UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Jean-Claude SIKORAV

Sujet de la Thèse : Points fixes de difféomorphismes symplectiques, intersections de sous-variétés lagrangiennes, et singularités de un-formes fermées

Soutenue le 3 février 1987 *devant le Jury composé de :*

Jean CERF, Président

Daniel BENNEQUIN
Etienne FOUVRY
Mikhael GROMOV
François LAUDENBACH
Alexis MARIN

TABLE DES MATIERES

[F] M. C. FARBER, *Exactitude des inégalités de Novikov* [*Funct. Anal. i ego Pril.*, vol. 19, 1985, p. 49-59 (en russe)]; [*Funct. Anal. and its Appl.*, vol. 19, p. 40-49 (en anglais)].

[LS] F. LAUDENBACH et J.-C SIKORAV, *Persistance d'intersection avec la section nulle...* (*Invent. Math.*, vol. 82, 1985, p. 349-357).

[M] J. MILNOR, *Infinite cyclic coverings*, *in Conf. on the Topology of manifolds* (éditée par J. C. Hocking), Prindle, Weber & Schmidt, 1968, p. 115-133.

[N] S. P. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory* (*Soviet. Math. Dokl.*, vol. 24, n° 2, 1981, p. 222-226).

[S] E. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York, 1966.

[T] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1, (Topology 9, 1970, p. 153-154).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1985,
révisé le 3 juin 1986.)

J.-C. SIKORAV
U.A. n° 1169 du C.N.R.S.,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques, bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex.

HOMOLOGIE DE NOVIKOV ASSOCIEE A UNE CLASSE DE COHOMOLOGIE REELLE DE DEGRE UN

INTRODUCTION

On se donne une variété différentiable fermée M et une classe de cohomologie ξ non nulle dans $H^1(M;\mathbb{R})$, que l'on identifie à un morphisme de $\pi_1(M)$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à quelles conditions ξ peut être représentée par une 1-forme fermée non singulière, ou en abrégé est non singulière.

D'après D.Tischler [Ti], si ω est une 1-forme fermée non singulière, on peut l'approcher par une forme voisine ω' qui est encore fermée non singulière et dont la classe $[\omega']$ est rationnelle, c'est-à-dire que le groupe des périodes $im[\omega']$ est de rang un ; alors $\omega'=\lambda p^*d\theta$, où p est une fibration de M sur le cercle S^1. Dans ce cas, le problème est donc de savoir si une application de M dans S^1 est homotope à une fibration.

Le problème est trivial en dimension ≤ 2 ; par ailleurs, les deux cas suivants ont été étudiés à fond.

1) Si M est de dimension trois et irréductible (condition nécessaire pour qu'elle puisse fibrer sur le cercle, sauf les cas exceptionnels où la fibre est S^2 ou $\mathbb{P}^2$), [Stallings] prouve qu'une classe ξ rationnelle est non singulière si et seulement si $\ker\xi$ est de type fini ; [Thurston] prouve que l'ensemble des classes non singulières dans $H^1(M;\mathbb{R})$ est décrit par un nombre fini d'inéquations linéaires à coefficients entiers (par rapport au réseau $H_1(M;\mathbb{Z})$/Torsion de l'espace dual) ; on dira qu'il a une structure polyédrale rationnelle (voir aussi l'exposé de D. Fried dans [Fathi-Laudenbach-Poénaru], p.251-266).

2) Si M est de dimension ≥ 6 et ξ est rationnelle, les travaux de [Browder-Levine], [Farrell] et [Siebenmann] donnent les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour que ξ soit non singulière :

a) le revêtement infini cyclique $\hat{M}_\xi$ associé a le type d'homotopie d'un complexe fini ; de façon équivalente, $H_*(\hat{M}_\xi;\mathbb{Z})$ est de type fini, ker ξ est de présentation finie et une certaine obstruction secondaire $\tau_0(\xi)$ dans $K_0\mathbb{Z}(\pi_1 M)$ est nulle ;
b) une certaine obstruction secondaire $\tau_1(\xi)$ dans $Wh_1(\pi_1 M)$ est nulle.

La condition a) est nécessaire en toutes dimensions. En revanche, pour les classes irrationnelles en dimension ≥ 4, on ne connaît pas de condition autre que le fait que toute classe rationnelle assez proche doit être non singulière (en dimension trois, la description de Thurston implique qu'alors ξ est non singulière, mais ceci pourrait bien ne plus être vrai en grande dimension, voir 2.7). D'autre part, la condition de finitude a) n'est pas commode à vérifier, surtout quand on fait varier ξ.

Dans ce travail, nous allons utiliser l'approche plus récente de [Novikov], continuée par [Farber], qui permet de traiter directement le cas irrationnel. Nous verrons aussi que cette méthode a un rapport avec des travaux de [Levitt] d'une part, et de [Bieri-Neumann-Strebel] d'autre part. Signalons aussi les travaux de [Geogeghan-Mihalik] et de [Dwyer-Fried].

Novikov associe à ξ des groupes d'homologie de la façon suivante : soit ω une forme représentant ξ ; sur le revêtement d'intégration $\hat{M}_\xi$ caractérisé par $\pi_1\hat{M}_\xi = \ker \xi$, elle se relève en une forme exacte $d\hat{f}$. On définit le complexe des chaînes singulières "modulo le bout négatif" (ce n'est un vrai bout que si ξ est rationnelle) :

$$C_*(\hat{M}_\xi,\infty^-) = \lim{}^0\, C_*(\hat{M}_\xi, \hat{f} \leq c), \quad c \to -\infty,$$

où l'on note $(\hat{f} \leq c) = \hat{f}^{-1}(]-\infty,c])$. On en déduit des groupes d'homologie

$H_*(\hat{M}_\xi,\infty^-)$. Ceux-ci ne dépendent que de ξ, et leur nullité est une condition nécessaire pour que ξ soit non singulière ; si $\dim M \geq 6$ et $\pi_1 M = \mathbb{Z}$ (donc ξ est rationnelle), Farber (op.cit.) montre que la réciproque est vraie.

Nous allons procéder de même avec le revêtement universel $\tilde{M}$, et définir ainsi des ***groupes d'homologie de Novikov associés à*** ξ, que nous noterons $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$. Là encore, leur nullité est une condition nécessaire pour que ξ soit non singulière. Plus généralement, on a :

Propriété 1 (1.3). <u>Si ξ est représentée par une forme de Morse sans singularité d'indice</u> $\leq k$, <u>alors</u> $H_i(\tilde{M},\infty_\xi^-) = 0$ <u>pour</u> $i \leq k$.

En particulier, comme ξ est non nulle, on peut la représenter par une forme de Morse sans singularité d'indice zéro (cf. [Levitt], théorème III.1), donc on a toujours $H_0(\tilde{M},\infty_\xi^-) = 0$ (on donnera en 4.5, remarque 1, une autre démonstration de ce résultat homologique).

