UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Dottorato di ricerca in matematica

SYSTEMES HAMILTONIENS ET TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

di

Jean-Claude Sikorav

ETS EDITRICE PISA

SYSTEMES HAMILTONIENS ET TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

Jean-Claude Sikorav, Université Paris-Sud
août 1990

INTRODUCTION

Le but de ces notes est de présenter certains résultats récents sur les orbites périodiques des systèmes hamiltoniens dans $\mathbb{R}^{2n}$ et leur application aux propriétés topologiques des symplectomorphismes, notamment la théorie des capacités symplectiques créée en 1988 par I. Ekeland et H. Hofer [EH2]. Elles ne couvrent pas les développements plus récents : capacités d'ordre supérieur, groupes d'homologie locaux de Floer-Hofer (voir à la fin de cette Introduction). Faute de temps, je ne dirai rien des autres développements spectaculaires de la topologie symplectique de ces dernières années (voir [Ben1] [Ar2] [G3] [Vi3]) [Ben2]), qui ont souvent des relations très fortes avec les résultats présentés ici.

Un important problème de la théorie des systèmes hamiltoniens est l'existence d'une caractéristique fermée sur une hypersurface compacte sans bord $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$. Si $\Sigma = H^{-1}(c)$, cela revient à trouver les orbites périodiques du système hamiltonien $\dot{x} = X_H(x)$ qui se trouvent sur Σ (cf. § 2). Pour Σ quelconque, le problème reste ouvert, mais des progrès importants ont été faits ces dernières années :

En 1977, A. Weinstein [W1] et P. Rabinowitz [Ra1] traitèrent le cas où Σ borde un domaine convexe (cf. aussi [Cl]). En 1978, Rabinowitz [Ra2] prouva le cas où Σ borde un domaine étoilé, et il en donna avec V. Benci une deuxième preuve [BR] par une méthode qui est à l'origine de tous les progrès récents (voir le début du § 3). Par la suite, un grand nombre de résultats plus précis fut obtenu dans ces deux cas particuliers (voir les surveys [D] [Ber] et le livre [Ek]).

La propriété de border un domaine convexe ou étoilé n'est pas invariante symplectiquement. Juste après le théorème de Rabinowitz, Weinstein [W3] introduisit la notion plus générale (et symplectiquement invariante) d'hypersurface de type contact dans une variété symplectique (voir le § 7), et conjectura qu'une telle hypersurface avait toujours une caractéristique fermée si $H^1(\Sigma;\mathbb{R}) = 0$.

En 1986, C. Viterbo [Vi1] démontra la conjecture de Weinstein dans $\mathbb{R}^{2n}$ sans hypothèse sur $H^1(\Sigma;\mathbb{R})$. Peu après, Hofer et E. Zehnder [HZ] démontrèrent le résultat suivant : pour Σ quelconque, étant donné un voisinage feuilleté de Σ , une au moins des hypersurfaces parallèles admet une caractéristique fermée. Or une hypersurface de type contact admet un voisinage feuilleté par des hypersurfaces conformément symplectiquement équivalentes à Σ : donc on retrouve le théorème de Viterbo. Le résultat de Hofer et Zehnder est actuellement le plus général sur l'existence d'une caractéristique fermée dans $\mathbb{R}^{2n}$.

La relation entre les caractéristiques fermées et la topologie symplectique est basée sur l'idée suivante : si B et B' sont deux domaines compacts à bord lisse dans $\mathbb{R}^{2n}$, l'existence d'un symplectomorphisme entre les intérieurs $\mathrm{Int}\, B$ et $\mathrm{Int}\, B'$ doit impliquer de fortes relations entre les domaines fermés et donc entre les feuilletages caractéristiques de ∂B et de $\partial B'$ (voir § 2.8). L'idée de la théorie des capacités symplectiques est de montrer que dans certains cas les <u>aires entourées</u> par certaines caractéristiques fermées de ∂B sont des invariants symplectiques de l'intérieur. De plus, on espère une certaine "monotonie" : si B contient B' , on s'attend que les aires des caractéristiques de B soient plus grandes que celles de B' . Le prototype de ce dernier résultat est le théorème de Croke-Weinstein (1980) [CW] si B et B' sont convexes (voir 6.5).

Nous ne traiterons dans ces notes que de la première capacité symplectique, appelée ici <u>capacité</u>. et notée $c(B)$. Elle est en fait définie pour toute partie B de $\mathbb{R}^{2n}$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, et a les propriétés suivantes :

(1) Invariance symplectique : $c(\varphi(B)) = c(B) \quad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.

(2) Monotonie : $c(B) \leq c(B') \quad \forall B \subset B'$.

(3) Homogénéité : $c(\lambda B) = \lambda^2 c(B) \quad \forall B$.

(4) "Normalisation" : $c(B^{2n}(1)) = \pi = c(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2})$.

(5) "Théorème de représentation" : si B est un domaine compact à bord lisse et de type contact, alors $c(B) = c(\partial B) = A(\gamma)$, aire entourée par une certaine caractéristique fermée γ sur ∂B .

La capacité est un invariant proche de la "width" symplectique définie par M. Gromov [G1] [G3] via les courbes pseudo-holomorphes. Une différence essentielle est que cette dernière est un invariant intrinsèque alors que la capacité dépend du plongement : par exemple, la largeur d'un anneau $A \subset \mathbb{R}^2$ est son aire, alors que sa capacité est l'aire entourée par la composante extérieure du bord (cf. 4.4).

Des propriétés (1) à (4) résulte aisément le fameux théorème de Gromov [G1] sur les plongements symplectiques des boules : la boule $B^{2n}(r)$ ne peut se plonger symplectiquement dans un cylindre $B^2(s) \times \mathbb{C}^{n-1}$ si $s < r$. On en déduit le théorème de C^0-rigidité symplectique d'Eliashberg et Gromov [El1] [G3] : pour toute variété symplectique (V,ω) , le groupe

$\mathrm{Diff}(V,\omega)$ est fermé dans $\mathrm{Diff}(V)$ pour la topologie C^0 (voir un énoncé plus précis en 5.2).

On peut préciser la propriété (5) si B est convexe : $c(B)$ est la plus petite aire d'une caractéristique fermée sur ∂B . Mais c'est en général faux si B est seulement de type contact, même s'il est étoilé (cf. 7.6).

Une autre propriété importante de $c(B)$ est la formule du produit annoncée par Floer et Hofer [FH]. Nous la démontrons ici dans le cas où les B_i sont convexes ou des bords de convexes : si les B_i sont des compacts convexes, on a $c(B_1 \times \ldots \times B_k) = c(\partial B_1 \times \ldots \times \partial B_k) = \min_i c(B_i)$. En particulier, la capacité d'un tore "standard" $S^1(r_1) \times \ldots \times S^1(r_n) \subset \mathbb{C}^n$ est $\min_i \pi r_i^2$. Plus généralement, il semble plausible que la capacité d'une sous-variété lagrangienne fermée soit strictement positive (cf. 6.6 et 8.4).

Parmi les autres propriétés de $c(B)$, mentionnons le fait que c'est un minorant de l'énergie de disjonction hamiltonienne [H]. Cette nouvelle notion dûe à Hofer possède des propriétés très curieuses (voir le § 8, notamment 8.4).

Pour terminer cette Introduction, disons quelques mots des prolongements récents de la théorie :

(1) <u>Capacités d'ordre supérieur</u> [EH2] [Vi3] : il s'agit d'une suite infinie $c(B) = c_1(B) \leq c_2(B) \leq \ldots$ d'invariants ayant des propriétés analogues à celles de $c(B)$. Si B est un domaine compact convexe, il semble que ces capacités sont les aires de <u>toutes</u> les caractéristiques fermées du bord, y compris les caractéristiques multiples, éventuellement comptées avec une certaine multiplicité. Par exemple, si B est l'ellipsoïde de rayons principaux $(r_1, r_2, \ldots r_n)$ la suite des $c_i(B)$ s'obtient en ordonnant de façon croissante les nombres $\{ k\pi r_j^2 \mid k \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq j \leq n \}$. On peut déduire le corollaire suivant : deux ellipsoïdes sont symplectiquement équivalents si et seulement s'ils sont linéairement symplectiquement équivalents.

(2) Tout récemment Floer et Hofer [FH] ont annoncé la définition de "groupes d'homologie locaux" $(I_a{}^b)_*(B)$, $B \subset \mathbb{R}^{2n}$. Si B a un bord lisse de type contact, ces groupes permettent de récupérer toutes les caractéristiques fermées du bord avec leur aire : l'existence d'une caractéristique d'aire a se traduit par la non-nullité des groupes $(I_a{}^{a+\varepsilon})_*(B)$ pour ε assez petit. Cette théorie a déjà de nombreuses applications qu'il est impossible de mentionner ici. Citons seulement la classification symplectique des polydisques : si $D(a_1, a_2, \ldots a_n)$ et $D(b_1, b_2, \ldots b_n)$ sont symplectomorphes, alors $(a_1, a_2, \ldots a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ à permutation près (le cas $n = 2$ résultait du théorème de non-plongement d'une boule dans un cylindre).

