 0$ par le théorème de convergence dominée. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(H^{(n)}\cdot\left(M^{T_p}\right)\right)_t = \left(H\cdot M^{T_p}\right)_t$ dans $L^2$.

$$\left(H^{(n)}\cdot M\right)_{t\wedge T_p} \xrightarrow{L^2} (H\cdot M)_{t\wedge T_p}$$

De plus, $\mathbb{P}(T_p > t) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\left(H^{(n)}\cdot M\right)_t \xrightarrow{(\mathbb{P})} (H\cdot M)_t$. □

*Remarque.* Le résultat n'est pas vrai si on remplace $H_{t_k}$ par $H_{t_{k+1}}$. Pour le voir, on peut prendre $H = X$ :

$$\sum X_{t_{k+1}}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) = \sum X_{t_k}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) + \sum\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)^2$$

donc

$$\lim \sum X_{t_{k+1}}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right) \overset{(\mathbb{P})}{=} \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t$$

$$X_t^2 - X_0^2 = 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t$$

(cas particulier de la formule d'Itô).

## 5.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô est un équivalent du théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale stochastique. On peut aussi l'interpréter comme une sorte de formule de Taylor pour le calcul stochastique.

**Théorème 123.** *Formule d'Itô.*

*1) Soit $X$ une semi-martingale et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$. Alors,*

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s$$

*2) Plus généralement, si $X^{(1)},\ldots,X^{(p)}$ sont des semi-martingales et $F:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ est $C^2$, alors*

$$\begin{aligned}F\left(X_t^{(1)},\ldots,X_t^{(p)}\right) &= F\left(X_0^{(1)},\ldots,X_t^{(p)}\right)+\sum_{i=1}^p\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X_s^{(1)},\ldots,X_s^{(p)}\right)dX_s^{(i)}\\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le p}\int_0^t\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(X_s^{(1)},\ldots,X_s^{(p)}\right)d\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle_s\end{aligned}$$

*Remarque.* En particulier, $f(X_t)$ est une semi-martingale et la formule d'Itô donne la décomposition.

*Démonstration.* On traite d'abord 1). Soit $0=t_0^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=t$ une suite de subdivision dont le pas tend vers 0.

$$f(X_t)-f(X_0)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}\right)-f\left(X_{t_k^{(n)}}\right)$$

Par la formule de Taylor-Lagrange,

$$f\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}\right)-f\left(X_{t_k^{(n)}}\right)=f'\left(X_{t_k^{(n)}}\right)\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)+\frac{1}{2}f''_{n,k}\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)^2$$

où $f''_{n,k}=f''(z_{n,k})$ pour un $z_{n,k}$ entre $X_{t_k^{(n)}}$ et $X_{t_{k+1}^{(n)}}$. On a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(X_{t_k^{(n)}}\right)\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)\xrightarrow{(\mathbb{P})}\int_0^t f'(X_s)\,dX_s$$

Il reste à voir :

$$\sum_{k=0}^{n-1}f''_{n,k}\left(X_{t_{k+1}^{(n)}}-X_{t_k^{(n)}}\right)^2\xrightarrow{(\mathbb{P})}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s$$

Définissons pour $m\le n$,

$$I_{m,n}:=\sum_{k=0}^{m-1}f''_{m,k}\sum_{l:t_k^{(m)}\le t_l^{(n)}<t_{k+1}^{(m)}}\left(X_{t_{l+1}^{(n)}}-X_{t_l^{(n)}}\right)^2$$

On a :

$$I_{m,n}\xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})}\int_0^t h_m(s)\,d\langle X,X\rangle_s\xrightarrow[m\to\infty]{(\mathbb{P})}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s$$

où $h_m(s)=f''_{m,k}$ si $t_k^{(m)}\le s<t_{k+1}^{(m)}$. En effet, presque sûrement, on a $h_m(s)\to f''(X_s)$ uniformément sur $[0,t]$ car presque sûrement, $\sup|X_s|<+\infty$. On souhaite justifier que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,:\,n_0\le m\le n\implies\mathbb{P}\left(|I_{m,n}-I_{n,n}|\ge\varepsilon\right)\le\varepsilon \tag{6}$$

Voyons déjà que (6) suffit pour conclure.

Pour tout $m\ge m_1$, $\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_m(s)\,d\langle X,X\rangle_x-\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s\right|\ge\varepsilon\right)\le\varepsilon$ et on a

$$\left|I_{n,n}-\int_0^t f''(X_s)\,dX_s\right|\le|I_{n,n}-I_{m,n}|+\left|I_{m,n}-\int_0^t h_m(s)\,d\langle X,X\rangle_s\right|+\left|\int_0^t h_m(s)\,d\langle X,X\rangle_s-\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s\right|$$

Reste à montrer (6) :

$$\sum_{l=0}^{n-1} f"_{n,k}\left(X_{t_{l+1}^{(n)}}-X_{t_l^{(n)}}\right)^2-\sum_{k=0}^{m-1} f"_{m,k}\sum_{l:t_k^{(m)}\le t_l^{(n)}<t_{k+1}^{(m)}}\left(X_{t_{l+1}^{(n)}}-X_{t_l^{(n)}}\right)^2$$

$$\le \underbrace{\sup_{k<m}\sup_{l:t_k^{(m)}\le t_l^{(n)}<t_{k+1}^{(m)}}\left|f"_{m,k}-f"_{n,k}\right|}_{\xrightarrow{\text{ps}} 0}\cdot\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}\left(X_{t_{l+1}^{(n)}}-X_{t_l^{(n)}}\right)^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})}\langle X,X\rangle_t}$$

2) On procède de même en utilisant une version de Taylor-Lagrange en multidimensionnel. □

*Remarque* 124. Si on sait par exemple que, presque sûrement, $X_t\in U$ pour tout $t$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ fixé, alors il suffit dans la formule d'Itô de supposer que $F$ est $C^2$ sur $U$. Pour le voir, on prend $(K_n)_n$ une suite de compacts croissante telle que $\bigcup_n K_n=U$, on construit $F_n$ qui est $C^2$ sur l'espace complet et qui coïncide avec $F$ sur $K_n$. Par exemple, si $X_t>0$ pour tout $t\ge 0$, alors :

$$\log(X_t)=\log(X_0)+\int_0^t\frac{1}{X_s}dX_s-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{X_s^2}d\langle X,X\rangle_s$$