Questions. 1) Si $\dim M \geq 6$ et $k < (1/2).\dim M$, la réciproque de la propriété 1 est-elle vraie ?
2) La nullité de $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ implique-t-elle celle de $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^+)$ $(= H_*(\tilde{M},\infty_{-\xi}^-))$?
3) Si $\dim M \geq 6$ et $K_0\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ et $Wh_1(\pi_1 M)$ sont nuls, la nullité de $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ et de $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^+)$ suffit-elle pour que ξ soit non singulière ?

<u>Ensuite, on introduit les anneaux</u>

$\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1 M] = \{$ sommes finies $\Sigma\, n_g\, g$, $g \in \pi_1 M$, $n_g \in \mathbb{Z}\}$,
$\Lambda_\xi^- = \{$ séries formelles $\Sigma\, n_g\, g$ telles que, pour tout c, le nombre des g vérifiant $n_g \neq 0$ et $\xi(g) > c$ est fini $\}$.

Alors $H_*(\tilde{M};\mathbb{Z})$ est naturellement un Λ-module à gauche et de même $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ est un Λ_ξ^--module.

Propriété 2 (1.4). Soit C_* un Λ-complexe libre dont l'homologie est isomorphe à $H_*(\tilde{M};\mathbb{Z})$. On considère le Λ_ξ^--complexe $\Lambda_\xi^- \otimes_\Lambda C_*$ obtenu par extension des scalaires ; alors son homologie ne dépend que de $H_*(\tilde{M};\mathbb{Z})$ et de ξ et elle est isomorphe à $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$.

Remarques. 1) On a un énoncé analogue pour $H_*(\hat{M}_\xi,\infty^-)$, l'anneau Λ_ξ^- étant remplacé par un quotient convenable A_ξ^- : on peut en déduire facilement que la nullité de $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ est une condition strictement plus forte que celle de $H_*(\hat{M}_\xi,\infty^-)$.

2) [Novikov] affirme que si ω est une forme de Morse représentant ξ, ses singularités engendrent librement sur A_ξ^- un complexe dont l'homologie est $H_*(\hat{M}_\xi,\infty^-)$; un tel énoncé (que je ne sais pas prouver) reste sûrement valable pour $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ si l'on remplace A_ξ^- par Λ_ξ^-.

Dans le reste du travail, on s'intéresse au module $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$; en particulier, on cherche à quelles conditions il est nul. Pour cela, on représente ξ par une forme de Morse sans singularité d'indice zéro ; ceci a pour conséquence que, dans le revêtement d'intégration, les parties $(\hat{f}\le c)$ sont connexes (cf. 0.3). S'inspirant de [Levitt], on obtient :

Théorème 3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

A1) $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ est nul ;

A2) pour tout c, le morphisme $\pi_1(\hat{f}\le c) \to \pi_1(\hat{M}_\xi)$ est surjectif ;

A3) pour tout c, la partie $(\tilde{f}\le c)$ dans le revêtement universel est connexe ;

A4) le système projectif $(\pi_1(\hat{f}\le c),\ c\to-\infty)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler (ML) (cf.[Switzer], p. 131-132) : pour tout c_0, il existe $c_1 \le c_0$ tel que, pour tout $c \le c_1$, l'image de $\pi_1(\hat{f}\le c)$ dans $\pi_1(\hat{f}\le c_0)$ est la même que celle de $\pi_1(\hat{f}\le c_1)$.

Les propriétés A2 et A3 apparaissent chez [Levitt] ; on déduit du théorème 3 que la classe ξ est ***complète*** au sens de celui-ci (voir la définition en 2.2) si et seulement si $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ et $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^+)$ sont nuls. Par la méthode de Levitt, on obtient une propriété équivalente à celles du théorème 3 et portant sur les singularités d'indice 1 de ω (voir 2.2.b)). Nous espérons pouvoir utiliser cette caractérisation dans un travail ultérieur pour montrer qu'en dimension ≥ 5 la nullité de $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ permet d'éliminer ces singularités d'indice 1 .

D'autre part, la propriété A2 apparaît dans [Bieri-Neumann-Strebel], d'où l'on déduit une propriété équivalente portant seulement sur $\pi_1 M$ et le morphisme ξ (voir 2.5). On en déduit :

Corollaire 4 (2.4). Si $\ker\xi$ est de type fini, alors $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ et $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^+)$ sont nuls. La réciproque est vraie si ξ est rationnelle.

Si M est de dimension trois et irréductible, [Bieri-Neumann-Strebel] utilise les résultats de Stallings et de Thurston pour prouver que ξ est non singulière si et seulement A2 est vérifiée. De façon analogue mais plus simple, [Levitt] prouve (ξ non singulière $\Leftrightarrow$ ξ complète). La caractérisation homologique qui s'en déduit permet, en utilisant [Sikorav], de prouver un résultat de géométrie symplectique :

Théorème 5. On suppose que M est de dimension 3 et irréductible, et que la section nulle $M \subset T^*M$ peut être disjointe d'elle-même par isotopie symplectique. Alors M fibre sur le cercle.

Enfin, utilisant la propriété 2, on montre que $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ ne dépend que de $\pi_1 M$ et du morphisme ξ, et l'on en donne la description suivante : étant donnée une présentation $\langle g_1,\dots,g_p \mid r_1,\dots,r_q\rangle$ de $\pi_1 M$, on lui associe la suite exacte de Lyndon ([Lyndon], p. 656) :

$$\Lambda^q \xrightarrow{d_2} \Lambda^p \xrightarrow{d_1} \Lambda ,$$

où d_1 et d_2 sont les applications Λ -linéaires à gauche données par

(1) $d_1(e_i) = g_i - 1$, $1 \leq i \leq p$;

(2) d_2 est la multiplication à droite par la matrice $D = [\partial r_i / \partial g_j]$ (notation du calcul différentiel libre de [Fox]).

Proposition 6. <u>On suppose</u> $\xi(g_k) \neq 0$ <u>et l'on note</u> A <u>la matrice obtenue en supprimant la</u> k <u>-ième colonne de</u> D . <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^{-})$ <u>est nul</u> ;

b) A <u>définit une application surjective de</u> $(\Lambda_{\xi}^{-})^q$ <u>dans</u> $(\Lambda_{\xi}^{-})^{p-1}$;

c) <u>il existe une matrice</u> $\bar{X}$ <u>à coefficients dans</u> Λ_{ξ}^{-} <u>telle que</u> $\bar{X}.A = id_{p-1}$;

d) <u>il existe une matrice</u> X <u>à coefficients dans</u> Λ <u>telle que</u> $X.A = id_{p-1} + B$, <u>où</u> B <u>est</u> ξ<u>-négative, c'est-à-dire que chaque élément est une somme</u> $\Sigma\, n_g . g$, $\xi(g) < 0$.