PLAN

1. Outils d'analyse fonctionnelle
   1.1. Espaces de Sobolev de séries de Fourier
   1.2. Théorie du degré de Leray -Schauder
   1.3. Théorie du minimax de Lyusternik-Schnirelmann

2. Systèmes hamiltoniens. Principes variationnels
   2.1. Champs hamiltoniens. Difféotopies hamiltoniennes
   2.2. Isotopies hamiltoniennes
   2.3. Fonctionnelle d'aire entourée
   2.4. Fonctionnelle d'action. Différentiabilité
   2.5. Principe variationnel "à période fixée"
   2.6. Champ caractéristique
   2.7. Principe variationnel "à énergie fixée"
   2.8. Symplectomorphismes de domaines à bord

3. Capacité d'une fonction
   3.1. Déformations admissibles
   3.2. Définition de la capacité d'une fonction
   3.3. Encadrement
   3.4. Propriété de valeur critique
   3.5. Invariance symplectique

4. Capacité d'un ensemble
   4.1. Définition et premières propriétés
   4.2. Invariance symplectique
   4.3. Capacité de la boule et du cylindre
   4.4. Autres propriétés

5. Rigidité symplectique
   5.1. Plongement d'une boule dans un cylindre
   5.2. C^0-rigidité
   5.3. Homéomorphismes symplectiques

6. Domaines convexes
   6.1. Rappels d'analyse convexe

   6.2. Principe d'action duale
   6.3. Existence d'une caractéristique fermée
   6.4. Capacité d'un domaine convexe et de son bord
   6.5. Formule du produit
   6.6. Capacité des sous-variétés lagrangiennes

7. Quasi-existence de caractéristique fermée. Hypersurfaces de type contact
   7.1. Fonctions adaptées à un voisinage feuilleté. Théorème de Hofer-Zehnder
   7.2. Hypersurfaces de type contact
   7.3. Discussion de la propriété de contact
   7.4. Aire des caractéristiques fermées sur une hypersurface de type contact
   7.5. Théorème de représentation
   7.6. Exemple d'étoilé "non convexifiable"

8. Energie
   8.1. Définitions
   8.2. Comparaison avec la capacité
   8.3. Cas de la dimension 2
   8.4. Autres propriétés

Commentaires. Le lecteur est supposé avoir une certaine familiarité avec la géométrie symplectique (cf. les livres [Ar1] [W1] [LM] [Va] [AM]). En revanche, j'ai essayé de rendre ces notes aussi "self-contained" que possible du point de vue de l'Analyse.

Après un chapitre préliminaire d'analyse fonctionnelle, nous faisons dans le § 2 quelques rappels sur les systèmes hamiltoniens et les isotopies hamiltoniennes dans $\mathbb{R}^{2n}$, mentionnant notamment la propriété d'extension et l'astuce d'Alexander (2.2). Ensuite, nous exposons le principe de moindre action de Hamilton caractérisant les orbites périodiques des systèmes hamiltoniens (2.3-2.5), en essayant de préciser soigneusement l'espace fonctionnel et les propriétés de différentiabilité. Puis nous introduisons le champ caractéristique d'une hypersurface de $\mathbb{R}^{2n}$.

Les § 3 et 4 suivent de près [EH1] avec quelques simplifications. Dans le § 3, nous définissons la capacité d'une fonction H sur $\mathbb{R}^{2n}$ comme étant une valeur critique particulière (obtenue par minimax, par la méthode de Benci-Rabinowitz) de la fonctionnelle d'action associée. Dans le § 4, on en déduit la capacité d'une partie de $\mathbb{R}^{2n}$ en considérant des fonctions qui sont nulles sur B et très grandes hors de B, et nous établissons les propriétés (1)-(4) de l'Introduction. Dans le § 5, on prouve les théorèmes sur les plongements de boules et la C^0-rigidité symplectique (en suivant [El2]), et l'on discute la notion (pas encore au point) d'homéomorphisme symplectique.

Le début du § 6 (jusqu'à 6.3) expose le principe d'action duale de F. Clarke [Cl] pour trouver les caractéristiques fermées sur une hypersurface convexe : il peut se lire directement après le § 2. La fin du § 6 et les § 7, 8 peuvent se lire directement après le § 4. Les 7.1 et 7.2 suivent de près [HZ]. La définition des hypersurfaces de type contact est donnée en 7.2, et le théorème de représentation en 7.5. En 7.6 on donne un exemple d'étoilé à bord lisse ayant une caractéristique d'aire inférieure à sa capacité. Dans le § 8 on définit l'énergie (ou norme de Hofer) d'un symplectomorphisme et l'énergie de disjonction d'une partie de $\mathbb{R}^{2n}$, et l'on montre que celle-ci est minorée par la capacité. En 8.3 on montre qu'en dimension 2 ces deux notions coïncident, et s'expriment en termes d'aire. En 8.4 on donne notamment un résultat curieux sur la comparaison entre l'énergie et le support.

Remerciements. Ce texte a pour origine une série d'exposés faits à l'Université de Pise en mai-juin 1989. Je remercie chaleureusement pour leur accueil les membres du Département de Mathématiques, notamment Riccardo Benedetti et Margherita Galbiati, et aussi tous les auditeurs de ces exposés. D'autre part, j'ai bénéficié de nombreuses discussions avec Helmut Hofer et Claude Viterbo, dont je leur suis très reconnaissant.

1. OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1. Espaces de Sobolev de séries de Fourier (cf. [BR] p. 254-255, [K], p. 108 sqq, [Zy], p. 133 sqq).

Soit s un nombre réel quelconque. L'espace de Sobolev $H^s(S^1,\mathbb{C}^n)$, ou simplement H^s, est par définition l'espace des séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^k e^{2\pi ikt}$$

à coefficients $x^k \in \mathbb{C}^n$, vérifiant la condition

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s}\,|x^k|^2 < \infty .$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle x,y\rangle_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi|k|)^{2s}\,(x_k,y_k),$$

où (x,y) désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{C}^n$.

Si $s < 0$, on considère H^s comme un espace de séries formelles (ou de distributions). Si $s \geq 0$, H^s est un sous-espace de H^0, qu'on peut identifier à l'espace d'applications mesurables $L^2(S^1,\mathbb{C}^n)$. Si $s \in \mathbb{N}$, H^s est l'espace des applications ayant s dérivées dans L^2.

Propriétés. Les trois premières sont de simples exercices.

Propriété 1. Pour tous r et s on a

$$\|x\|_s = \max_{\|y\|_r = 1} \langle x,y\rangle_{(r+s)/2} .$$

Propriété 2 (lemme de Rellich). Si $s > r$, alors l'inclusion $H^s \subset H^r$ est compacte.

Propriété 3 (inclusions de Sobolev). Si $s > \frac{1}{2}$, H^s est contenu dans l'espace C^0 des lacets continus. Plus précisément, notant C^p l'espace de Hölder d'ordre p, on a

$$H^{1/2+\varepsilon} \subset C^{\varepsilon} \qquad \forall\, \varepsilon \in]0,1[,$$

et l'inclusion est compacte.

Propriété 4. Pour $0 \le s < 1$, l'espace H^s est l'espace des lacets mesurables vérifiant

$$\iint |(x(t) - x(u)|^2/|t-u|^{2s}\, dt\, du < \infty .$$

Cette propriété se démontre en remplaçant $(t-u)$ par $\sin \pi(t-u)$. L'intégrale double est alors égale à $\sum a_k |x^k|^2$ où $a_k \sim |k|^{2s}$ si $|k| \to \infty$.

Nous travaillerons en fait surtout sur l'espace $H^{1/2}$, défini par la condition $\sum |k|\,|x^k|^2 < \infty$, ou d'après la propriété 4 par

$$\iint |(x(t) - x(u)|^2/|t-u|\, dt\, du < \infty .$$

Il n'est pas contenu dans C^0 ni même dans L^∞ (considérer $x_k = (k \operatorname{Log} k)^{-1}$ pour $k \ge 2$) (cas limite des inclusions de Sobolev). En revanche, on a les propriétés suivantes.

Propriété 5. L'espace $H^{1/2}$ est contenu dans L^p pour tout $p < +\infty$.

La preuve de cette propriété résulte par exemple du théorème de Hausdorff-Young, lui-même conséquence du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, voir [Ed] p. 151-153 ou [Zy] p. 93-101. Plus précisément, on a $\|x\|_{L^p} \le C\sqrt{p}\, \|x\|_{H^{1/2}}$ ([Zy], p.157-158).

Plutôt : cas immédiat de Hausdorff-Young + Hölder

Propriété 6. L'espace $H^{1/2}$ contient C^ε pour tout $\varepsilon > 0$ (mais il ne contient pas C^0).

$\|x\|_{L^p} \le \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|x\|_{H^{1/2}}$ (d'où $e^{|x|^\alpha} \in L^1$ si $\alpha < 2$)

Propriété 7. Un lacet $x \in H^{1/2}$ n'a pas de discontinuité de première espèce. Plus précisément, si les limites de $x(t)$ à gauche et à droite existent en un point t_0, elles sont égales.

Ces deux dernières propriétés résultent immédiatement de la propriété 4.

1.2. Théorie du degré de Leray-Schauder (cf. [Le], [Sc], [Ze]).

Soient G un ouvert dans un espace topologique E, $\dot{G}$ sa frontière, $\Phi : \overline{G} \to E$ une application continue et $p \in E \setminus \Phi(\dot{G})$. On cherche à définir le degré de Φ en p par rapport à G, c'est-à-dire un entier (dans $\mathbb{Z}$) qui mesure le nombre algébrique de solutions de l'équation $\Phi(x) = p$ dans G. C'est possible si E est un espace de Banach sous une hypothèse de compacité.

Théorème. Soient E un espace de Banach, G un ouvert borné de frontière $\dot{G}$ et Φ une application continue de $\overline{G}$ dans E telle que $\Phi - \mathrm{id}$ prenne ses valeurs dans un compact. Enfin, soit p un point de $E \setminus \Phi(\dot{G})$. Alors on peut définir de façon unique $\deg(\Phi, p, G) \in \mathbb{Z}$, avec les propriétés suivantes.

(i) L'application $p \mapsto \deg(\Phi, p, G)$ est localement constante sur $E \setminus \Phi(\dot{G})$ (qui est ouvert car Φ est fermée).

(ii) Si $\deg(\Phi, p, G) \ne 0$, $\Phi(G)$ contient p ainsi que tout un voisinage de p.

(iii) Si (Φ_t) est une homotopie d'applications continues de $\overline{G}$ dans E telle que $(\forall t)$ $\Phi_t - \mathrm{id}$ prend ses valeurs dans un compact fixe et $p \notin \Phi_t(\dot{G})$, alors $\deg(\Phi_t, p, G)$ ne dépend pas de t.

(iv) Si $p \in G$, on a $\deg(\mathrm{id}, p, G) = 1$.