## 5.3 Quelques applications de la formule d'Itô

**Exemple 125.** $F(x,y)=xy$ on a l'intégration par parties stochastique :

$$\begin{aligned}X_tY_t-X_0Y_0 &= \int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^t d\langle X,Y\rangle_s\\ &= \int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\langle X,Y\rangle_t\end{aligned}$$

Si $X=M$ est une martingale locale,

$$M_t^2-\langle M,M\rangle_t=M_0^2+2\int_0^t M_sdM_s$$

2) $tB_t=\int_0^t B_sds+\int_0^t sdB_s$. $\int_0^t B_sds$ est à variation finie, $\int_0^t sdB_s$ est une martingale.
3) $f(B_t)=f(B_0)+\int_0^t f'(B_s)\,dB_S+\frac{1}{2}\int_0^t f"(B_s)\,ds$
4) Soit $F:\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x\to\mathbb{R}$ est $C^2$,

$$F(t,B_t)=F(0,B_0)+\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s+\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)(s,B_s)\,ds$$

Si $B$ est un brownien multidimensionnel :

$$F(t,B_t)=F(0,B_0)+\sum_{i=1}^d\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_i}(s,B_s)\,dB_s^{(i)}+\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta F\right)(s,B_s)\,ds$$

En particulier, si $F$ est de classe $C^2$ et $\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta F$ vaut 0 sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, alors $F(t,B_t)$ est une martingale locale.

**Proposition 126.** *Martingale exponentielle. Soit M une martingale locale. On pose :*

$$\mathscr{E}(\lambda M)_t=\exp\left(\lambda M_t-\frac{\lambda^2}{2}\langle M,M\rangle_t\right)$$

*où $\lambda\in\mathbb{C}$. Le processus $\mathscr{E}(\lambda M)$ est une martingale locale et de plus,*

$$\mathscr{E}(\lambda M)_t=e^{\lambda M_0}+\lambda\int_0^t\mathscr{E}(\lambda M)_s\,dM_s$$

*Remarque.* Cela signifie "$\mathscr{E}(\lambda M)$ est solution de $dX_t = \lambda X_t dM_t$"

*Démonstration.* Soit $F(x,r)$ de classe $C^2$,

$$F(M_t, \langle M,M\rangle_t) = F(M_0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s, \langle M,M\rangle_s)\, dM_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(M_s, \langle M,M\rangle_s)\, d\langle M,M\rangle_s$$

donc $(F(M_t, \langle M,M\rangle_t))_t$ est une martingale locale dès que $\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$. Cela est bien vérifié pour $F(x,r) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r\right)$ et on a bien la formule annoncée. $\square$

**Théorème 127.** *Caractérisation de Paul Lévy du mouvement Brownien.*
*Soit $X = \left(X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}\right)$ un processus adapté et continu. Il y a équivalence entre :*
*1) $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard.*
*2) $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$ sont des martingales locales issues de 0 et $\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = t\delta_{ij}$.*

*Démonstration.* "1) $\Longrightarrow$ 2)" OK
"2) $\Longrightarrow$ 1)" Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ : $\xi.X_t$ est une martingale locale et

$$\langle \xi.X, X.\xi\rangle_t = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = |\xi|^2 t$$

$\exp\left(i\xi.X_t + \frac{|\xi|^2}{2} t\right)$ est une martingale locale bornée sur $[0,t]$ pour tout $t$ donc c'est une martingale :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi.X_t + \frac{|\xi|^2}{2} t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(i\xi.X_s + \frac{|\xi|^2}{2} s\right)$$

Autrement dit :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi.\left(X_t - X_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)\right)$$

On a que $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, -s)$ et est indépendant de $\mathcal{F}_s$. En effet, soit $A \in \mathcal{F}_s$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi\left(X_t - X_s\right)\right) \mid A\right] = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)\right)$$

Sous $\mathbb{P}(\cdot \mid A)$, $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ donc $\mathbb{E}[f(X_t - X_s) \mid A] = \mathbb{E}[f(X_t - X_s)]$. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{E}[f(X_t - X_s)]$.
On a bien $(X_t - X_s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$ ie c'est un processus continu. $\square$

*Remarque.* Dans la preuve précédente $x.y$ représente le produit scalaire usuel de $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^d$.

**Théorème 128.** *Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.*
*Soit $M$ une martingale locale issue de 0 et soit $M_t^* := \sup_{s\leq t} |M_s|$. Soit $p > 0$. Il existe $c_p$ et $C_p$ indépendantes de $M$ telles que*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M,M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M,M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]$$

*Remarque.* On peut remplacer "$\infty$" par n'importe quel temps d'arrêt $T$.

*Démonstration.* (partielle) On montre d'abord la 1ère inégalité pour $p \geq 2$. on peut supposer $M$ bornée. Sinon, on pose $T_n = \inf\{t \geq 0,\ |M_t| \geq n\}$ appliquer le résultat à $M^{T_n}$ et passer à la limite grâce au théorème de convergence monotone. On applique la formule d'Itô :

$$|M_t|^p = \int p\,|M_s|^{p-1}\, dM_s \mathrm{signe}(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2} p(p-1) \int_0^t |M_s|^{p-2}\, d\langle M,M\rangle_s$$

$M$ est bornée donc $M \in \mathbb{H}$ et $\int_0^{\cdot} p\,|M_s|^{p-1}\,\mathrm{signe}\,(M_s)\,dM_s$ est une martingale. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] &= 0 + \frac{p\,(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\,d\langle M, M\rangle_s\right] \\
&\leq \frac{p\,(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[(M_t^*)^{p-2}\,\langle M, M\rangle_t\right] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p\,(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right]^{1-\frac{p}{2}}\,\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

Par Doob :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right] &\leq C_p\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] \\
&\leq C_p'\mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right]^{1-\frac{p}{2}}\,\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

On a bien le résultat annoncé.