En combinant ce résultat avec le corollaire 4, on obtient des propriétés caractérisant, pour un groupe G de présentation finie, les morphismes de G dans $\mathbb{Z}$ dont le noyau est de type fini (voir 4.6).

<u>Le plan de ce travail est le suivant</u> :

0) Suivant [Levitt], on donne quelques définitions et propriétés générales sur les 1-formes fermées et en particulier les formes de Morse.
1) On définit $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^{-})$ et l'on prouve les propriétés 1 et 2.
2) On prouve le théorème 3 ; on en déduit le corollaire 4, puis une caractérisation homologique des classes non singulières en dimension 3.
3) S'appuyant sur cette caractérisation, on prouve le théorème 5.
4) On prouve la proposition 6 et sa conséquence en théorie des groupes.

0. PRELIMINAIRES.

On se donne M et ξ comme dans l'Introduction. Si ω est une forme représentant ξ , son intégration le long des lacets définit le morphisme de $\pi_1 M$ dans $\mathbb{R}$ identifié à ξ. Son image est le <u>groupe des périodes</u>, noté $P(\xi)$ ou $P(\omega)$. La classe (ou la forme) est <u>rationnelle</u> s'il est de rang 1 , <u>irrationnelle</u> sinon.

Par ailleurs, on note $\mathrm{Sing}\,\omega$ l'ensemble des singularités (= zéros) de ω ; alors $\omega | M - \mathrm{Sing}\,\omega$ définit un feuilletage de codimension un.

0.1. <u>Le revêtement d'intégration</u> $\hat{p}_{\xi} : \hat{M}_{\xi} \to M$ (ou $\hat{p}$, $\hat{M}$ s'il n'y a pas de confusion possible) est celui tel que $\pi_1 \hat{M}_{\xi} = \ker \xi$. Si ω représente ξ , c'est le plus petit revêtement tel que tout lacet γ dans M vérifiant $\int_{\gamma} \omega = 0$ se relève en un lacet dans $\hat{M}$. Donc $p^*\omega$ est exacte, et l'on note $\hat{f}$ une primitive globale (unique à constante additive près).
Ce revêtement est galoisien, de groupe $\mathrm{Aut}(\hat{M}|M) = \pi_1 M / \ker \xi \approx P(\xi)$, et l'on a $\hat{f} \circ \bar{g} - \hat{f} = \xi(g)$ pour tout $\bar{g} \in \pi_1 M$, $\bar{g}$ désignant son image dans $\mathrm{Aut}(\hat{M}|M)$. Si ξ est rationnelle, $\hat{M}$ est le revêtement infini cyclique associé à l'application induite par $\hat{f}$ de M dans $\mathbb{R}/P(\xi) \approx S^1$.

Sur le revêtement universel $\tilde{p} : \tilde{M} \to M$, on notera $\tilde{f}$ la primitive de $\tilde{p}^*\omega$ correspondant à $\hat{f}$: on a de même $\tilde{f} \circ g - \tilde{f} = \xi(g)$.

Si c , $c' \in \mathbb{R}$, on notera $(c \leq \hat{f} \leq c') = \hat{f}^{-1}([c, c'])$, et de même $(\hat{f} \leq c) = \hat{f}^{-1}(]-\infty, c])$, ainsi que pour $\tilde{f}$.

Soit ω' une autre forme représentant ξ , avec $\hat{p}^*\omega' = d\hat{f}'$. Alors, $\hat{f}' - \hat{f}$ est invariante par les transformations du revêtement, donc bornée ; il en est de même pour $\tilde{f}' - \tilde{f}$.

0.2. Une <u>forme de Morse</u> est une 1-forme fermée ω telle qu'au voisinage de toute singularité, on ait $\omega = df$, où f a un point critique non dégénéré. Les singularités sont alors en nombre fini et ont un indice compris entre zéro et $n = \dim M$; une singularité d'indice zéro ou n

(extremum local de f) est un centre. Comme pour les fonctions, on montre que, dans toute classe de cohomologie ξ, les formes de Morse constituent un ouvert dense.

On appelle champ de ***quasi-gradient*** pour ω un champ de vecteurs X sur M tel que

a) $\omega(X) > 0$ sur $M - \mathrm{Sing}\,\omega$;

b) près d'une singularité où $\omega = df$, on a $\omega = \mathrm{grad} f$ pour une certaine métrique.

Un tel champ existe toujours, et permet d'associer à chaque singularité d'indice i une variété stable et une variété instable, qui sont les images de $\mathbb{R}^i$ et de $\mathbb{R}^{n-i}$ par des immersions injectives.

Si $\xi = 0$, c'est-à-dire si ω est exacte, elle a nécessairement au moins un point d'indice zéro et un d'indice n. En revanche, on a :

Propriété (cf. [Levitt], théorème III.1). Si $\xi \neq 0$, on peut la representer par une forme de Morse sans centre.

0.3. Propriété (cf. [Levitt]). Si ω est une forme de Morse sans singularité d'indice zéro, alors dans le revêtement d'intégration toute partie $(\hat{f} \leq c)$ est connexe.

Remarque. Cette propriété reste valable pour tout revêtement abélien de M (au-dessus de $\hat{M}$), en particulier le revêtement abélien maximal considéré en 2.5. En revanche, elle est fausse en général pour le revêtement universel : voir le théorème 3.

1. DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES.

1.1. Soient M, ξ, ω et $\tilde{f}$ comme dans le §0, avec $\xi \neq 0$. Avec des complexes de chaînes singulières, on définit la limite projective

$$C_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-) = \lim{}^0\, C_*(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c), \quad c \to -\infty .$$

Si l'on remplace ω, $\tilde{f}$ par ω', $\tilde{f}'$, le fait que $\tilde{f}' - \tilde{f}$ est borné implique qu'on obtient un complexe canoniquement isomorphe, ce qui justifie la notation. Un élément de ce complexe peut se voir comme une chaîne localement finie $\sum n_i \sigma_i$ telle que, pour tout c, il n'y ait qu'un nombre fini de simplexes σ_i dont le support n'est pas contenu dans $(\tilde{f} \leq c)$: c'est donc naturellement un Λ_ξ^--complexe. ***L'homologie de Novikov*** $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ est par définition l'homologie de ce complexe.