(v) Si $\overline{G} = \bigcup_i \overline{G}_i$ et que les G_i sont ouverts et disjoints, on a $\deg(\Phi, p, G) = \sum_i \deg(\Phi, p, G_i)$.

1.3. Théorie du minimax de Lyusternik-Schnirelmann (cf. [Sc], [P], [Ze]).

Soient E un espace de Hilbert et $\Phi : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On note $\Phi'(x)$ sa différentielle en x. C'est un élément du dual de E, qui s'identifie à un élement de E : le gradient $\nabla\Phi(x)$. On a bien sûr $\|\Phi'(x)\| = \|\nabla\Phi(x)\|$.

Quand on recherche les points critiques de Φ, c'est-à-dire les points où Φ' s'annule, il arrive souvent que l'on puisse trouver des x tels que $\|\Phi'(x)\|$ soit arbitrairement petit. On ne peut pas toujours en conclure à l'existence d'un point critique (même en dimension finie : $f(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$ sur $\mathbb{R}$), mais c'est le cas sous des hypothèses convenables de compacité. Une des plus naturelles est la suivante.

Définitions. (a) On dit que Φ vérifie la condition (PS) ("Palais-Smale") si

(PS)
$$x_n \in E,\ \|\Phi'(x_n)\| \to 0 \text{ et } |\Phi(x_n)| \le c < +\infty$$
$$\Rightarrow \quad (x_n) \text{ a une sous-suite convergente (ou: reste dans un compact).}$$

La limite de la sous-suite est alors un point critique de Φ .

(b) Soit $\mathfrak{F}$ une famille de parties de E . Le minimax associé à $\mathfrak{F}$ est l'élément de $[-\infty, +\infty]$ défini par

$$c^-(\Phi, \mathfrak{F}) = \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{x \in F} \Phi(x) .$$

De même le maximin associé est

$$c^+(\Phi, \mathfrak{F}) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \inf_{x \in F} \Phi(x) = - c^-(-\Phi, \mathfrak{F}) .$$

Ces définitions permettent de donner une version très simple du résultat de base de la théorie :

Proposition. On fait les hypothèses suivantes :

(a) Φ vérifie la condition (PS).

(b) Le gradient $\nabla\Phi$ a un flot (φ_u) défini pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(E)$ est invariante par φ_u pour $u \geq 0$

(d) $c^+(\Phi, \mathfrak{F})$ est fini.

Alors $c^+(\Phi, \mathfrak{F})$ est une valeur critique de Φ .

Démonstration. Posons $c = c^+(\Phi, \mathfrak{F})$. Il suffit de prouver

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E) \quad c - \varepsilon \leq \Phi(x) \leq c + \varepsilon \text{ et } \|\nabla\Phi(x)\| \leq \varepsilon .$$

En effet, faisant $\varepsilon = 1/n$, la condition (PS) donnera une suite convergente vers un point critique de niveau c .

Supposons qu'au contraire il existe ε tel que $\|\nabla\Phi\| > \varepsilon$ sur $\Phi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Par définition de c , il existe $F \in \mathfrak{F}$ tel que $\Phi|F \geq c - \varepsilon$. Par ailleurs, on a $(d/du)(\Phi \circ \varphi_u) = \|\nabla\Phi\|^2$, donc

$$(x \in F \text{ et } \Phi \circ \varphi_u(x) \leq c + \varepsilon) \Rightarrow (d/du)(\Phi \circ \varphi_u(x)) \geq \varepsilon^2 .$$

On en déduit $\Phi|\varphi_{2/\varepsilon}(F) \geq c + \varepsilon$, contredisant la définition de c . □

Remarques. (1) Pour que (b) soit vérifiée il suffit que Φ soit de classe C^{1+Lip} et que $\|\nabla\Phi(x)\|$ ait une croissance au plus linéaire en $\|x\|$.

(2) Il y a beaucoup de variantes de la propriété (PS) : par exemple on peut demander qu'elle soit vraie seulement si $\Phi(x_n)$ converge vers c , ou si $\Phi(x_n)$ est dans un certain intervalle.

(3) Tout ce qu'on vient de dire s'étend aisément au cas d'une variété hilbertienne. En revanche, si E est un espace de Banach (ou une variété banachique), la théorie est un peu plus compliquée puisque E ne s'identifie pas à son dual. Il faut alors utiliser un champ de quasi-gradient, ou plus généralement des déformations de Lyusternik-Schnirelmann [P] [Ze].

2. SYSTEMES HAMILTONIENS. PRINCIPES VARIATIONNELS

Nous travaillons dans $\mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées $(p_1,\dots p_n,q_1,\dots q_n)$ et de la structure symplectique standard $\omega_0 = \Sigma_k\, dp_k \wedge dq_k = dp \wedge dq$. Il est commode de l'identifier à $\mathbb{C}^n$ en posant $z = p + iq$, de sorte que $\omega_0 = i/2\, dz \wedge d\bar{z}$, ou encore $\omega_0(X,Y) = (iX,Y)$ (produit scalaire euclidien). Le champ hamiltonien associé à une fonction H est alors $X = i\nabla H$, où ∇H est le gradient euclidien.

2.1. Difféotopies hamiltoniennes (cf. [Ar1], [LM], [Va], [W1])

Soit $H : t \mapsto H_t \in C^{1+Lip}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, $0 \le t \le 1$, un chemin continu. Considérons les équations de Hamilton associées $\dot{z} = X_{H_t}(z) = i\nabla H_t(z)$, soit

$$\dot{p} = -\partial H_t/\partial q \ , \ \dot{q} = \partial H_t/\partial p .$$

Si elles sont intégrables sur $[0,1]$ pour toute condition initiale, ainsi que celles associées à $-H$ (c'est le cas si $|H'_t(z)| \le a|z|+b$), les solutions définissent un chemin d'homéomorphismes (φ_t) tel que

$$(*) \qquad \varphi_0 = id \qquad \dot{\varphi}_t = X_{H_t}\circ\varphi_t .$$

On notera

$$\varphi_1 = \exp(H).$$

Si H_t est de classe C^{k+1} ($k \ge 1$), φ_t est de classe C^k et l'on a $\varphi_t{}^*\omega_0 = \omega_0$. En particulier, si H est de classe C^∞ on a un chemin dans le groupe $\mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$ des symplectomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$. On l'appelle <u>difféotopie hamiltonienne</u> associée à H.

Réciproquement, si $t \mapsto \varphi_t$ est un chemin C^1 de difféomorphismes tel que $\varphi_t{}^*\omega_0 = \omega_0$, alors $X_t = \dot{\varphi}_t\circ\varphi_t{}^{-1}$ est un champ hamiltonien : $X_t = X_{H_t}$ (ceci parce que $\mathbb{R}^{2n}$ est simplement connexe ; sur une variété symplectique quelconque, on n'aurait qu'un champ de vecteurs localement hamiltonien).

En particulier, une difféotopie symplectique, c'est-à-dire un chemin C^∞ (φ_t) dans $\mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$, est hamiltonienne : il existe $H = (H_t)$ de classe C^∞ telle qu'on ait (*). Si (φ_t) est à support compact, on peut prendre H à support compact. On dira alors que φ_1 est <u>compactement hamiltonien</u>. On notera $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ le groupe des symplectomorphismes compactement hamiltoniens.

Cas autonome. Si $H \in C^{1+Lip}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ ne dépend pas du temps et si X_H est intégrable, on obtient le <u>flot hamiltonien</u> $\varphi_t = \exp(tX_H)$.

Astuce d'Alexander. Soit $\varphi \in \mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$. La construction classique en topologie différentielle

$$\varphi_t(z) = (\varphi(z) - \varphi(0))/t + \varphi(0)\ , \quad 0 < t \le 1$$

$$\varphi_0(z) = \varphi'(0).z + \varphi(0) \qquad (\ \varphi'(0) \in Sp(\mathbb{R}^{2n})\ )$$

donne clairement une difféotopie symplectique de φ_0 à φ. Comme $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ est connexe, une deuxième difféotopie symplectique permet de joindre φ à l'identité. Donc $\mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$ est connexe, autrement dit tout élément s'écrit $\varphi = \exp(H)$ pour un certain $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\times I,\mathbb{R})$.

<u>Remarque</u>. Si φ est à support compact, on ne sait pas si H peut être pris à support compact, autrement dit si $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$. Dans le cas de $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$, la question analogue a une réponse positive pour $n \le 3$ et négative pour $n \ge 6$.

2.2. Isotopies hamiltoniennes. Extensions

Définition. Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$. Une isotopie de plongements $\varphi_t : B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est dite hamiltonienne s'il existe H_t définie sur un voisinage de $\varphi_t(B)$ telle que $\dot{\varphi}_t = X_{H_t}\circ\varphi_t$. Si B est compact, cela équivaut à demander que l'aire balayée par tout lacet de B soit nulle (cf. [Ar]) :

$$(\forall\ \gamma : S^1 \longrightarrow B\ ) \quad \iint_{S^1\times I} \Phi^*\omega_0 = 0 \ , \ \text{où } \Phi(x,t) = \varphi_t(\gamma(x)) .$$

On obtient alors H_t à une constante près par la formule

$$H_t(\varphi_t(x)) - H_t(\varphi_t(y)) = \iint_{I\times[0,t]} \Phi^*\omega_0$$

$$\Phi(x,t) = \varphi_t(\gamma(x)) \text{, où } \gamma \text{ est un chemin de } x \text{ à } y .$$

L'extension des fonctions donne l'extension des isotopies hamiltoniennes : si $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ est compact et si $\varphi_t : B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est une isotopie hamiltonienne, alors elle s'étend en une difféotopie hamiltonienne (Φ_t) à support compact.

Les deux résultats suivants nous seront utiles.

Proposition. (a) Si $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ est compact et si $\varphi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, il existe $\psi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $\psi | B = \varphi | B$ et en particulier tel que $\psi(B) = \varphi(B)$.