Montrons l'inégalité inverse pour $p \geq 4$. Par la formule d'It^p,

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M, M\rangle_t$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right] &\leq C_p\left(\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t M_s dM_s\right|^{\frac{p}{2}}\right]}_{\sim}\right) \\
&\qquad\qquad \leq C_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t M_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right|^{\frac{p}{4}}\right] \\
&\leq C_p\left(\mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right] + \mathbb{E}\left[|M_t^*|^{\frac{p}{2}}\,\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{4}}\right]\right) \\
&\overset{\text{CS}}{\leq} C_p\left(\mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right] + \mathbb{E}\left[|M_t^*|^p\right]^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Or $x^2 \leq C_p\left(y^2 + xy\right) \implies \exists C,\ x \leq C.y.$ □

**Théorème 129.** *Girsanov. Soit $L$ une martingale locale issue de 0 et*

$$\mathscr{E}(L) = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle\right)$$

*On suppose que $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable ($\implies \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] = 1$). On pose,*

$$d\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_\infty\, d\mathbb{P}$$

*Si $M$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale alors $M - \langle M, L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$- martingale locale.*

*Démonstration.* On note $\mathscr{E} = \mathscr{E}(L)$ et $\mathbb{F}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{Q}$.

Première étape : si $X$ est un processus adapté continu et $T$ un temps d'arrêt tel que $(X\mathscr{E})^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, alors $X^T$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

a.

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left[|X_{t\wedge T}|\right] &= \mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T}|\,\mathscr{E}_\infty\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T}|\,\mathscr{E}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|(X\mathscr{E})_{t\wedge T}|\right] < +\infty
\end{aligned}$$

b. Soit $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$, On a

$$\mathbb{F}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq s\}}X_{t\wedge T}\right] = \mathbb{F}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq s\}}X_{s\wedge T}\right]$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathscr{E}_{\infty}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{t\wedge T}\mathscr{E}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{s\wedge T}\mathscr{E}_{t\wedge T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{s\wedge T}\mathscr{E}_{\infty}\right] \\
&= \mathbb{F}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{s\wedge T}\right]
\end{aligned}$$

En résumé, $\mathbb{F}\left[\mathbb{1}_A X_{t\wedge T}\right] = \mathbb{F}\left[\mathbb{1}_A X_{s\wedge T}\right]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_S$ donc on a bien

$$\mathbb{F}\left[X_{t\wedge T} \mid \mathcal{F}_s\right] = X_{s\wedge T}$$

Etape 2 : Soit $M$ une $\mathbb{P}$-martingale locale et soit $\tilde{M} = M - \langle M, L\rangle$. On veut vérifier que $\tilde{M}\mathscr{E}$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale (cf étape 1). Par la formule d'Itô,

$$\tilde{M}_t\mathscr{E}_t = \tilde{M}_0\mathscr{E}_0 + \int \tilde{M}_s d\mathscr{E}_s + \int_0^t \mathscr{E}_s dM_s - \int_0^t \mathscr{E}_s d\langle M, L\rangle_s + \langle M, \mathscr{E}\rangle_t$$

On veut que $\int_0^t \mathscr{E}_s d\langle M, L\rangle_s - \langle M, \mathscr{E}\rangle_t = 0$ ! On va vérifier que $\langle M, N\rangle = \mathscr{E}^{-1}\cdot\langle M, \mathscr{E}\rangle$.

Etape 3 : $L_t = \int_0^t \mathscr{E}_s^{-1} d\mathscr{E}_s$. En effet, $\mathscr{E}_t > 0$pour tout $t$ et continu donc on peut appliquer la formule d'Itô "généralisée" évoquée dans la remarque 124 :

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathscr{E}_t\right) &= \log\left(\mathscr{E}_0\right) + \int_0^t \frac{d\mathscr{E}_s}{\mathscr{E}_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle\mathscr{E}, \mathscr{E}\rangle_s}{\mathscr{E}_s^2} \\
&= 0 + L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t
\end{aligned}$$

Par égalité des parties "martingales locales", on a bien

$$L_t = \int_0^t \frac{d\mathscr{E}_s}{\mathscr{E}_s}$$

donc $L = \mathscr{E}^{-1}\cdot\mathscr{E}$ et $\langle M, \mathscr{E}^{-1}\cdot\mathscr{E}\rangle = \mathscr{E}^{-1}\cdot\langle M, \mathscr{E}\rangle$. □

*Remarque.* Pour utiliser le théorème, il faut pouvoir vérifier que $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable. $\mathscr{E}(L)$ martingale locale $\geq 0$ donc surmartingale $\geq 0$ sont converge vers $\mathscr{E}(L)_\infty$. Par le lemme de Fatou

$$\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \mathscr{E}(L)_t$$

Si $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] = 1 = \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_t\right]$. Alors, on a $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathscr{E}(L)_t$ et donc $(\mathscr{E}(L)_t)$ est une martingale uniformément intégrable. En résumé, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] = 1$ pour assurer que $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable.

**Proposition 130.** *Soit $L$ une martingale locale issue de 0. Considérons les propriétés :*
*i)* $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] < +\infty$
*ii) $L$ est une martingale uniformément intégrable et* $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] < +\infty$
*iii) $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable.*
*On a 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3)*

*Démonstration.* "1) $\Longrightarrow$ 2)" On a $\mathbb{E}\left[\langle L, L\rangle_\infty\right] < \infty$ donc $L$ est une martingale bornée dans $L^2$ donc uniformément intégrable. $\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) = \mathscr{E}(L)_\infty^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)^{\frac{1}{2}}$ par Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

"2) $\implies$ 3)" On suppose que $L$ est une martingale uniformément intégrable donc pour tout temps d'arrêt, $L_T = \mathbb{E}\left[L_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]$. Par Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right) \quad \leq \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) \mid \mathcal{F}_T\right]$$