Un résultat général sur l'homologie d'une limite projective de complexes où les applications sont surjectives (cf. [Massey] p.407) donne :

Propriété. On a pour tout k une suite exacte :

$$(1.2) \qquad \lim{}^1 H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) \rightarrowtail H_k(\tilde{M}, \infty_\xi^-) \twoheadrightarrow \lim{}^0 H_k(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) .$$

1.3. Démonstration de la propriété 1.

Supposons $\tilde{f}$ de Morse et sans point critique d'indice $\leq k$.

a) On a d'abord $\pi_i(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) = 0$ pour $i \leq k$. Ceci se démontre

-soit en notant qu'homotopiquement $\tilde{M}$ s'obtient à partir de $(\tilde{f} \leq c)$ en ajoutant des cellules (en nombre peut-être infini), de dimension $> k$;

-soit en notant que génériquement un objet de dimension $\leq k$ évite toutes les variétés instables donc peut être poussé vers le bas par le flot de $\hat{\tilde{X}}$.

b) On a donc a fortiori $H_i(\tilde{M}, \tilde{f} \leq k) = 0$ pour $i \leq k$, et (1.1) entraîne $H_i(\tilde{M}, \infty_\xi^-) = 0$ pour $i < k$. Enfin, $H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c)$ est engendré par les points critiques d'indice $k+1$: donc, si $c < c'$, $(H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) \to (H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c'))$ est surjectif, d'où la nullité du terme $\lim^1$ dans (1.2). $\square$

1.4. Démonstration de la propriété 2.

Définissons d'abord un second complexe sur Λ_ξ^- donnant la même homologie : pour cela, on fixe une stucture cellulaire sur M, donc une structure π_1M-équivariante sur $\tilde M$. Le complexe de chaînes cellulaires $C_*^c(\tilde M)$ est alors un Λ-complexe libre de type fini sur les cellules de M.

Notant $K(c)$ la réunion des cellules contenues dans $(\tilde f \le c)$, on définit le complexe de chaînes cellulaires

$$C_*^c(\tilde M, \infty_\xi^-) = \lim{}^0 C_*^c(\tilde M, K(c)), \quad c \to -\infty .$$

Là encore, un élément de ce complexe s'interprète comme une chaîne localement finie, donc on obtient un Λ_ξ^--complexe. La preuve que les deux complexes ont la même homologie est laissée en exercice : c'est une conséquence facile du fait que l'homologie cellulaire de $(\tilde M, K(c))$ est égale à l'homologie singulière.

L'intérêt d'utiliser des chaînes cellulaires est que l'on a un isomorphisme naturel

$$C_*^c(\tilde M, \infty_\xi^-) \approx \Lambda_\xi^- \otimes_\Lambda C_*^c(\tilde M) .$$

La propriété 2 est alors un cas particulier du théorème général des coefficients universels, cf. par exemple [Godement], p. 117 ; de la même référence on déduit l'existence d'une suite spectrale convergeant vers $H_{p+q}(\tilde M, \infty_\xi^-)$ et telle que

$$E^2_{pq} = \mathrm{Tor}^\Lambda{}_p(\Lambda_\xi^-, H_q(\tilde M; \mathbb{Z})) .$$

De la propriété 2 on déduit une nouvelle preuve de la nullité de $H_0(\tilde M, \infty_\xi^-)$, et aussi que l'on a

$$H_1(\tilde M, \infty_\xi^-) \approx \mathrm{Tor}^\Lambda{}_1(\Lambda_\xi^-, \mathbb{Z}) = H_1(\Lambda_\xi^-, \Lambda)$$

(homologie du Λ-module Λ_ξ^-), ce qui prouve déjà que ce module ne dépend que de π_1M et du morphisme ξ.

2. CARACTERISATIONS DE LA NULLITE DE $H_1(\tilde M, \infty_\xi^-)$.

2.1. Preuve du théorème 3. Nous allons prouver A1⇒A3, A3⇔A2, A2⇒A4 et A4⇒A1.

A1⇒A3. Considérons la suite exacte (1.1) pour $k=1$. Comme $\tilde M$ est simplement connexe, on a $H_1(\tilde M, \tilde f \le c) = \tilde H_0(\tilde f \le c)$; de plus, de la suite exacte $H_2\tilde M \to H_2(\tilde M, \tilde f \le c) \twoheadrightarrow H_1(\tilde f \le c)$, on déduit $\lim{}^1 H_2(\tilde M, \tilde f \le c) = \lim{}^1 H_1(\tilde f \le c)$. Il vient donc la suite exacte

$$(2.2) \qquad \lim{}^1 H_1(\tilde f \le c) \rightarrowtail H_1(\tilde M, \infty_\xi^-) \twoheadrightarrow \lim{}^0 H_0(\tilde f \le c) .$$

Supposons A1 vérifiée ; on a donc $\lim{}^0 H_0(\tilde f \le c) = 0$. Or, comme ω n'a pas de singularité d'indice zéro, on sait que l'application $\tilde H_0(\tilde f \le c) \to \tilde H_0(\tilde f \le c')$ est surjective si $c < c'$. Donc tous les $\tilde H_0(\tilde f \le c)$ sont nuls. □

A3⇔A2. Le revêtement universel $\tilde M \to \hat M$ induit un revêtement galoisien $(\tilde f \le c) \to (\hat f \le c)$ de groupe $\pi_1\hat M$. Comme $(\hat f \le c)$ est connexe, la suite exacte d'homotopie associée donne

$$(2.3) \qquad \pi_1(\tilde f \le c) \qquad \pi_1(\hat f \le c) \xrightarrow{\ i\ } \pi_1\hat M \twoheadrightarrow \pi_0(\tilde f \le c) ,$$

où la flèche i est induite par l'inclusion : donc i est surjective si et seulement si $(\tilde f \le c)$ est connexe. □

<u>Remarque</u>. Il est clair que dans A3, on peut remplacer "pour tout c" par "il existe c tel que", donc aussi dans A2.

A2⇒A4. a) <u>Préliminaires</u>. Soit $\tau > 0$ une période de ξ ; on peut supposer que 0 est une valeur régulière de $\hat f$, donc aussi $k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$. Notons $\hat x_1, \dots, \hat x_p$ des relevés dans $(0 < \hat f < \tau)$ des singularités d'indice 1. Alors tout point critique d'indice 1 de $\hat f$ dans $(0 < \hat f < \tau)$ s'écrit $\hat x = \bar g.\hat x_i$, où $\bar g \in \pi_1 M/\pi_1 \hat M = \mathrm{Aut}(\hat M|M)$, et $|\xi(g)| < \tau$.

Choisissons un point base $\hat b$ dans $(\hat f \le 0)$. Alors $\pi_1(\hat f \le \tau, \hat b)$ est "engendré sur $\pi_1(\hat f \le 0, \hat b)$ par les points critiques d'indice 1 dans $(0 < \hat f < \tau)$" : plus précisément, à chaque $\hat x$ on associe un lacet $\gamma_{\hat x} = \theta_1 \cup \theta \cup \theta_2$, où θ est la partie de la variété stable de $\hat x$ au-dessus du niveau 0, et θ_1, θ_2 des chemins dans $(\hat f \le 0)$ joignant $\hat b$ aux extrémités de θ (cf. figure 1). Alors $\pi_1(\hat f \le \tau, \hat b)$ est engendré par l'image de $\pi_1(\hat f \le 0, \hat b)$ et les $[\gamma_{\hat x}]$.