(b) Dans le cas où B est étoilé par rapport à un point on a la même conclusion en supposant seulement que φ est un plongement symplectique de B dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Démonstration. (a) Ceci s'obtient en combinant l'astuce d'Alexander, le fait que toute difféotopie symplectique est hamiltonienne et l'extension des isotopies hamiltoniennes.

(b) L'astuce d'Alexander est applicable à cause de la propriété d'étoilé, et elle donne une isotopie symplectique $B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de φ à l'identité. Comme B est simplement connexe, cette isotopie est hamiltonienne, donc l'extension des isotopies hamiltoniennes permet encore de conclure.

2.3. Fonctionnelle d'aire entourée

Soit $x : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un lacet, provisoirement supposé de classe C^1. On le prolonge arbitrairement en une application $F : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1 et l'on définit l'aire entourée par x comme étant

$$A(x) = \iint_{D^2} F^*\omega_0 .$$

Si λ est une primitive arbitraire de ω_0, la formule de Stokes donne $A(x) = \int_{S^1} x^*\lambda$ ce qui montre que $A(x)$ ne dépend pas du prolongement. Pour $\lambda = p.dq$, on a la formule familière $A(x) = \int_x p.dq$. Pour $\lambda = \frac{1}{2}(p.dq - q.dp)$, il vient

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}\{ (p(t), \dot{q}(t)) - (q(t), \dot{p}(t)) \}\, dt \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x(t), -i\dot{x}(t))\, dt \\ &= \tfrac{1}{2}\langle x, -i\dot{x}\rangle_0 . \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que si l'on utilise les coefficients de Fourier on a

$$A(x) = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\,|x^k|^2 .$$

Donc $H^{1/2}$ est l'espace naturel de définition de A : elle y définit une forme quadratique continue donc de classe C^∞. On peut encore écrire

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\{ -(\|x^-\|_{1/2})^2 + (\|x^+\|_{1/2})^2 \},$$

où x^+ (resp. x^-) s'obtient en ne gardant que les coefficients de Fourier avec $k > 0$ (resp. $k < 0$). On en déduit que le gradient (pour $H^{1/2}$) de A est donné par

$$\nabla A(x) = -x^- + x^+ .$$

Notons aussi les égalités

$$\begin{aligned} \langle \nabla A(x), \xi\rangle_{1/2} &= dA(x).\xi \\ &= \langle x, -i\dot{\xi}\rangle_0 = \langle -i\dot{x}, \xi\rangle_0 . \end{aligned}$$

A priori ces formules sont valables seulement si $\xi \in H^{1/2}$. Mais si $x \in H^s$ pour un $s > \frac{1}{2}$, alors on peut les étendre à $\xi \in H^{1-s}$. En particulier si $x \in H^1$ on peut prendre ξ dans H^0.

2.4. Fonctionnelle d'action. Différentiabilité

Soit $H \in C^0(\mathbb{R}^{2n}\times[0,1], \mathbb{R})$. On notera $H(z,t) = H_t(z)$. La fonctionnelle d'action associée est définie sur l'espace $H^{1/2}$ par

$$A_H(x) = \int_x p.dq - Hdt .$$

Autrement dit :

$$A_H(x) = A(x) - \mathcal{H}_H(x)$$

$$\mathcal{H}_H(x) = \int_0^1 H_t(x(t))\, dt .$$

Proposition 1. On suppose que H_t est de classe C^1 pour tout t et que l'application dérivée $z \longmapsto H_t'(z)$ est uniformément lipschitzienne : $|H_t'(z_1) - H_t'(z_2)| \le C|z_1 - z_2|$. Alors $\mathcal{H}_H$ est différentiable sur $H^{1/2}$ et l'on a

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}_H(x).\xi &= \int_0^1 H_t'(x(t)).\xi(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (\nabla H_t(x(t)), \xi(t))\, dt \end{aligned}$$

$$= \langle \nabla H_t(x), \xi \rangle_0 .$$

De plus l'application différentielle $x \mapsto d\mathcal{H}_H(x)$ est uniformément lipschitzienne.

Démonstration. Notons d'abord que l'hypothèse implique $|H(z)| \leq C|z|^2 + c(t)$ donc $\mathcal{H}_H$ est définie déjà sur H^0. Ensuite, on a

$$H_t(z+h) = H_t(z) + (\nabla H_t(z), h) + \varepsilon_t(z,h) \quad , \quad |\varepsilon_t(z,h)| \leq C|h|^2 .$$

On en déduit par intégration

$$\mathcal{H}_H(x+\xi) = \mathcal{H}_H(x) + \langle \nabla H(x), \xi \rangle_0 + \varepsilon(x,\xi)$$

$$|\varepsilon(x,\xi)| \leq C\,(\|\xi\|_0)^2 \leq C\,(\|\xi\|_{1/2})^2 ,$$

ce qui prouve que $\mathcal{H}_H$ est différentiable avec la différentielle indiquée. Comme $x \mapsto \nabla H_t(x)$ est globalement lipschitzienne de H^0 dans H^0, $x \mapsto d\mathcal{H}_H(x)$ l'est a fortiori de $H^{1/2}$ dans $H^{1/2}$. □

Proposition 2. Supposons de plus que H_t est de classe C^k ($k \geq 2$) et que $H_t^{(k)}$ est globalement lipschitzienne. Alors $\mathcal{H}_H$ est de classe C^k, et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant sous le signe somme.

En particulier, si H_t est de classe C^∞ et à support compact, alors $\mathcal{H}_H$ est de classe C^∞. De même si $H_t(z) = a|z|^2 + b$ hors d'un compact.

Démonstration. On déduit des hypothèses que $\mathcal{H}_H$ a un développement de Taylor :

$$\mathcal{H}_H(x+\xi) = \mathcal{H}_H(x) + a_1(x).\xi + \ldots + (1/k!)\, a_k(x).(\xi,..,\xi) + \varepsilon_k(x,\xi)$$

$$a_i(x).(\xi,..,\xi) = \int_0^1 H^{(i)}(x(t)).(\xi(t),..,\xi(t))\, dt$$

$$|\varepsilon_k(x,\xi)| \leq C\,(\|\xi\|_{L^{k+1}})^{k+1} .$$

Rappelons que $H^{1/2}$ est contenu dans $\bigcap_{p<+\infty} L^p$ (1.1, propriété 5). Ceci implique que le reste est majoré par $C'\,(\|\xi\|_{1/2})^{k+1}$, et aussi que $a_i(x)$ est une forme i-linéaire continue sur $H^{1/2}$, et que $x \mapsto a_i(x)$ est continue. La réciproque de la formule de Taylor [Ch] [AR] permet alors de conclure que $\mathcal{H}_H$ est de classe C^k.

2.5. Principe variationnel "à période fixée"

Proposition. Les points critiques de A_H s'identifient aux trajectoires $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, de X_{H_t} telles que $x(0) = x(1)$. Dans le cas autonome, ce sont donc les orbites fermées de période 1 de X_H.

Démonstration. D'après ce qui précède, la différentielle de A_H est donnée par

$$dA_H(x).\xi = -\int_0^1 (i\dot{x} + \nabla H_t(x)), \xi)\, dt = -\langle i\dot{x} + \nabla H_t(x), \xi \rangle_0 .$$

Donc

$$dA_H(x) = 0 \iff i\dot{x} + \nabla H(x) = 0 \iff \dot{x} = i\nabla H_t(x) = X_{H_t}(x) .$$

A priori cette dernière égalité est valable au sens des distributions. Elle implique d'abord $x \in H^1 \subset C^0(S^1, \mathbb{C}^n)$ puis $x \in C^1$. Donc elle est valable point par point, autrement dit $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire de X_{H_t}. De plus $x(0) = x(1)$ puisque x est un lacet continu.

Réciproquement, si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire de X_{H_t} telle que $x(0) = x(1)$, alors x s'identifie à un lacet Lipschitz donc $x \in H^{1/2}$, et x est clairement un point critique de A_H. □

Remarques. (a) D'habitude on énonce ce principe avec des lacets C^1 ou H^1 (cf. par exemple [W2]). Hofer et Zehnder [HZ] ont été parmi les premiers à travailler dans l'espace $H^{1/2}$, ce qui paraît le plus agréable dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(b) Il n'est pas du tout évident que A_H ait un point critique. On ne peut appliquer les méthodes usuelles de Morse-Lyusternik-Schnirelmann pour trouver des points critiques de A_H, comme dans le cas de la fonctionnelle d'énergie pour une variété riemannienne car tout point critique a un indice et un co-indice de Morse infinis. On verra dans le § 3 une façon de résoudre ce problème, dûe à Rabinowitz.

2.6. Champ caractéristique

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface de classe C^{1+Lip}. La forme ω_0 induit sur Σ une forme ω_Σ qui a en tout point un noyau de dimension 1. Ce noyau engendre le feuilletage caractéristique de Σ. Une autre façon de le définir est de considérer une équation locale $H = c$ pour Σ : le feuilletage caractéristique est alors dirigé par $X_H|\Sigma$.

Nous supposerons toujours Σ fermée. Elle borde alors un domaine compact B, donc est munie d'une orientation transverse, et $\mathcal{F}_\Sigma$ est un feuilletage orienté. Dans ce cas il existe une fonction H définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\Sigma = H^{-1}(c)$, niveau régulier.

Une caractéristique de Σ est par définition une feuille de $\mathcal{F}_\Sigma$. Nous nous intéresserons particulièrement aux caractéristiques fermées. Si $\Sigma = H^{-1}(c)$ elles correspondent aux orbites périodiques de $X_H | H^{-1}(c)$.

Remarque. Pour nous une caractéristique fermée sera toujours une sous-variété orientée de dimension 1. Notons que si $t \mapsto x(t)$ est une orbite périodique de $X_H | \Sigma$, alors $(t \mapsto x(kt))$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $(t \mapsto x(t+a))$ $(a \in \mathbb{R})$ donnent naissance à la même caractéristique fermée.