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] < +\infty$ donc $\left\{\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right),\ T \text{ temps d'arrêt}\right\}$ est uniformément intégrable. Soit $0 < a < 1$ et $Z_t^{(a)} = \exp\left(\frac{a}{1+a}L_t\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(aL)_t &= \mathscr{E}(L)_t^{a^2} \exp\left(\left(a - a^2\right) L_t\right) \\
&= \mathscr{E}(L)_t^{a^2} \left(Z_t^{(a)}\right)^{1-a^2}
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\mathscr{E}(aL)$ est une martingale uniformément intégrable. il suffit de voir que $\{\mathscr{E}(aL)_T,\ T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable ($\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(aL)_{T_n \wedge t} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathscr{E}(aL)_{T_n \wedge s}$). Soit $A$ un ensemble mesurable. Par Hölder,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathscr{E}(aL)_T\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_T\right]^{a^2} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2}
\end{aligned}$$

Pour justifier $\{\mathscr{E}(aL)_T,\ T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable, il suffit de voir que $\left\{Z_T^{(a)},\ T \text{ temps d'arrêt}\right\}$ est uniformément intégrable. C'est vrai car $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{2}$ et $\left\{\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right),\ T \text{ temps d'arrêt}\right\}$ est uniformément intégrable. Donc on a bien que $\mathscr{E}(aL)$ est une martingale uniformément intégrable. On a :

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(aL)_\infty\right] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right]^{a^2}}_{\underset{a\to 1}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right]} \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}L_\infty\right)\right]^{1-a^2}}_{\underset{a\to 1}{\longrightarrow} 1}
\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] = 1$. ☐

**Corollaire 131.** *Soit $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et telle que $\int \sup_x |b(t,x)|^2\, dt < +\infty$. Soit $B$ un mouvement brownien et $L_t = \int_0^t b(s, B_s)\, dB_s$.*

$$\mathscr{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s, B_s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s, B_s)\, ds\right)$$

*$\left(\mathscr{E}(L)_t\right)_t$ est une martingale uniformément intégrable. Soit $d\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_\infty\, d\mathbb{P}$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\beta_t &= B_t - \langle B, L\rangle_t \\
&= B_t - \int_0^t b(s, B_s)\, ds
\end{aligned}$$

*est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. De plus,*

$$\langle \beta, \beta\rangle_t - \langle B, B\rangle_t \quad = \quad t$$

*donc $\beta$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.*

*Démonstration.* Provient de la Proposition 130 et du Théorème de Girsanov 129. ☐

On peut reformuler ce résultat en disant que sous $\mathbb{Q}$, il existe un brownien $\beta$ tel que le processus $X = B$ ($X$ n'est pas un brownien sous $\mathbb{Q}$) satisfait $X_t = \beta_t + \int_0^t b(s, X_s)\, ds$, soit "$dX_t = d\beta_t + b(t, X_t)\, dt$". On a donc résolu une équation différentielle stochastique.

Si $b$ ne dépend pas de $x$ : $b(t,x) = g(t)$ avec $\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt < \infty$. Posons $h(t) = \int_0^t g(s)\,ds$. $h \in H^1$. Sous $d\mathbb{Q} = \exp\left(\int_0^\infty g(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g^2(s)\,ds\right)d\mathbb{P}$, le processus $\beta_t = B_t - h(t)$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$. Autrement, dit, si $\Phi$ est une fonction mesurable positive sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\left(\Phi\left((B_t)_{t\geq 0}\right)\right) &= \mathbb{F}\left[\Phi(\beta+h)\right] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\phi(B)\right]\exp\left(\int_0^{+\infty} g(s)\,dB_S - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^2(s)\,ds\right) &= \mathbb{E}\left[\Phi(B+h)\right] \end{aligned}$$

Pour $h$ de la forme choisie, on a donc que la loi de $B+h$ est absolument continue par rapport à la loi de $B$ avec une densité explicite. En fait, cette propriété d'absolue continuité implique aussi que $h$ est de la forme donnée (cf. Théorème de Cameron-Martin).

Conséquence : Loi du temps d'atteinte d'une droite par le brownien.

Soit $B$ un brownien, $a > 0$ et $T_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $S_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a - ct\}$. La loi de $T_a$ a pour densité $\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right)\mathbb{1}_{\{s\geq 0\}}$. Soit $\Phi(w)\,\mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{[0,t]} w\geq a\right\}}$ et $h(s) = \int_0^s c\mathbb{1}_{\{u\leq t\}}du =: \int_0^s g(u)\,du$. On a bien $\int_0^{+\infty} g^2(u)\,du < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_a \leq t) &= \mathbb{E}\left[\Phi(B+h)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Phi(B)\exp\left(\int_0^{+\infty} g(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g^2(s)\,ds\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\Bigg[\underbrace{\mathbb{1}_{\{T_a\leq t\}}}_{\mathcal{F}_{T_a}\text{-mesurable}} \quad \underbrace{\exp\left(cB_t - \frac{1}{2}c^2 t\right)}_{\text{martingale}}\Bigg] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(cB_{T_a\wedge t} - \frac{c^2}{2}(T_a\wedge t)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(ac - \frac{c^2}{2}T_a\right)\right] \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2s} + ac - \frac{c^2}{2}s\right)ds \\ &= \int_0^t \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{1}{2s}(a-cs)^2\right)}_{\text{densité de la loi de } S_a} ds \end{aligned}$$

# 6 Equations différentielles stochastiques

On cherche à donner un sens à l'équation différentielle $y' = f(y) + \text{bruit}$ où le "bruit" est induit par une méconnaissance de certains phénomènes microscopiques ou l'absence de données microscopiques qui rend la modélisation "simplifiée" $y' = f(y)$ d'un système physique insatisfaisante.

**Définition 132.** Soient $\sigma, b = \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $B$ un mouvement brownien. On dit que le processus continu adapté $X$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t,X_t)\,dB_t + b(t,X_t)\,dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

si, pour tout $t\geq 0$, $X_t = x + \displaystyle\int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s + \int_0^t b(s,X_s)\,ds$.

On appelle "dérive" de l'EDS la $b(t,X_t)$.