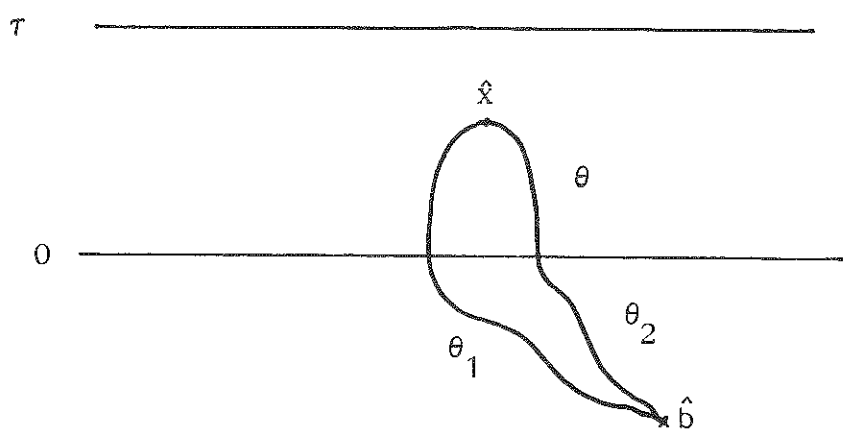

Figure 1

Prenons $\hat b$ dans $(\hat f \le -\tau)$ et, pour $\hat x = \hat x_i$, $1 \le i \le p$, imposons à θ_1 et θ_2 de coïncider avec la variété stable de $\hat x_i$ entre 0 et $-\tau$ (cf. figure 2) ; on obtient ainsi des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Soit $\hat x = \bar g.x_i$ un point d'indice 1 entre 0 et τ ; alors $\hat f(\bar g.\hat b) \le 0$, et il existe un chemin $\lambda_{\bar g}$ de $\hat b$ à $\bar g.\hat b$ dans $(\hat f \le 0)$. On peut alors prendre $\gamma_{\hat x} = \lambda_{\bar g}.\gamma_i.\lambda_{\bar g}^{-1}$.

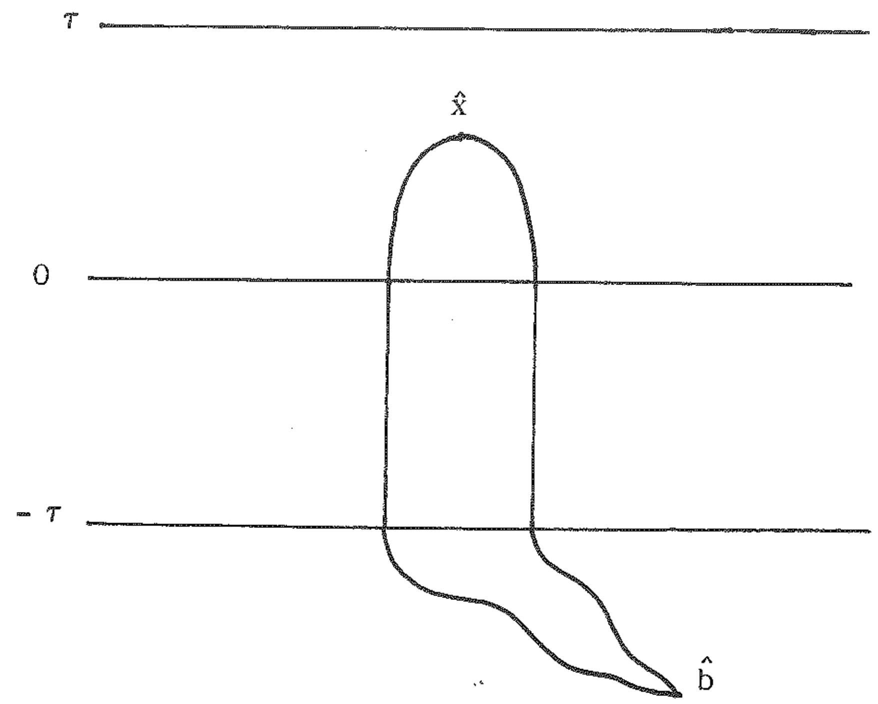

Figure 2

b) Supposons A2 vraie. Comme $\pi_1(\hat f \le -\tau, \hat b) \to \pi_1(\hat M, \hat b)$ est surjective, γ_i est homotope dans $\hat M$ à $\gamma'_i \subset (\hat f \le -\tau)$. Soit N assez grand pour que toutes les homotopies $\gamma_i \simeq \gamma'_i$, $1 \le i \le p$, aient lieu dans $(\hat f \le (N\tau))$; alors tout lacet $\gamma_{\hat x} = \lambda_{\bar g}.\gamma_i.\lambda_{\bar g}^{-1}$ est homotope dans $(\hat f \le (N+1)\tau)$ à $\gamma'_{\hat x} = \lambda_{\bar g}.\gamma_i.\lambda_g$, qui est contenu dans $(\hat f \le 0)$: ceci prouve que $\pi_1(\hat f \le 0, \hat b)$ et $\pi_1(\hat f \le \tau, \hat b)$ ont même image dans $\pi_1(\hat f \le (N+1)\tau, \hat b)$; en utilisant la périodicité, on en déduit (ML). □

A4 ⇒ A1. Supposons A4 vraie, et soit c_1 associé à $c_0 = 0$.

Montrons d'abord A2 : soit g un élément de $\pi_1 \hat M$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que g soit l'image de $\gamma \in \pi_1(\hat f \le c_1 + k\tau)$; alors l'image de γ dans $\pi_1(\hat f \le k\tau)$ provient de $\pi_1(\hat f \le c)$ pour tout $c \le c_1 + k\tau$, et c'est a fortiori vrai pour g, d'où A2.