Exemple. Considérons l'ellipsoïde

$$\Sigma(r_1, \dots r_n) = \{ (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_1^n |z_j/r_j|^2 = 1 \}.$$

Les équations de Hamilton sont $\dot{z}_j = (2i/r_j^2)\, z_j$, $1 \le j \le n$ (ce qui équivaut à n oscillateurs harmoniques découplés). Les solutions sont donc de la forme

$$z_j(t) = z_j(0) \exp{(2i/r_j^2)\, t}.$$

Supposons que les rapports r_j^2/r_k^2 sont irrationnels pour $j \neq k$. Alors les caractéristiques fermées de $\Sigma(r_1, \dots r_n)$ sont en nombre exactement n : ce sont les cercles $C_j = \{0\} \times \dots \times S^1(r_j) \times \dots \times \{0\}$, intersections de Σ avec les axes de coordonnées de $\mathbb{C}^n$.

Question. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface fermée lisse. A-t-elle toujours une caractéristique fermée ?

Remarque. En fait, on ne connaît pas d'exemple où il ya moins de n caractéristiques fermées, ni même où il y en a un nombre fini différent de n.

2.7. Principe variationnel "à énergie fixée"

Proposition. Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^{1+Lip}. On suppose que c est une valeur régulière de H, de sorte que $H^{-1}(c) = \Sigma$ est une hypersurface de classe C^{1+Lip}.

Alors c est une valeur régulière de $\mathcal{H}_H$, et les caractéristiques fermées de Σ correspondent aux points critiques non constants de $A \mid \mathcal{H}_H{}^{-1}(c)$. Plus précisément :

$$x \text{ est un point critique non constant de } A \mid \mathcal{H}_H{}^{-1}(c)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\exists \lambda \neq 0) \qquad \dot{x} = \lambda X_H(x).$$

Le nombre λ est unique : c'est le multiplicateur de Lagrange.

Démonstration. Un point critique de $\mathcal{H}_H$ est un lacet tel que $\nabla H(x) = 0$, donc $H(x(t)) = \text{cste} = \mathcal{H}_H(x)$, ce qui implique que c est une valeur régulière de $\mathcal{H}_H$. Ensuite, la théorie des extréma liés dit que x est un point critique de $A \mid \mathcal{H}_H{}^{-1}(c)$ si et seulement si : $(\exists \lambda \neq 0)$ $dA(x) = \lambda d\mathcal{H}_H(x)$. Comme dans 2.5, ceci équivaut à : $\dot{x} = \lambda X_H(x)$. Enfin, le multiplicateur de Lagrange λ est non nul si et seulement si x est non constant.

2.8. Symplectomorphismes de domaines à bord

Soient $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ deux domaines compacts à bord lisse. S'ils sont symplectomorphes, leurs bords le sont aussi donc les feuilletages caractéristiques de ∂B_1 et ∂B_2 sont symplectiquement conjugués. Cette dernière propriété est très forte, elle implique en particulier que "beaucoup" de domaines compacts difféomorphes à une boules sont non symplectomorphes.

Proposition. Si de plus $H^1(B_1; \mathbb{R}) = 0$ les aires des caractéristiques fermées des bords sont les mêmes.

Démonstration. Soit φ un symplectomorphisme de B_1 sur B_2, et soit λ une primitive de ω_0 sur $\mathbb{R}^{2n}$. Si γ est une caractéristique fermée de ∂B_1, alors $A(\varphi(\gamma)) = \int_{\varphi(\gamma)} \lambda = \int_\gamma \varphi^*\lambda$. Or $\varphi^*\lambda$ est une primitive de ω_0 sur B_1 donc l'hypothèse implique que $\varphi^*\lambda - \lambda$ est exacte. On en déduit $\int_\gamma \varphi^*\lambda = \int_\gamma \lambda = A(\gamma)$, d'où le résultat.

Questions. (1) Si ∂B_1 et ∂B_2 sont symplectomorphes, en est-il de même pour B_1 et B_2 ?

(2) Supposons $\text{Int } B_1$ et $\text{Int } B_2$ symplectomorphes :

(a) En est-il de même pour B_1 et B_2 ?

(b) Les feuilletages caractéristiques de ∂B_1 et ∂B_2 sont-ils symplectiquement conjugués ?

Comme on l'a indiqué dans l'Introduction, les résultats tout récents de [FH] disent que si B_1 et B_2 sont strictement étoilés alors les aires des caractéristiques fermées des bords sont les mêmes. En revanche, tout récemment Ya. Eliashberg [El3] a annoncé une réponse négative à la question 2 (b) même dans le cas où B1 et B2 sont des domaines convexes dans $\mathbb{R}^4$.

3. CAPACITE D'UNE FONCTION

Dans cette section on cherche à associer à une fonction $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ un nombre $c(H)$ qui soit un invariant symplectique. Pour cela on considère la fonctionnelle d'action $A_H(x) = \int_x p.dq - Hdt$. On va définir $c(H)$ comme étant une valeur critique privilégiée de A_H, en d'autres termes une valeur de l'action sur une certaine orbite de période 1 de X_H.

La méthode utilisée est dûe à V. Benci et P. Rabinowitz [BR] : elle consiste à appliquer à A_H un procédé de minimax, ou plutôt de maximin sur une famille $\mathcal{F}$ d'objets de "codimension moitié". Le choix le plus simple est de prendre pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des $\gamma(S^+)$, où S^+ est la sphère unité de E^+ et γ une "déformation admissible" (cf. 3.1).

Le fait que $\mathcal{F}$ ne dépend pas de H donnera immédiatement la dépendance continue de $c(H)$ envers H pour la topologie C^0. On donnera ensuite, sous certaines hypothèses sur H, un encadrement de $c(H)$, disant en particulier qu'il est fini et positif, et on prouvera que $c(H)$ est bien une valeur critique de A_H. Enfin, on utilisera cette propriété pour montrer l'invariance symplectique de $c(H)$.

Notations. On pose $E = H^{1/2}(S^1, \mathbb{C}^n)$. La norme de E sera notée $\| \ \|_{H^{1/2}}$, $\| \ \|_{1/2}$ ou $\| \ \|_E$.

3.1. Déformations admissibles

Définition. Une application continue $\gamma : E \longrightarrow E$ est appelée <u>déformation admissible</u> si $\gamma = \gamma_1$, où (γ_u) est une homotopie telle que $\gamma_0 = id$ et

(a) $\gamma_u(E \setminus (E^- \oplus E^0)) = E \setminus (E^- \oplus E^0)$. Autrement dit : $x^+ \neq 0 \Rightarrow \gamma_u(x)^+ \neq 0$.

(b) $\gamma_u(x) = a(x,u)x^+ + b(x,u)x^0 + c(x,u)x^- + K(x,u)$, où (a,b,c,K) est continue de $E \times [0,1]$ dans $]0,+\infty[^3 \times E$ et envoie toute partie bornée dans un compact.

L'ensemble des déformations admissibles a deux propriétés essentielles. D'abord, il est stable par composition (évident). Ensuite, on a le résultat d'intersection suivant, qui est l'analogue en dimension infinie d'une propriété d'enlacement ("linking"), cf. la figure 1.

Proposition (propriété d'intersection). Soit $e \in E^+ \setminus \{0\}$. Alors :

$$(\forall \gamma \in \Gamma) \quad \gamma(S^+) \cap (E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R}_+ e) \neq \varnothing .$$

<u>Démonstration</u>. Soit (γ_u) une homotopie ayant les propriétés (i) et (ii) de la définition. Soit

$\Psi_u : B^+ \longrightarrow E^+$ l'homotopie définie par

$$\Psi_u(x) = (1/a(x,u)).\gamma_u(x)^+ \quad \text{si } x \in S^+$$

$$\Psi_u(\lambda x) = \lambda \Psi_u(x) \quad \text{si } x \in S^+ \text{ et } 0 \leq \lambda < 1 .$$

Les propriétés de (γ_u) impliquent que $\Psi_u(x) - x$ est continue sur $B^+ \times [0,1]$, à valeurs dans un compact et que $\Psi_u | S^+$ ne prend jamais la valeur 0. La théorie du degré (cf. 1.3) dit alors que $\deg(\Psi_1, 0, B^+) = \deg(id, 0, B^+) = 1$. Donc $im(\Psi_1)$ contient un voisinage de 0, et en particulier il contient un élément λe avec $\lambda > 0$. Il vient

$$\lambda e \in \mathbb{R}_+ \Psi_1(S^+) \subset \mathbb{R}_+(\gamma(S^+))^+ ,$$

donc il existe $x \in S^+$ et $\alpha > 0$ tels que $\lambda e - \alpha\gamma(x) \in E^- \oplus E^0$. On en déduit $\gamma(x) \in E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R}_+ e$, ce qui prouve la proposition. □

3.2. Définition. Soit $H \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}_+)$. La <u>capacité</u> $c(H)$ est le maximin de A_H sur la famille de parties $\gamma(S^+)$, $\gamma \in \Gamma$. Autrement dit :

$$c(H) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \ \inf_{x \in \gamma(S^+)} A_H(x) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \inf (A_H | \gamma(S^+)) .$$

Notons d'abord des conséquences immédiates de cette définition.

Propriétés. (1) (monotonie) Si $H \leq K$, alors $c(H) \geq d(K)$.

(2) (continuité) $|c(H) - d(K)| \leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |H(z) - K(z)|$.

(3) (homogénéité) Si $\lambda \neq 0$, alors $d(\lambda^2 H(z/\lambda)) = \lambda^2 d(H)$.

<u>Démonstration</u>. Les inégalités (1) et (2) résultent de

$$A_H(x) - A_K(x) = \int_0^1 \{ K(x(t)) - H(x(t)) \} \, dt .$$

Quant à l'égalité (3), elle résulte de $A_{\lambda^2 H(z/\lambda)}(x) = A_H(\lambda x)$ et du fait que $(x \longmapsto \lambda x)$ est dans Γ.

3.3. Encadrement

Proposition 1. Pour tout $H \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}_+)$ on a

$$c(H) \leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \{ \pi |z_1|^2 - H(z) \} ,$$

où $z_1 \in \mathbb{C}$ est la première projection de z.