**Exemple 133.** Un processus dont la fluctuations et la dérive est proportionnelle à la taille : soit $\sigma_0, b_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma_0 X_t dB_t + b_0 X_t dt \\ X_0 &= x > 0 \end{cases}$$

Si $\sigma_0 = 0$, $X_t = x.\exp(b_0 t)$.
Si $b_0 = 0$, $X_t = x.\exp\left(\sigma_0 B_t - \frac{\sigma_0^2}{2} t\right)$
On peut espérer que $X_t = x.\exp\left(\sigma_0 B_t + \left(b_0 - \frac{\sigma_0^2}{2} t\right)\right)$. Dans ce cas, la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t \sigma_0 X_s dB_s + \int_0^t \left(b_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right) X_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_0^2 X_s ds \\ &= x + \int_0^t \sigma_0 X_s dB_s + \int_0^t b_0 X_s ds \end{aligned}$$

donc $\left(x.\exp\left(\sigma_0 B_t + \left(b_0 - \frac{\sigma_0^2}{2} t\right)\right)\right)_t$ est bien une solution de l'EDS.
$\left(X_t e^{-b_0 t}\right)_t$ est une vraie martingale donc $\mathbb{E}\left[X_t e^{-t_0 t}\right] = x$ soit $\mathbb{E}\left[X_t\right] = x e^{b_0 t}$.
Si $\sigma_0^2 > b_0$, comme $\frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\overset{\text{ps}}{\longrightarrow}} 0$, on a $X_t \underset{t\to\infty}{\overset{\text{ps}}{\longrightarrow}} 0$.

**Exemple 134.** Processus de Ornstein-Uhlenbeck. On étudie l'EDS

$$\begin{cases} dX_t &= dB_t - X_t dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

On sait que la solution de L'EDO $dY_t = -Y_t dt$ est $Y_t = Y_0 e^{-t}$. On veut faire une sorte de méthode de variation de la constante : on pose $Z_t = e^t X_t$. Alors, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dZ_t &= e^t dX_t + e^t X_t dt \\ &= e^t \left(dB_t - X_t dt\right) + e^t X_t dt \\ &= e^t dB_t \\ Z_t &= x + \int_0^t e^s dB_s \\ X_t &= e^t x + \underbrace{\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)\right)} \end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left[f\left(X_t\right)\right] = \int f\left(e^{-t} x + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)} y\right) \cdot \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. $\left(X_t\right)_t$ est appelé le processus de Ornstein-Uhlenbeck.

**Lemme 135.** *Lemme de Gronwall. Soit $T > 0$ et soit $g$ positive mesurable, bornée sur $[0, T]$ telle qu'il existe $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que pour tout $t \leq T$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds$$

*Alors, pour tout $t \leq T$,*

$$g(t) \leq a.\exp(bt)$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq a + b\int_0^t g(s)\,ds \\
&\leq a + b\int_0^t \left(a + b\int_0^{s_1} g(s_2)\,ds_2\right) ds_1 \\
&\leq a + abt + b^2\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \left(a + b\int_0^{s_2} g(s_3)\,ds_3\right) \\
&\vdots \\
&\leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + \ldots + a\frac{(bt)^n}{n!} + b^n\int_0^t ds_1 \ldots \int_0^{s_n} ds_{n+1} g(s_{n+1}) \\
&\leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + \ldots + a\frac{(bt)^n}{n!} + \|g\|_\infty b^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

On passe à la limite :

$$g(t) \leq a.\exp(bt) + 0$$

□

*Remarque.* 1) $\|g\|_\infty$ n'apparaît pas dans la conclusion.

2) $g(t) \leq \int_0^t g(s)\,ds \implies g = 0$.

3) Par contre, $g(t) \leq \int_0^t g^\alpha(s)\,ds$ pour $\alpha < 1$ n'implique pas $g = 0$. Le lemme est donc, en un certain sens, optimal.

**Théorème 136.** *Soit $B$ un mouvement brownien. Soient $\sigma, b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et lipschitziennes en la seconde variable, i.e. il existe $K$ tel que pour tout $\forall t, x, y$,*

$$|\sigma(t,y) - \sigma(t,x)| \leq K|x-y|$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|$$

*Alors, il existe un et un seul processus continu adapté solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t, X_t)\,dB_t + b(t, X_t)\,dt \\ X_0 &= x \end{cases}.$$

*Démonstration.* Unicité. Soient $X, X'$ deux solutions de l'EDS. Soit $\tau = \min\{\inf\{t \geq 0,\ |X_t| \geq n\}, \inf\{t \geq 0,\ |X'_t| \geq n\}\}$. Alors,

$$X_{t\wedge\tau} = x + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s)\,dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s)\,ds$$

$$X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))\,dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))\,ds$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\overset{\text{Itô}}{\leq} 2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)^2 d\langle B,B\rangle_s\right]+2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)^2 d\langle B,B\rangle_s\right]+2\left(t\wedge\tau\right)\mathbb{E}\left[\frac{1}{t\wedge\tau}\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)ds\right)\right.\\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)^2 d\langle B,B\rangle_s\right]+2t.\mathbb{E}\left[\frac{1}{t\wedge\tau}\left(\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\overset{\text{Jensen}}{\leq} 2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)\right)^2 d\langle B,B\rangle_s\right]+2t.\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,X'_s\right)\right)^2 ds\right]\\
&\overset{\text{Lipschitz}}{\leq} 2K^2.\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left|X_s-X'_s\right|^2 ds\right]+2tK^2.\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left|X_s-X'_s\right|^2 ds\right]\\
&\leq 2K^2.\mathbb{E}\left[\int_0^{t}\left|X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau}\right|^2 ds\right]+2tK^2.\mathbb{E}\left[\int_0^{t}\left|X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau}\right|^2 ds\right]\\
&\leq 2K^2\left(1+t\right)\int_0^t\left|X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau}\right|^2 ds
\end{aligned}
$$

donc $\left|X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\right|^2=0$ pour tout $t$. On fait tendre $n\to+\infty$ et on obtient $X_t=X'_t$ pour tout $t$.