Ensuite, comme A2⇔A3, on a $\lim^0 \tilde H_0(\tilde f \le c) = 0$; donc, d'après la suite exacte (2.1), il reste à prouver $\lim^1 H_1(\tilde f \le c) = 0$. Or

(ML) entraîne $\lim^1 \pi_1(\hat{f} \le c) = 1$ (cf. [Switzer], p.131–132), et d'après la suite exacte (2.3), on en déduit $\lim^1 \pi_1(\tilde{f} \le c) = 1$, d'où le résultat. □

2.2. Connexion avec les formes complètes de [Levitt].

a) Une forme de Morse ω sans centre est dite <u>complète</u> si tout chemin θ dans $M - \mathrm{Sing}\,\omega$ tel que $\int_\theta \omega = 0$ est homotope à extrémités fixes à un chemin contenu dans une feuille de $\omega | M - \mathrm{Sing}\,\omega$. D'après [Levitt], la complétude est une propriété de la classe de cohomologie, et (ω complète $\Leftrightarrow$ ω et $-\omega$ vérifient A2). Donc :

Propriété. <u>La classe ξ est complète si et seulement si $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^-)$ et $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^+)$ sont nuls.</u>

b) <u>Formes demi-complètes.</u> [Levitt] démontre qu'une forme (de Morse sans centre) est complète si et seulement si, pour toute singularité s d'indice 1 ou $n-1$, les deux bouts singuliers issus de s sont situés sur la même feuille, et il existe un lacet de connexion γ ($\gamma - \{s\}$ est contenu dans cette feuille) homotope à zéro dans M (voir figure 3).

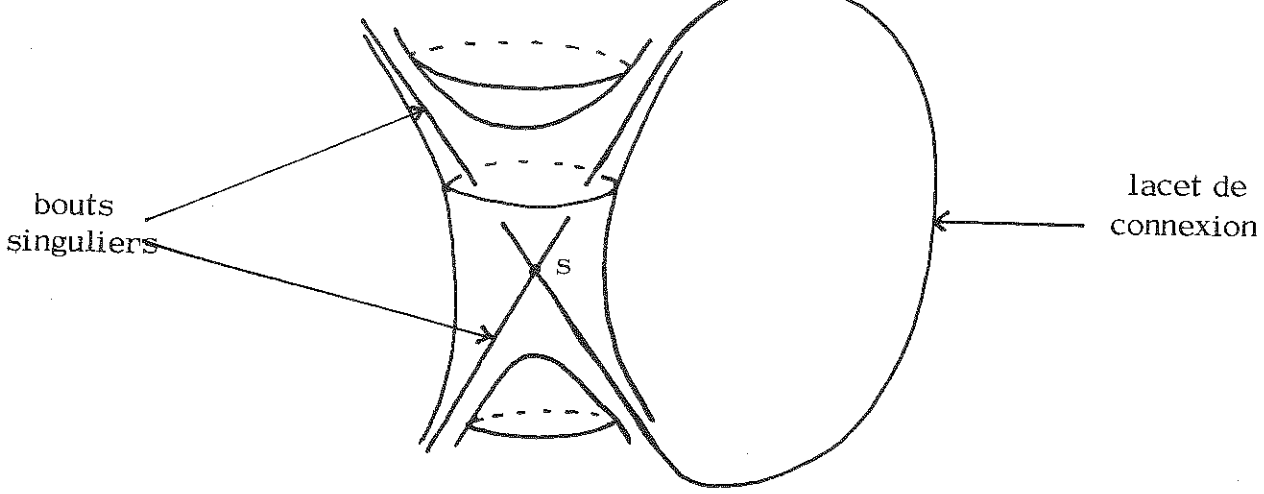

Figure 3

Ceci nous suggère d'appeler une forme de Morse sans singularité d'indice zéro <u>demi-complète à gauche</u> si un tel lacet existe pour toute singularité d'indice un. On adapte sans difficulté les méthodes de [Levitt] (preuve de la proposition II.2) pour prouver l'équivalence de cette propriété avec A3, donc la nullité de $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^-)$. Notons que la stabilité par perturbation de la demi-complétude permet de prouver, comme dans [Levitt], que <u>l'ensemble</u> $\{\xi | H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^-) = 0\}$ <u>est ouvert dans</u> $H^1(M;\mathbb{R})$; nous retrouverons ce résultat plus tard (voir 4.4, remarque 1).

2.3. Preuve du corollaire 4. C'est le théorème V.2 de [Levitt], où l'on a remplacé la complétude par sa caractérisation homologique ; reproduisons sa démonstration, en rappelant que $\ker \xi = \pi_1(\hat{M}_\xi)$:

a) Si $\pi_1(\hat{M}_\xi)$ est de type fini, il est engendré par l'image de $\pi_1(K)$, où K est compact, donc par $\pi_1(c \le \hat{f} \le c')$: on en déduit que ξ et $-\xi$ vérifient A2.

b) Supposons rationnelle, alors tout niveau régulier $(\hat{f} = c)$ est une variété compacte, donc $\pi_1(\hat{f} = c)$ est de présentation finie ; si ξ est complète, alors la surjectivité de $(\pi_1(\hat{f} = c) \to \pi_1(\hat{M}_\xi))$ implique que $\pi_1(\hat{M}_\xi)$ est de type fini. □

2.4. Corollaire. <u>Si</u> M <u>est de dimension trois et irréductible, il y a équivalence entre</u> :

a) ξ <u>est non singulière</u> ;
b) $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^-)$ <u>et</u> $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi{}^+)$ <u>sont nuls</u>.

<u>Démonstration</u> (cf. [Levitt],partie V,preuve de $\mathfrak{C}(N) = \mathfrak{U}(N)$ pour les variétés de dimension trois irréductibles).

Notons N et C les sous-ensembles de $H^1(M,\mathbb{R})$ définis par a) et b) ; on sait déjà que $N \subset C$, et de plus C est ouvert (cf. 2.3). Le théorème de fibration de [Stallings] dit que, si ξ est rationnelle, elle est dans N si et seulement si $\ker \xi$ est de type fini, c'est-à-dire si elle est dans C d'après le corollaire 4.

Il ne reste plus qu'à voir que, si ξ est irrationnelle et n'est pas dans N, elle n'est pas dans C non plus ; or, la description de N par [Thurston] implique l'existence d'une suite de classes rationnelles tendant vers ξ et qui ne sont pas dans N, donc pas dans C : comme C est ouvert, ξ ne peut être dans C. □

Remarque. En fait, la nullité de $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ suffit d'après [Bieri-Neumann-Strebel] (voir ce qui suit et leur théorème E).

2.5. Connexion avec [Bieri-Neumann-Strebel].

Dans [Bieri-Neumann-Strebel], on considère un groupe G de type fini, de groupe des commutateurs G' ; pour un morphisme ξ de G dans $\mathbb{R}$, on pose $G_\xi = \{ g \mid \xi(g) \geq 0 \}$ puis

$$\Sigma(G) = \{ \xi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})-\{0\} \mid G' \text{ est de type fini sur un sous-monoïde de type fini de } G_\xi \}$$

(en fait, on prend le quotient par l'action multiplicative de $\mathbb{R}_+^*$).