Démonstration. On applique la proposition 3.1 avec $e \in E^1$ défini par $e(t) = (e^{2\pi i t}, 0, .., 0)$. On en déduit

$$(\forall \gamma \in \Gamma) \qquad \inf (A_H | \gamma(S^+)) \leq \sup (A_H | (E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R}e)).$$

Donc $c(H)$ est au plus égal au terme de droite. Reste à majorer ce dernier : si $x = y + \lambda e$ avec $y \in E^- \oplus E^0$, et si $x_1(t) \in \mathbb{C}$ est la première projection de $x(t)$, il vient

$$A(x) \leq A(\lambda e) = \pi \lambda^2$$

$$= \pi | \int_0^1 e^{-2\pi i t} x_1(t) dt |^2$$

$$\leq \pi \int |x_1(t)|^2 dt .$$

On en déduit

$$A_H(x) \leq \int_0^1 \{ \pi |x_1(t)|^2 - H(x(t)) \} dt$$

d'où la majoration cherchée. □

Proposition 2. Soit $H \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}_+)$ une fonction telle que

$$\operatorname{Int} H^{-1}(0) \neq \varnothing$$

$$(\exists C > 0)(\forall z) \quad |H(z)| \leq C(|z|^3 + 1)$$

Alors $c(H) > 0$.

Démonstration. Il s'agit de trouver $\gamma \in \Gamma$ tel que $A_H | \gamma(S^+)$ soit minoré par une constante > 0. Soit $z \in \mathbb{C}^n$ un point près duquel H s'annule. Comme $(x \mapsto x - z)$ est dans Γ, on peut supposer $z = 0$. L'hypothèse sur la croissance de H implique qu'on a $|H(z)| \leq C'|z|^3$ pour tout z, donc $\mathcal{H}_H(z) = O(\|x\|_{L^3})^3$. Or d'après 1.6 (propriété 5) on a $\|x\|_{L^3} \leq a\|x\|_{H^{1/2}}$ donc

$$\mathcal{H}_H(x) = O(\|x\|_E)^3 .$$

Donc si $x \in E^+$ et $\|x\|_E \to 0$, on a

$$A_H(z + x) = A(x) + O(\|x\|_E)^3 = \tfrac{1}{2}(\|x\|_E)^2 + o(\|x\|_E)^2 .$$

On peut donc prendre $\gamma(x) = z + \varepsilon x$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Définition. Une fonction $H \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}_+)$ est dite admissible si

$$\operatorname{Int} H^{-1}(0) \neq \varnothing$$

$$(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z) \qquad \pi |z|^2 - C \leq H(z) \leq C(|z|^3 + 1) .$$

Les propositions 1 et 2 impliquent immédiatement la

Proposition 3. Si H est admissible, $c(H)$ est fini et > 0.

3.4. Propriété de valeur critique

Définitions. On dit que $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ est quadratique (à l'infini) s'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $H(z) - (a|z|^2 + b)$ est à support compact. Si de plus $a \notin \pi\mathbb{Z}$ on dit qu'elle est non résonante (à l'infini).

Proposition. Si H est admissible, quadratique et non résonante, alors $c(H)$ est une valeur critique positive de A_H.

La preuve de cette proposition utilise les lemmes 1, 2 et 3 suivants.

Lemme 1. Soit H quadratique. Alors

(a) $\nabla \mathcal{H}_H$ envoie tout borné de E dans un compact de E.

(b) Le gradient ∇A_H a un flot (φ_u) défini pour tout $u \in \mathbb{R}$, tel que

$$\varphi_u(x) = e^{-u}x^- + x^0 + e^u x^+ + K(x,u),$$

où K envoie tout borné de $E \times \mathbb{R}$ dans un compact de E.

Démonstration. On a $\nabla A_H(x) = -x^- + x^+ - \nabla \mathcal{H}_H(x)$, où $\nabla \mathcal{H}_H(x) \in E$ est le gradient de $\mathcal{H}_H$. D'après 1.1, la norme H^s de $\nabla \mathcal{H}_H(x)$ vaut

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{H}_H(x)\|_s &= \sup_{\|\xi\|_{1-s}=1} \langle \nabla \mathcal{H}_H(x), \xi \rangle_{1/2} \\ &= \sup_{\|\xi\|_{1-s}=1} \langle \nabla H(x), \xi \rangle_0 \\ &= \|\nabla H(x)\|_{s-1}. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\|\nabla \mathcal{H}_H(x)\|_1 = \|\nabla H(x)\|_0$, d'où

$$\|\nabla \mathcal{H}_H(x)\|_1 \leq C(\|x\|_0 + 1).$$

Donc $\nabla \mathcal{H}_H$ envoie tout borné de H^0 dans un borné de H^1, ce qui implique le (a) d'après 1.1 (propriété 2).

Ensuite, appliquant la méthode de variation des constantes à l'équation $(d/du)\varphi_u(x) = \nabla A_H(\varphi_u(x))$, il vient

$$\varphi_u(x) = A(u)\, y(u), \quad A(u)\, x = e^{-u}x^- + x^0 + e^u x^+$$

$$y(0) = x, \quad dy/du = -A(-u)\, \nabla \mathcal{H}_H(A(u))\, y(u)).$$

La majoration de $\|\nabla \mathcal{H}_H(x)\|_1$ implique $\|dy/du\|_0 \leq \|dy/du\|_1 \leq Ce^u(\|y(u)\|_0 + 1)$. Par le lemme de Gronwall, on en déduit $\|y(u)\|_0 \leq f(u)\,(\|x\|_0 + 1)$, d'où une majoration analogue pour $\|dy/du\|_1$. Par intégration, il vient

$$\|y(u) - x\|_1 \leq g(u)\,(\|x\|_0 + 1).$$

Par la compacité de l'inclusion $H^1 \subset H^{1/2} = E$, on a donc $y(u) = x + K_1(x,u)$, où K_1 envoie les bornés de E dans des compacts de E. En posant $K(x,u) = A(u)\, K_1(x,u)$, on en déduit le lemme. □

Lemme 2. Si H est quadratique et non résonante, alors A_H vérifie (PS).

Démonstration. Soit $(x_p \in E)$ une suite telle que $\nabla A_H(x_p) \longrightarrow 0$. On va montrer que (x_p) reste dans un compact (sans même avoir besoin d'exiger que $A_H(x_p)$ soit borné).

Notons d'abord que, comme dans le lemme 1, on a

$$\|\nabla A_H(x)\|_{1/2} = \|i\dot{x} + \nabla H(x)\|_{-1/2},$$

De plus, par hypothèse il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que $\nabla H(z) - 2az$ est à support compact. On en déduit

$$\begin{aligned} \|i\dot{x}_p + 2ax_p\|_{-1/2} &\leq \|i\dot{x}_p + \nabla H(x_p)\|_{-1/2} + \|\nabla H(x_p) - 2ax_p\|_{-1/2} \\ &\leq o(1) + O(1). \end{aligned}$$

Donc $\|i\dot{x}_p + 2ax_p\|_{-1/2}$ est borné, ce qui implique que le coefficient constant $x_p{}^0$ est borné.

Ensuite, le fait que $a \notin \pi\mathbb{Z}$ implique que $(x \mapsto i\dot{x} + 2ax)$ est un isomorphisme de E sur $H^{-1/2}$, donc $(\|i\dot{x} + 2ax\|_{-1/2}) \sim \|x\|_{1/2}$. Donc $\|x_p\|_{1/2}$ est borné, et la propriété (*) implique que $\nabla \mathcal{H}_H(x_p)$ reste dans un compact. Or $\nabla A_H(x_p) = -x_p{}^- + x_p{}^+ - \nabla \mathcal{H}_H(x_p) \longrightarrow 0$, donc $x_p{}^+$ et $x_p{}^-$ restent aussi dans un compact, ce qui achève la preuve de (b). □

Remarque. Si $a = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, on peut montrer que la propriété (PS) est encore vérifiée sur $\mathbb{R} \setminus \{-b\}$, c'est-à-dire si l'on exclut la valeur critique associée aux "grandes" solutions de $\nabla A_H = 0$.

Lemme 3. On suppose H admissible et quadratique. Alors :

(a) $c(H) = c^+(A_H, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F} = \{\gamma(S^+) \mid \gamma \in \Gamma,\ \inf(A_H|\gamma(S^+)) > 0\}$.

(b) $\mathcal{F}$ est positivement invariant par le flot (φ_u) de ∇A_H.

Démonstration. (a) résulte de ce que $c(H) > 0$. Pour prouver (b), considérons $F \in \mathcal{F}$, soit $F = \gamma(S^+)$, où $\gamma \in \Gamma$ et $\inf(A_H|\gamma(S^+)) = \alpha > 0$. Utilisant les notations de la preuve du lemme 1, on définit un champ de vecteurs v sur E :

$$v(x) = -x^- + x^+ - \rho(A_H(x))\,\nabla\mathcal{H}_H(x)\ ,$$

où $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ vérifie $\rho(s) = 0$ si $s \le 0$ et $\rho(s) = 1$ si $s \ge \alpha$.