Existence : On utilise la méthode d'itérations de Picard. On construit par récurrence la suite $\left(X^n\right)_n$ : $X_t^0=x$ et $X_t^{n+1}=x+\int_0^t\sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s+\int_0^t b\left(s,X_s^n\right)ds$. Par récurrence on montre que pour tout $n$, $X^n$ est continu est adapté. On construit une solution sur $[0,T]$. Voyons d'abord qu'il existe $C_n$ tel que

$$
\sup_{t\leq T}\mathbb{E}\left[\left(X_t^n\right)^2\right] \leq C_n
$$

Pour $n=0$, c'est clair. Il existe $C$ tel que pour tout $t\leq T$ et pour tout $x$,

$$
\begin{aligned}
\left|\sigma^2\left(t,x\right)\right| &\leq C\left(1+|x|^2\right)\\
\left|b^2\left(t,x\right)\right| &\leq C\left(1+|x|^2\right)
\end{aligned}
$$

car $t\mapsto\sigma\left(t,0\right)$ est continue donc bornée sur $[0,T]$ blabla...

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(X_t^{n+1}\right)^2\right] &\leq 3|x|^2+3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s\right)^2\right]+3\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b\left(s,X_s^n\right)ds\right)^2\right]\\
&\leq 3|x|^2+3\mathbb{E}\left[\int_0^t\sigma^2\left(s,X_s^n\right)ds\right]+3T\mathbb{E}\left[\int_0^t b^2\left(s,X_s^n\right)ds\right]\\
&\leq 3|x|^2+3TC\left(1+C_n\right)+3T^2C\left(1+C_n\right)=:C_{n+1}
\end{aligned}
$$

Donc pour tout $n$, $\displaystyle\int_0^t\sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s$ est une martingale. Posons $g_n\left(t\right)=\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]$. Alors,

$$
X_t^{n+1}-X_t^n = \int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s+\int_0^t\left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds
$$

donc

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}(t) &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\left(\int_0^\delta \left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\left(\int_0^\delta \left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\overset{\text{Doob}}{\leq} 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\left(\int_0^\delta \left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\leq 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\delta\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\leq 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2t\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right)^2\right]\\
&\overset{\text{Jensen}}{\leq} 8\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s,X_s^n\right)-\sigma\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right)^2\right]+2t\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\left(\int_0^\delta \left(b\left(s,X_s^n\right)-b\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)^2ds\right)\right]\\
&\overset{\text{Lipschitz}}{\leq} 8K^2\int_0^t g_n(s)\,ds+2tK^2\mathbb{E}\left[\sup_{\delta\leq t}\int_0^\delta \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right]\\
&\leq 8K^2\int_0^t g_n(s)\,ds+2tK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right]\\
&\overset{\text{Fubini}}{\leq} 8K^2\int_0^t g_n(s)\,ds+2tK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right]\\
&\leq 8K^2\int_0^t g_n(s)\,ds+2tK^2\int_0^t g_n(s)\,ds\\
&\leq 2K^2(4+t)\int_0^t g_n(s)\,ds\\
&\leq C_T\int_0^t g_n(s)\,ds
\end{aligned}
$$

On vérifie que $\sup\limits_{t\leq T} g_1(t)\leq \tilde{C}$. On peut alors montrer par récurrence que $g_n(t)\leq \tilde{C}\frac{(C_T t)^n}{(n-1)!}$. En particulier, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}}<+\infty$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sup\limits_{s\leq T}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|<+\infty$ presque sûrement. Donc, presque sûrement, la suite $\left(X_s^n,\ s\in[0,T]\right)_n$ converge uniformément. Notons $X$ la limite. $X$ est continu et adapté.

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\left|X_s^n-X_s\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
$$

On a

$$
X_t^{n+1} = x+\int_0^t \sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s+\int_0^t b\left(s,X_s^n\right)ds
$$

Or, $\int_0^t \sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \int_0^t \sigma\left(s,X_s\right)dB_s$, $\int_0^t b\left(s,X_s^n\right)dB_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \int_0^t b\left(s,X_s\right)dB_s$. Ainsi, pour tout $t$, on a bien

$$
\begin{cases} dX_t &= \sigma\left(t,X_t\right)dB_t+b\left(t,X_t\right)dt\\ X_0 &= x\end{cases} \quad \text{presque sûrement.}
$$

□

Si $B$ et $B'$ sont deux browniens (éventuellement sur des espaces de probabilité différents) et si $X$ et $X'$ sont solutions des EDS respectives

$$
\begin{cases} dX_t &= \sigma\left(t,X_t\right)dB_t+b\left(t,X_t\right)dt\\ X_0 &= x\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} dX'_t &= \sigma\left(t,X'_t\right)dB'_t+b\left(t,X'_t\right)dt\\ X'_0 &= x\end{cases}
$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, le couple $(X, B)$ a la même loi que le couple $(X', B')$. $X$ est une fonction mesurable de $B$ ! De même $X^n$ et $X'^n$ (construits comme dans la preuve précédente) ont la même loi pour tout $n$. Si on note $(X_t^x)_{t\geq 0}$ la solution partant de $x$, il n'est pas évident que $x \mapsto (X_t^x)_t$ est continue.