Théorème ([Bieri-Neumann-Strebel], Théorème G (légèrement modifié)). On suppose G de présentation finie et l'on considère une variété fermée M telle que $\pi_1 M = G$; un morphisme $\xi : G \to \mathbb{R}$ est identifié à une classe de $H^1(M;\mathbb{R})$. Si ξ est non nulle, on la représente par une forme ω ; sur le revêtement $\bar{M}$ défini par $\pi_1\bar{M} = G'$, celle-ci se relève en une forme exacte $d\bar{f}$. Alors la partie $(\bar{f} \geq 0)$ de $\bar{M}$ admet une unique composante non $\bar{f}$-bornée, notée $\bar{M}^+(\xi)$, et les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\xi \in \Sigma(G) = \Sigma(\pi_1 M)$;

b) Le morphisme $\pi_1(\bar{M}^+(\xi)) \to \pi_1\bar{M}$ est surjectif.

On peut reprendre leur preuve mot à mot en remplaçant $\bar{M}$ par $\hat{M}_\xi$ et $\bar{M}^+(\xi)$ par $(\hat{f} \geq 0)$, ce qui compte étant l'abélianité des deux revêtements, d'où :

Corollaire. Si ξ est une classe dans $H^1(M;\mathbb{R})-\{0\}$, il y a équivalence entre :

a) $-\xi \in \Sigma(\pi_1 M)$;

b) $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-) = 0$.

2.6. Du résultat précédent et du théorème B1 de [Bieri-Neumann-Strebel], on déduit la généralisation suivante du corollaire 4.

Corollaire. Soit ξ une classe non nulle quelconque dans $H^1(M;\mathbb{R})$; alors $\ker\xi$ est de type fini si et seulement si on a $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-) = 0$ pour toute forme η telle que $\ker\eta \supset \ker\xi$.
(Si ξ est rationnelle, une telle forme est un multiple $\lambda\xi$, donc l'homologie associée est celle de $\pm\xi$: on retrouve bien le corollaire 4.)

2.7. Commentaire sur un exemple de [Bieri-Neumann-Strebel].

Cet exemple (section 8) est celui d'un groupe G de présentation finie et tel que, dans $\mathrm{Hom}(G;\mathbb{R})$, l'ensemble $\Sigma(G)$ est le complémentaire de deux demi-droites irrationnelles (par rapport au réseau $H_1(G;\mathbb{Z})$/torsion du dual) : on n'a donc plus la structure rationnelle polyédrale vraie si G est le groupe fondamental d'une variété de dimension trois. Or, en toutes dimensions ≥ 4, on peut trouver une variété fermée M de groupe fondamental G ; donc, il existe une classe irrationnelle ξ telle que

- $H_1(\tilde{M},\infty_\xi^-) \neq 0$,
- $H_1(\tilde{M},\infty_{\xi'}^-) = 0$ pour toute classe rationnelle ξ' assez proche.

Il ne paraît pas déraisonnable d'envisager un exemple semblable pour la propriété ($H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)$ et $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^+)$ sont nuls) ; ensuite, si l'on savait répondre positivement à la question 2 de l'Introduction, on pourrait peut-être trouver une classe ξ totalement irrationnelle telle que :

a) ξ ne peut être représentée par une forme non singulière ;

b) toute classe ξ' assez proche [et rationnelle ?] peut l'être.

3. PREUVE DU THEOREME 5. Elle résultera de la

Proposition. Soit M une variété fermée telle que la section nulle $M \subset T^*M$ puisse être disjointe d'elle-même par une isotopie symplectique (φ_t) ; on note λ la forme de Liouville et $\xi \in H^1(M;\mathbb{R})$ la classe de la forme fermée $(\varphi_1|M)^*\lambda$. Alors on a $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^-)=0$.

En effet, comme $[(\varphi_t^{-1}|M)^*\lambda] = -\xi$, on a aussi $H_*(\tilde{M},\infty_\xi^+)=0$, donc le corollaire 2.4 implique que ξ est représentée par une forme non-singulière : donc M fibre sur le cercle.

Preuve de la proposition. D'après [Sikorav], on peut construire une variété fermée V^{2N} et une forme Ω non-singulière sur $M \times V$, avec les propriétés suivantes :

a) Il existe une application $p : V \to S^1$ à singularités de Morse ayant pour seule singularité un point d'indice N ; de plus, p induit un isomorphisme de $\pi_1 V$ sur $\pi_1 S^1 \approx \mathbb{Z}$;

b) La classe $[\Omega]$ est de la forme $\xi \oplus A\alpha$, où A est un nombre quelconque assez grand et $\alpha = [p^* d\theta]$.

Notant t le générateur de $\pi_1 V$ tel que $p_\#(t)=1$, on pose

$$L = \mathbb{Z}[\pi_1 V] = \mathbb{Z}[t,t^{-1}] ,$$

$$L^- = L_\alpha^- = \mathbb{Z}[t][[t^{-1}]] \quad (= L_{A\alpha}^-) .$$

Lemme 1. On a : $H_*(\tilde{V};\infty_\alpha^-) = H_N = L^-$.

Démonstration (esquisse). Cela résulte de la suite (1.2) et du fait que, si c est une valeur régulière de l'application relevée $\tilde{p}$, alors $(\tilde{p} \le c)$ s'obtient homotopiquement en attachant une N-cellule à $(\tilde{p} \le c-1)$.

Remarque. Ce lemme est évidemment un cas particulier de la théorie du complexe de Novikov évoquée dans l'introduction.

Ensuite, on choisit A dans le groupe $\operatorname{im}\xi$, et l'on fixe g_0 dans $\pi_1 V$ tel que $\xi(g_0)=A$. On pose $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1 M], \Lambda^- = \Lambda_\xi^-$ et l'on regarde L (resp. L^-) comme un sous-anneau de Λ (resp. Λ^-) en identifiant t à g_0.

Notons ensuite

$$B = \mathbb{Z}[\pi_1(M \times V)] \approx \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} L ,$$

$$B^- = B_{[\Omega]}^- = \{ \textstyle\sum n_{g,i}\, g \otimes t^i \mid \text{pour tout } c \text{, il n'y a qu'un nombre fini de } (g,i) \text{ tels que } n_{g,i} \neq 0 \text{ et } \xi(g)+Ai \ge 0 \} .$$

On fait agir B à droite sur Λ en posant $g.(g' \otimes t^i) = g_0^i g g'$. Le fait que $\xi(g_0)=A$ dit que ceci s'étend en une action de B^- sur Λ^-.