Soit (γ_u) le flot de v . Il a évidemment les propriétés données par le lemme 1 pour (φ_u). De plus, comme $A_H | E^- \oplus E^0 \le 0$, on a $v | E^- \oplus E^0 = -x^-$. On en déduit $\gamma_u(E^- \oplus E^0) = E^- \oplus E^0$, ce qui implique $\gamma_u(E \setminus (E^- \oplus E^0)) = E \setminus (E^- \oplus E^0)$ puisque γ_u est un homéomorphisme. Donc $\gamma_u \in \Gamma$ pour tout u . Enfin, soit $u \ge 0$. On a $\gamma_u | A_H^{-1}([\alpha, +\infty[) = \varphi_u$, d'où

$$\varphi_u(F) = \varphi_u(\gamma(S^+)) = \gamma_u(\gamma(S^+))\ .$$

Comme Γ est stable par composition, ceci prouve (b). □

Preuve de la proposition. D'après la proposition 3 de 3.2, $c(H)$ est fini et positif. De plus, A_H vérifie (PS) (lemme 1), ∇A_H a un flot défini pour tout u (lemme 2), et $c(H)$ est un maximin sur une famille de parties positivement invariante par le flot (lemme 3). La proposition 1.3 s'applique, donc $c(H)$ est une valeur critique de A_H . □

Cette proposition est l'un des principaux outils pour le calcul effectif de $c(H)$. Puisqu'un point critique de A_H est une orbite de période 1 de X_H , on peut l'utiliser si l'on sait résoudre les équations de Hamilton associées à X_H , par exemple si H ne dépend que du rayon :

Corollaire. Si de plus $H(z) = f(|z|^2)$, alors il existe $s > 0$ tel que

$$c(H) = sf'(s) - f(s)$$

$$f'(s) \in \pi\mathbb{N}^*\ .$$

<u>Démonstration</u>. Les équations de Hamilton s'écrivent $\dot{x} = 2i f'(|x|^2)\,x$. Donc la trajectoire de $z \in \mathbb{R}^{2n}$ est tracée sur la sphère $S^{2n-1}(|z|)$, et elle s'écrit

$$x(t) = x(0)\exp(2if'(s)\,t)\ ,\ s = |x(0)|^2\ .$$

Elle décrit un cercle de centre 0 et fait $(|f'(s)|/\pi)$ tours par unité de temps. La condition pour qu'elle se referme au temps 1 est donc $(f'(s) \in \pi\mathbb{Z})$. La valeur critique associée est alors

$sf'(s) - f(s)$. Comme elle doit être positive et que $f(s) \ge 0$, on a $f'(s) \in \pi\mathbb{N}^*$.

3.5. Invariance symplectique

L'invariance symplectique de $c(H)$ serait immédiate si le semi-groupe Γ des déformations admissibles contenait φ^* pour tout $\varphi \in Symp(\mathbb{R}^{2n})$, où $\varphi^*(x) = x \circ \varphi$. Mais ce n'est pas le cas, et il n'est pas évident de donner une autre définition de façon à conserver la propriété d'intersection 3.1. Il faut donc passer par un chemin détourné, qui utilise le fait que $c(H)$ est une valeur critique de A_H .

Lemme. Soit H quadratique. L'ensemble $V(H) \subset \mathbb{R}$ des valeurs critiques de A_H est d'intérieur vide.

<u>Démonstration</u>. Nous allons voir que $V(H)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Le lemme résultera alors du théorème de Sard.

Soient $(\alpha_t) = (\exp(tX_H))$ et $F = \mathrm{Fix}(\alpha_1)$. Alors

$$x \in crit(A_H) \iff x(0) \in F \text{ et } (\forall\, t)\ \ x(t) = \alpha_t(x(0))\ .$$

Définissons $\beta : S^1 \times F \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ par $\beta(t,z) = \alpha_t(z)$. Alors β est localement la restriction d'une application C^∞ . Par partition de l'unité, ceci implique que β s'étend à $\bar{\beta} \in C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$. Alors $\psi(z)(t) = \bar{\beta}(t,z)$ définit une application $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E)$ telle que $crit(A_H) \subset im(\psi)$. Donc $V(H)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de $A_H \circ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$.

Nous pouvons maintenant prouver l'invariance symplectique.

Proposition. Soit φ un symplectomorphisme compactement hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit H admissible, quadratique et non résonante. Alors $c(H \circ \varphi) = c(H)$.

<u>Démonstration</u>. Soit (φ_s) une difféotopie symplectique à support compact telle que $\varphi = \varphi_1$. Pour tout s , $H \circ \varphi_s$ a les mêmes propriétés que H , donc $c(H \circ \varphi_s)$ est une valeur critique de $A_{H \circ \varphi_s}$ par la proposition 3.4. Or $A_H \circ \varphi_s{}^* = A$ puisque φ_s est symplectique, d'où $A_{H \circ \varphi_s} = A_H \circ \varphi_s{}^*$. Cela implique que $A_{H \circ \varphi_s}$ a les mêmes valeurs critiques que A_H, donc l'application $s \longmapsto c(H \circ \varphi_s)$ est à valeurs dans $V(H)$. Comme elle est continue d'après la proposition 3.2, le lemme implique qu'elle est constante, d'où le résultat.

4. CAPACITE D'UN ENSEMBLE

4.1. Définition et premières propriétés

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$ l'espace des fonctions $H \geq 0$, continues sur $\mathbb{R}^{2n}$, à croissance au plus quadratique. Si $B \subset \mathbb{R}^{2n}$, on note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ le sous-espace des fonctions qui s'annulent près de $\bar{B}$. La capacité $c(B)$ est définie par

$$c(B) = \inf_{H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},B)} c(H) \in [0, +\infty[\qquad \text{si } B \text{ est borné.}$$

$$c(B) = \sup_{B' \text{ borné} \subset B} c(B') \in [0, +\infty] \qquad \text{si } B \text{ n'est pas borné.}$$

Remarques. (1) Il résulte immédiatement de cette définition qu'on a $c(B) = c(\bar{B})$.

(2) Rappelons que si $H \leq K$ on a $c(H) \geq c(K)$. Donc on peut remplacer $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ par un sous-ensemble "cofinal". On utilisera surtout le sous-ensemble

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n}, B) = \{ H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B) \mid H \text{ est quadratique et non résonante} \}.$$

(3) Si $H|B = 0$ on peut approcher H par des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$, donc la capacité ne change pas si l'on prend l'inf sur toutes les fonctions nulles sur B.

Les propriétés suivantes de $c(B)$ résultent aisément de la définition.

Proposition. Soient $B \subset B' \subset \mathbb{R}^{2n}$, et $\lambda > 0$. Alors :

(i) (monotonie) $c(B) \leq c(B')$.

(ii) (homogénéité) $c(\lambda B) = \lambda^2 c(B)$.

(iii) (régularité extérieure) B compact $\Rightarrow$

$$c(B) = \inf_{\varepsilon > 0} c(U_\varepsilon(B)) \qquad U_\varepsilon(B) = \varepsilon\text{-voisinage de } B.$$

Démonstration. Pour toutes ces propriétés on peut supposer B et B' bornés. Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ contient $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B')$ donc (i) est clair puisque l'inf est prise sur plus d'éléments. La propriété (ii)

est une conséquence immédiate de la proposition 3.2,(iii). La propriété (iii) résulte de la remarque (3) ci-dessus.

4.2. Invariance symplectique

Théorème. Pour tous $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ et $\varphi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, on a

$$c(\varphi(B)) = c(B).$$

Démonstration. On peut supposer B borné. Alors la proposition 2.2.(a) fournit $\psi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $\psi(B) = \varphi(B)$, d'où

$$c(\varphi(B)) = c(\psi(B)) = \inf \{ c(H) \mid H \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n}, \varphi(B)) \}$$

$$= \inf \{ c(H \circ \psi^{-1}) \mid H \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n}, B) \}.$$

Or $c(H \circ \psi^{-1}) = c(H)$ par la proposition 3.5, d'où $c(\varphi(B)) = c(B)$.

Remarque. On peut se demander si une propriété plus forte n'a pas lieu, à savoir l'égalité $c(\varphi(B)) = c(B)$ dès que φ est un symplectomorphisme défini sur un voisinage de B (ou de $\bar{B}$), comme c'est le cas pour le width de Gromov [G3]. En général il n'en est rien (voir 4.4), mais on a :

Corollaire. Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ étoilé par rapport à un point (par exemple B convexe). Alors si $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est un plongement symplectique, on a $c(\varphi(B)) = c(B)$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.2.(b) si B est compact. En général, on utilise la régularité intérieure (conséquence immédiate de l'homogénéité et de la monotonie, après avoir translaté B pour le rendre étoilé par rapport à 0) :

$$B \text{ étoilé} \Rightarrow c(B) = \sup_{K \text{ compact} \subset B} c(K).$$

4.3. Capacité de la boule et du cylindre

Jusqu'ici, toutes les propriétés de $c(B)$ que nous avons vues sont aussi valables pour $c'(B) =$

$\mathrm{cste}.(\mathrm{vol}(\bar{B}))^{1/n}$. La propriété capitale suivante montre que $c(B)$ est en fait un invariant de nature très différente du volume.

Théorème. Pour tout $r \geq 0$ on a

$$c(B^{2n}(r)) = \pi r^2 = c(B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}) .$$

Démonstration. Par l'homogénéité et la monotonie il suffit de considérer le cas $r = 1$ et de montrer $c(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}) \leq \pi \leq c(B^{2n}(1))$.

(1) Majoration $c(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}) \leq \pi$. Il s'agit de montrer que pour tout compact $B \subset B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ on a $c(B) \leq \pi$. Or on a $\pi(|z_1|^2-1) < 0$ sur B , donc il existe $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},B)$ telle que $H(z) \geq \pi(|z_1|^2-1)$ sur $\mathbb{C}^n$. On en déduit

$$\begin{aligned} c(B) &\leq c(H) \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\pi|z_1|^2 - H(z)) \qquad \text{(proposition 1 de 3.3)} \\ &\leq \pi . \end{aligned}$$

(2 Minoration $c(B^{2n}(1)) \geq \pi$. Il s'agit de voir que si $H \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n},B^{2n}(1))$ on a $c(H) \geq \pi$. Comme $c(H)$ est une fonction décroissante de H , il suffit de trouver une fonction $K \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n},B^{2n}(1))$ qui soit $\geq H$ et telle que $c(K) \geq \pi$. Pour cela, on prend K de la forme $K(z) = f(|z|^2)$, où

$$f(s) = 0 \text{ sur } [0,1]$$

$$f'|[1,S] \text{ croît de } 0 \text{ à } a \in]0,+\infty[\setminus \pi\mathbb{Z}$$

$$f'|[S,+\infty[\equiv a .$$

Ces conditions sont évidemment compatibles avec l'inégalité $K \geq H$.