**Théorème 137.** *Soient $\sigma, b$ continues, lipschitziennes par rapport à la seconde variable. Alors, il existe $F_x$ : $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ mesurable telle que*

*i) $w \mapsto (F_x(w))_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable*

*ii) Pour tout $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l'application $x \mapsto F_x(w)$ est continue.*

*iii) Si $B$ est un brownien, la solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

*est donnée par $X = F_x(B)$.*

*De plus, si $U$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable alors la solution avec condition initiale $X_0 = U$ est donnée par $X = F_U(B)$.*

**Proposition 138.** *Soient $\sigma, b$ continues, lipschitziennes par rapport à la seconde variable et $(X_t^x)_t$ solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

*Alors, pour tout $T > 0$, pour tout $p \geq 1$, il existe $C$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^x - X_t^y|^p\right] &\leq C|x-y|^p \\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^x|^p\right] &\leq C|x|^p \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit $T_n = \min\left(\inf\{t \geq 0,\ |X_t^x| \geq n\}, \inf\{t \geq 0,\ |X_t^y| \geq n\}\right)$. Soit $p \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\left|X_{s\wedge T_n}^x - X_{s\wedge T_n}^y\right|^p\right] \leq \quad & C_p\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge T_n}(\sigma(u, X_u^x) - \sigma(u, X_u^y))\, dB_u\right|^p\right]\right. \\
& \left. + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge T_n}(b(u, X_u^x) - b(u, X_u^y))\, du\right|^p\right]\right) \\
\overset{\text{BDG}}{\leq} \quad & \tilde{C}_p\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{t\wedge T_n}(\sigma(u, X_u^x) - \sigma(u, X_u^y))^2\, du\right|^{\frac{p}{2}}\right]\right. \\
& \left. + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{s\wedge T_n}(b(u, X_u^x) - b(u, X_u^y))\, du\right|^p\right]\right) \\
\overset{\text{Jensen}}{\leq} \quad & \overline{C_p}\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\int_0^{t\wedge T_n}(\sigma(u, X_u^x) - \sigma(u, X_u^y))^2\, du\right|^{\frac{p}{2}}\right]\right. \\
& \left. + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n}|(b(u, X_u^x) - b(u, X_u^y))|^p\, du\right]\right) \\
\leq \quad & \hat{C}_p\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n}|X_u^x - X_u^y|^p\, du\right]\right) \\
\leq \quad & \hat{C}_p\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\int_0^{t}\left|X_{u\wedge T_n}^x - X_{u\wedge T_n}^y\right|^p du\right]\right) \\
\overset{\text{Fubini}}{\leq} \quad & \hat{C}_p\left(|x-y|^p + \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_{u\wedge T_n}^x - X_{u\wedge T_n}^y\right|^p du\right]\right) \\
\leq \quad & \hat{C}_p\left(|x-y|^p + \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\left|X_{s\wedge T_n}^x - X_{s\wedge T_n}^y\right|^p\right] du\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme de Gronwall, il existe $C(T,p,K)$telle que $\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\left|X^x_{s\wedge T_n}-X^y_{s\wedge T_n}\right|^p\right]\leq C|x-y|^p$. On obtient le résultat annoncé en passant à la limite $n\to\infty$. Pour montrer $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X^x_t|^p\right]\leq C|x|^p$, on procède de la même manière. □

Attention ! Le dernier résultat n'est pas une conséquence du premier avec $y=0$ !

**Définition 139.** On dit que $\tilde{X}$ est une modification de $X$ si pour tout $t$, $\mathbb{P}\left(X_t=\tilde{X}_t\right)=1$.

**Définition 140.** On dit qu'une fonction est $\alpha$-Hölder si et seulement si il existe $C$ telle que pour tout $x,y$ , $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^{\alpha}$.

**Théorème 141.** *Critère de continuité de Kolmogorov. Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle borné et $X=(X_t)_{t\in I}$ une famille de de variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique $(E,d)$ complet. S'il existe $q$, $\varepsilon$, $C>0$ telles que, pour tout $s,t\in I$, $\mathbb{E}\left[d(X_s,X_t)^q\right]\leq C|t-s|^{1+\varepsilon}$, alors il existe une modification $\tilde{X}$ de $X$ telle que $\tilde{X}$ est presque sûrement $\alpha$-Hölder pour tout $\alpha<\frac{\varepsilon}{q}$. En particulier, $\tilde{X}$ est continu.*

*Démonstration.* Mettons que $I=[0,1]$ pour simplifier la notation et $D=\{\text{dyadiques}\}$.

$$\mathbb{P}\left(d(X_s,X_t)\geq a\right)\overset{\text{Tchebytchev}}{\leq}\frac{C}{a^q}|t-s|^{1+\varepsilon}$$

Si on prend $\alpha<\frac{\varepsilon}{q}$,

$$\mathbb{P}\left(d\left(X_{\frac{i}{2^n}},X_{\frac{i+1}{2^n}}\right)\geq 2^{-n\alpha}\right)\quad\leq\quad C2^{n\alpha q}2^{-n(1+\varepsilon)}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{2^n-1}\left\{d\left(X_{\frac{i}{2^n}},X_{\frac{i+1}{2^n}}\right)\geq 2^{-n\alpha}\right\}\right)\quad\leq\quad C^{-n(\varepsilon-\alpha q)}$$

On a bien $\varepsilon-\alpha q>0$. Par le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, il existe $n_0$ tel que pour tout $n\geq n_0$, on a $d\left(X_{\frac{i}{2^n}},X_{\frac{i+1}{2^n}}\right)\leq 2^{-n\alpha}$ pour tout $i<2^n$. Si on pose $K:=\sup_n\sup_{i<2^n}\frac{d\left(X_{\frac{i}{2^n}},X_{\frac{i+1}{2^n}}\right)}{2^{-n\alpha}}$. On a $K<+\infty$ presque sûrement et pour tout $n$, pour tout $i<2^n$, $d\left(X_{\frac{i}{2^n}},X_{\frac{i+1}{2^n}}\right)\leq K2^{-n\alpha}$. Par le lemme 142, on a pour tout $s,t\in D$,

$$d(X_s,X_t)\quad\leq\quad\tilde{K}|t-s|^{\alpha}$$

avec $\tilde{K}<+\infty$ presque sûrement. En particulier, $X$ est uniformément continu sur $d$. $E$ est complet donc on peut étendre $X$ par continuité de manière unique. On pose $\tilde{X}$ cette extension. Alors,

$\tilde{X}$ est $\alpha$-Hölder

$\tilde{X}$ est une modification de $X$. En effet, pour tout $t\in D$, $\tilde{X}_t=X_t$ et on a $\mathbb{E}\left[d(X_s,X_t)^q\right]\underset{s\to t,\,s\in D}{\longrightarrow}0$. $\tilde{X}_s=X_s\underset{s\to t,\,s\in D}{\overset{(\mathbb{P})}{\longrightarrow}}X_t$ et $\tilde{X}_s$ est continu donc $\tilde{X}_s\underset{s\to t,\,s\in D}{\overset{\text{ps}}{\longrightarrow}}\tilde{X}_t$ donc $X_t=\tilde{X}_t$ presque sûrement. □