Enfin, définissons les complexes de chaînes cellulaires

$$C_1 = C_*^c(\tilde{M}) , \quad \bar{C}_1 = C_1^c(\tilde{M},\infty_\xi^-) \approx \Lambda^- \otimes_\Lambda C_1 ,$$
$$C_2 = C_*^c(\tilde{V}) , \quad \bar{C}_2 = C_2^c(\tilde{V},\infty_\alpha^-) \approx L^- \otimes_L C_2 ,$$
$$C = C_*^c(\tilde{M} \times \tilde{V}) \approx C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_2 ,$$
$$\bar{C} = C_*^c(\tilde{M} \times \tilde{V},\infty_{[\Omega]}^-) \approx B^- \otimes_B C .$$

Lemme 2. On a l'isomorphisme de Λ^--complexes

$$\Lambda^- \otimes_{B^-} \bar{C} \approx \bar{C}_1 \otimes_{L^-} \bar{C}_2 .$$

Démonstration. Le complexe de gauche est isomorphe à $\Lambda^- \otimes_B (C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_2)$, et celui de droite à $(\Lambda^- \otimes_\Lambda C_1) \otimes_L C_2$; le lemme résulte alors de $B \approx \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} L$. □

Fin de la preuve de la proposition. Comme Ω est non singulière, le complexe $\bar{C}$ est acyclique ; comme il est libre, $\Lambda^- \otimes_{B^-} \bar{C}$ est encore acyclique, soit $H(\bar{C}_1 \otimes_{L^-} \bar{C}_2) = 0$ d'après le lemme 2. Or, L^- est évidemment un anneau euclidien donc principal ; d'autre part, $H(\bar{C}_2) \approx L^-$ d'après le lemme 1, donc la formule de Künneth implique $H(\bar{C}_1 \otimes_{L^-} \bar{C}_2) \approx H(\bar{C}_1)$, d'où $H(\bar{C}_1) = 0$. □

4. CALCUL DE $H_1(\tilde{M},\infty_{\xi}^-)$.

4.1. Nous allons appliquer la méthode indiquée par la propriété 2. Comme nous nous limitons à H_1, il suffit de se donner une suite exacte de Λ-modules libres

$$C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \ , \quad \text{coker } d_1 \approx \mathbb{Z} \ .$$

Pour cela, nous nous donnons une présentation $\langle g_1,\dots,g_p | r_1,\dots,r_q \rangle$ de $\pi_1 M$ et lui associons la suite exacte de Lyndon évoquée dans l'introduction.

Soit maintenant ξ un élément non nul de $H^1(M;\mathbb{R})$, disons tel que $\xi(g_k) \neq 0$. On pose $\hat{\Lambda} = \Lambda_{\xi}^-$ et l'on considère la suite

$$\Lambda^q \xrightarrow{\hat{d}_2} \hat{\Lambda}^p \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{\Lambda}$$

obtenue par extension des scalaires ; d'après la propriété 1, on a :

$$H_0(\tilde{M},\infty_{\xi}^-) \approx \hat{\Lambda}/\text{im } \hat{d}_1 \ ,$$
$$H_1(\tilde{M},\infty_{\xi}^-) \approx \ker \hat{d}_1/\text{im } \hat{d}_2 \ .$$

D'abord, notons que $\hat{d}_1(e_k) = g_k - 1$ est <u>inversible</u> dans $\hat{\Lambda}$: si par exemple $\xi(g_k) > 0$, son inverse est $\sum_{\ell=1}^{\infty} g_k^{-\ell}$; donc $\hat{d}_1$ est surjective, ce qui donne une nouvelle preuve de la nullité de $H_0(\tilde{M},\infty_{\xi}^-)$.

Ensuite, on peut décrire le noyau de $\hat{d}_1$:

$$(\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_p) \in \ker \hat{d}_1 \Leftrightarrow \sum_1^p \hat{\lambda}_j(g_j - 1) = 0 \quad \text{d'après (4.2)}$$
$$\Leftrightarrow \hat{\lambda}_k = \sum_{j \neq k} \hat{\lambda}_j (g_j - 1)(1 - g_k)^{-1} \ .$$

Notons $\hat{\pi}_k : \hat{\Lambda}^p \to \hat{\Lambda}^{p-1}$ la projection oubliant la k-ème coordonnée ; elle induit un isomorphisme de $\ker \hat{d}_1$ sur $\hat{\Lambda}^{p-1}$, d'où :

(4.4) $\quad H_1(\tilde{M},\infty_{\xi}^-) \approx \hat{\Lambda}^{p-1}/\text{im}(\hat{\pi}_k \circ \hat{d}_2)$.

Remarquons que $\hat{\pi}_k \circ \hat{d}_2$ est représentée par la matrice A de la proposition 6, considérée comme ayant ses coefficients dans $\hat{\Lambda}$.

4.5. Preuve de la proposition 6. L'équivalence de a) et de b) résulte immédiatement de (4.4), et celle de b) et de c) est évidente. Reste à prouver c) $\Leftrightarrow$ d).

c) $\Leftrightarrow$ d). Soit $\hat{X}$ vérifiant c). Notons K la valeur maximale de ξ sur les termes de A. Comme $\hat{X}$ est à coefficients dans Λ_{ξ}^-, elle ne contient qu'un nombre fini de termes sur lesquels ξ prend une valeur $\geq -K$; soit $X \in M_{q,p-1}(\Lambda)$ la somme de ces termes, alors $(\hat{X} - X)A$ est clairement ξ-négative, donc XA a la forme voulue.

d) $\Leftrightarrow$ c). Soient X et B vérifiant d). Alors $id_{p-1} + B$ est inversible dans $M_{p-1,p-1}(\Lambda_{\xi}^-)$, son inverse étant $\sum_0^{\infty} (-1)^k B^k$. Donc, si l'on pose $\hat{X} = (id_{p-1} + B)^{-1} X$, on aura $\hat{X}A = id_{p-1}$. □

<u>Remarques</u>. 1) La condition d) montre de nouveau que $\{\xi | H_1(\tilde{M},\infty_{\xi}^-) = 0\}$ est ouvert.

2) Comme l'anneau Λ_{ξ}^- admet un morphisme vers un corps, par

[Lyndon] R.C. LYNDON, Cohomology of groups, Ann. of Math. 52 (1950), 650-665.

[Massey] W.S. MASSEY, Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New-York 1978.

[Novikov] S.P. NOVIKOV, Multivalued functions and functionals ; an analogue of the Morse theory, Soviet Math. Dokl.24 (1981), 222-226.

[Siebemann] L.C. SIEBENMANN, A total Whitehead obstruction to fibering over the circle, Comment. Math. Hev. 45 (1970), 1-48.

[Sikorav] J.-C. SIKORAV, Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4e série, t.19 (1986).

[Stallings] J. STALLINGS, On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1962, p.95-100.

[Switzer] R.M. SWITZER, Algebraic Topology - Homotopy and Homology, Grundlehren Math. Wiss. 212, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[Thurston] W.P. THURSTON, A norm of the homology of 3-manifolds, Memoirs Amer. Math. Soc. 339 (1986) (appendice).

[Tischler] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1, Topology 9 (1970), 153-154.

N° d'impression : 890
2e trimestre 1987