**Lemme 142.** *Si $f$ est telle que pour tout $n$ et pour tout $i<2^n$,*

$$d\left(f\left(\frac{i}{2^n}\right),f\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\right)\leq K2^{-n\alpha}$$

*Alors, pour tout $s,t\in D=\{\text{dyadiques}\}$, $d(f(s),f(t))\leq CK|t-s|^{\alpha}$.*

*Remarque.* On a montré

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|X^x_s-X^y_s|^p\right]\quad\leq\quad C|x-y|^p$$

On veut utiliser le critère de continuité de Kolomogorov. On munit $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact :

$$d(w,w') = \sum \alpha_k \left(\sup_{s\le k} |w(s) - w'(s)| \wedge 1\right)$$

avec $\alpha_k > 0$ et $\sum \alpha_k < +\infty$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[d(X^x,X^y)^p\right] &\overset{\text{Jensen}}{\le} \left(\sum \alpha_k\right)^{p-1} \sum \alpha_k \mathbb{E}\left[\sup_{s\le k} |X_s^x - X_s^y|^p\right] \\ &\le C|x-y|^p\end{aligned}$$

pourvu qu'on choisisse $\alpha_k \searrow 0$ assez vite. Le théorème d'extension de Kolmogorov assure qu'il existe $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_t^x\right)_{x\in\mathbb{R},t\ge 0}$ modification de $X$ pour tout $x$ et tel que $x \mapsto \tilde{X}^x$ est $\alpha$-Hölder pour tout $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$.

**Théorème 143.** *Supposons $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ et $b(t,x) = b(x)$ lipschitziennes et $(X_t^x)_t$ solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t,X_t)\,dB_t + b(t,X_t)\,dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

*Alors, $(X_t^x)_t$ est un processus de Markov dont le semi-groupe d'évolution est donné par $P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right]$.*

*Démonstration.* Soit $f$ mesurable bornée sur $\mathbb{R}^d$. On veut voir que $\mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s\right] = Pf(X_s)$.

$$X_{t+s} = X_s + \int_s^{t+s} \sigma(X_u)\,dB_u + \int_s^{t+s} b(X_u)\,du$$

On pose $X'_u = X_{s+u}$, $\mathcal{F}'_u = \mathcal{F}_{s+u}$ et $B'_u = B_{s+u} - B_s$ (mouvement brownien). $X'$ et $B'$ sont $(\mathcal{F}'_u)_{u\ge 0}$-adaptés et

$$X'_t = X_s + \int_0^t \sigma(X'_u)\,dB'_u + \int_0^t b(X'_u)\,du$$

$X'$ est donc solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX'_t &= \sigma(X'_t)\,dB'_t + b(X'_t)\,dt \\ X'_0 &= X_s \ (\mathcal{F}_0\text{-mesurable}) \end{cases}$$

Donc $X' = F_{X_s}(B')$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f\left(F_{X_s}(B')_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \int f\left(F_{X_s}(w)_t\right) d\text{Wiener}(w) \\ &= P_t f(X_s)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}P_{t+s} f(x) &= \mathbb{E}\left[f\left(X_{t+s}^x\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f\left(X_{t+s}^x\right)\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[P_t f(X_s^x)\right] = P_s P_t f(x)\end{aligned}$$

□

**Théorème 144.** *Sous le mêmes conditions, le processus est de Feller. De plus, son générateur infinitésimal $\mathscr{L}$ satisfait : $C_c^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et pour $f \in C_c^2(\mathbb{R})$,*

$$\mathscr{L} f(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) f''(x) + b(x) f'(x)$$

*Démonstration.* On suppose $\sigma, b$ bornés pour simplifier. Si $f \in C_0(\mathbb{R})$, on doit voir $P_t f \in C_0(\mathbb{R})$. La continuité est OK car $x \mapsto F_x(w)$ est continue. Il faut aussi voir que $|P_t f(x)| \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x)\, dB_s + \int_0^t b(X_s^x)\, ds$$

$$\mathbb{E}\left[(X_t^x - x)^2\right] \leq C\left(t + t^2\right)$$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(X_t^2\right)\right]$$

On combine cette estimée avec $f \underset{\infty}{\to} 0$ et c'est bon.

A-t-on $P_t f(x) \underset{t \to}{\longrightarrow} f(x)$ ? Oui car $X^x$ continu en $t = 0$. $X$ est don un processus de Feller.

Reste à identifier le générateur : Par la formule d'Itô, pour $f \in C_c^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f(X_t^x) &= f(X_0^x) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f\text{"}(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(x) + \int_0^t f'(X_s)\, \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sigma^2 f\text{"} + f'b\right)(X_s)\, ds \end{aligned}$$

Rappel : si $f(X_t) - \int_0^t g(X_s)\, ds$ est une martingale avec $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et $\mathscr{L} f = g$. $\square$

Conséquences :

Propriété de Markov forte

Pour $u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$ on a vu que $\partial_t u = \mathscr{L} u$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$.

Pour finir, un exemple où on a unicité en loi de la solution d'une EDS mais pas unicité presque sûrement :

**Exemple 145.** Soit $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $W$ un brownien. Alors $B_t = \displaystyle\int_0^t \sigma(W_s)\, dW_s$ définit un mouvement brownien car $\langle B, B\rangle_t = t$. Alors $W_t = \int_0^t \sigma(W_s)\, dB_s$ et $-W_t = \int_0^t \sigma(-W_s)\, dB_s$.

# Références


[1] Durrett. Probability theory and examples.

[2] Revuz, Yor. Continuous martingales and brownian motions.

[3] Kanatsaz, Shieve. Brownian motions and stochastic calculus.

[4] Le Gall. Mouvements browniens, martingales et calcul stochastiques.