D'après le corollaire 3.4, il existe s_0 tel que $c(K) = s_0 f'(s_0) - f(s_0)$ et $f'(s_0) \in \pi\mathbb{N}^*$. De plus pour $s \geq 1$ on a $f''(s) \geq 0$, d'où $sf'(s) - f(s) \geq f'(s)$. Il en résulte $c(K) \geq f'(s_0) \geq \pi$, ce qui achève la preuve du théorème. □

4.4. Autres propriétés

Proposition. La capacité de la sphère $S^{2n-1}(r)$ est égale à celle de la boule :

$$c(S^{2n-1}(r)) = \pi r^2 .$$

Démonstration. Il suffit de minorer $c(S^{2n-1}(1)) \geq \pi$. La preuve est presque la même que pour $B^{2n}(1))$, la seule différence étant que la condition ($f(s) = 0$ sur $[0,1]$) est remplacée par

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(s) \leq 0 \text{ sur } [0,1] .$$

C'est clairement compatible avec l'inégalité $K \geq H$. Par exemple on peut imposer $f(s) = 0$ si $s \leq \varepsilon$ (cf. figure 2).

Corollaire. La capacité de l'anneau $A(a,b) = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid a < |z| < b \}$ est $c(A(a,b)) = \pi b^2$.

Donc si $b^2 - a^2 = b'^2 - a'^2$ mais $b \neq b'$, $A(a,b)$ et $A(a',b')$ ont des capacités différentes bien qu'ils soient (abstraitement) symplectomorphes. En revanche, pour $n \geq 2$ un argument de volume dû à D. McDuff [McD] montre que si $C(a,b) = \{ z \in \mathbb{R}^{2n} \mid a < |z| < b \}$, alors $C(a,b)$ et $C(a,b)$ sont symplectomorphes si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. En fait, si C(a,b) admet un plongement symplectique de degré 1 dans C(a',b') , alors $a \geq a'$.

Question. La capacité d'un domaine compact est-elle égale à celle de son bord (s'il est suffisamment régulier)? On verra que c'est le cas si ce bord est connexe et de type contact (§ 7).

5. RIGIDITE SYMPLECTIQUE

5.1. Plongement d'une boule dans un cylindre

On considère la décomposition standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0) = (\mathbb{R}^2,\omega_0) \times (\mathbb{R}^{2n-2},\omega_0)$.

Théorème ([G2]). S'il existe un plongement symplectique $\varphi : B^{2n}(r) \longrightarrow B^2(s) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, alors $r \le s$.

Démonstration. Puisque $B^{2n}(r)$ est convexe, le corollaire 4.2 donne $c(\varphi(B^{2n}(r))) = c(B^{2n}(r))$, donc le théorème 4.3 implique $c(\varphi(B^{2n}(r))) = \pi r^2$. Comme $\varphi(B^{2n}(r)) \subset B^2(s) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, la monotonie donne $\pi r^2 \le \pi s^2$, d'où le résultat.

Corollaire. Les produits de deux disques $B^2(r_1) \times B^2(r_2)$, $r_1 \le r_2$, sont tous symplectiquement distincts.

Démonstration. Supposons $B^2(r_1) \times B^2(r_2)$ et $B^2(s_1) \times B^2(s_2)$ symplectomorphes, avec $r_1 \le r_2$ et $s_1 \le s_2$. Alors la boule $B^4(r_1)$ se plonge symplectiquement dans $B^2(r_1) \times B^2(r_2)$ donc dans $B^2(s_1) \times B^2(s_2)$, et le théorème implique $r_1 \le s_1$. Symétriquement, on a $s_1 \le r_1$ d'où $r_1 = s_1$. De plus l'égalité des volumes donne $r_1 r_2 = s_1 s_2$, d'où $r_2 = s_2$.

Remarques et questions. On suppose $n \ge 3$.

(1) La même preuve montre que les produits $B^2(r_1) \times B^{2n-2}(r_2)$, $r_1 \le r_2$, sonts tous symplectiquement distincts. En revanche, elle ne permet pas de distinguer par exemple $B^2(1) \times B^4(2)$ et $B^2(4) \times B^4(1)$ (mais les capacités d'ordre supérieur permettent de le faire, cf. l'Introduction).

(2) A. Floer et H. Hofer [FH] viennent d'annoncer que les produits de n disques : $B^2(r_1) \times B^2(r_2) \times \ldots \times B^2(r_n)$, $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$, sont tous symplectiquement distincts.

5.2. C^0-rigidité

Théorème ([El2], [EH2]).

(i) Soit $\varphi_k : B^{2n}(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une suite de plongements symplectiques convergeant uniformément vers une application continue φ. On suppose que φ est différentiable en 0. Alors

$\varphi'(0)$ est symplectique.

(ii) Soit (V,ω) une variété symplectique. Alors le groupe $\mathrm{Symp}(V,\omega)$ est fermé dans $\mathrm{Diff}(V)$ pour la topologie C^0.

Démonstration. Nous suivons [El2].

(ii) résulte aisément de (i) et du lemme de Darboux puisque le fait d'être symplectique est une propriété locale. Reste à prouver (i). On voit d'abord qu'il suffit de prouver $\varphi'(0)^*\omega_0 = \lambda\omega_0$. En effet, en considérant $\varphi_k \times \mathrm{id}$ on aura nécessairement $\lambda = 1$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $\varphi'(0)^*\omega_0$ n'est pas un multiple de ω_0.

Lemme. Soit $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$ une application linéaire telle que $A^*\omega_0$ n'est pas un multiple de ω_0. Alors il existe des bases symplectiques $(e_1,f_1,\ldots)$ et $(e'_1,f'_1,\ldots)$ telles que la matrice de A soit de la forme

$$\begin{matrix} \frac14 & 0 & 0 \\ 0 & \frac14 & 0 \\ * & * & * \end{matrix} \quad .$$

Démonstration. Soit B la transposée symplectique de A, et $\omega = B^*\omega_0$. Alors ω_0 n'est pas un multiple de ω, donc l'antisymétrie de ω implique l'existence de x tel que la forme linéaire $\omega(x,.)$ n'est pas un multiple de $\omega_0(x,.)$. Donc $(\omega_0(x,.),\omega(x,.)) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est surjectif, et en particulier il existe y tel que $\omega_0(x,y) = 1$ et $\omega(x,y) = 1/16$. Comme $\omega(x,y) = \omega_0(Bx,By)$, on en déduit l'existence de bases symplectiques $(e_1,f_1,\ldots)$ et $(e'_1,f'_1,\ldots)$ telles que

$$e_1 = x \ , \ f_1 = y \ , \ \tfrac14 e'_1 = Bx \ , \ \tfrac14 f'_1 = By \ .$$

Dans ces bases on a $Be_1 = \frac14 e'_1$, $Bf_1 = \frac14 f'_1$: cela équivaut à dire que la matrice de A dans les bases $(e'_1,f_1',\ldots)$ et $(e_1,f_1,\ldots)$ a la forme annoncée.

Fin de la preuve du théorème. D'après le lemme, on peut supposer que la matrice de $\varphi'(0)$ a la forme (*) dans la base standard, donc que $\varphi'(0)\,(B^{2n}(1)) \subset B^2(\frac14) \times \mathbb{R}^{2n-2}$. D'après la définition de la différentielle, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(B^{2n}(\varepsilon)) \subset B^2(\frac13\varepsilon) \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Soit s tel que $r < s < 1$. Puisque φ est la limite uniforme des φ_k, on a pour k assez grand

$$\varphi_k(B^{2n}(\varepsilon)) \subset B^2(\tfrac{1}{2}\varepsilon) \times \mathbb{R}^{2n-2} ,$$

ce qui contredit le théorème 5.1. □

Remarque. Ce théorème a une longue histoire : l'énoncé (ii) est dans [El 1], mais la preuve complète n'a jamais paru. Le cas particulier $(V,\omega) = (T^{2n},\omega_0)$ fut démontré par M. Herman (non publié) en utilisant le théorème des points fixes de Conley-Zehnder [CZ] et la simplicité de $\mathrm{Diff}\,(T^{2n},\omega_0)$ dûe à A. Banyaga [Ba]. Enfin le cas général de (ii) a été prouvé par [G 2], à partir du théorème 5.1 et par une technique à la Nash-Moser. La preuve élémentaire (à partir du théorème 5.1) donnée ci-dessus a été trouvée par [El2], et retrouvée par Ekeland et Hofer.

5.3. Homéomorphismes symplectiques

Définitions. Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$, et φ un homéomorphisme de U sur U'. On dit que φ préserve la capacité si $c(\varphi(B)) = c(B)$ pour tout $B \subset U$. On dit que φ préserve localement la capacité si tout point de U a un voisinage V tel que $\varphi|V$ préserve la capacité.

Il est clair que tout symplectomorphisme préserve la capacité. Réciproquement, on a la

Proposition. Un difféomorphisme qui préserve localement la capacité est symplectique ou antisymplectique. Plus précisément, si un homéomorphisme qui préserve localement la capacité a une différentielle en un point, celle-ci est symplectique ou antisymplectique.

Démonstration. Elle résultera immédiatement du lemme suivant.

Lemme. Si $\varphi : B^{2n}(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est une application continue qui préserve la capacité des ellipsoïdes centrés en 0 et si φ est différentiable en 0, alors $\varphi'(0)$ est symplectique ou antisymplectique.

Preuve du lemme. Posons $A = \varphi'(0)$. Supposons d'abord que $A^*\omega_0$ n'est pas un multiple de ω_0. Alors le lemme 5.2 s'applique, et comme dans la preuve du théorème 5.2 on en déduit qu'il existe un petit ellipsoïde E centré en 0 tel que $c(f(E)) < c(E)$, contredisant l'hypothèse. On est donc ramené au cas où $A^*\omega_0$ est un multiple de ω_0.

L'hypothèse sur φ est préservée si on la compose par une application linéaire symplectique ou anti-symplectique, donc on peut supposer $A = \alpha \mathrm{Id}$. Si $|\alpha| < 1$ on a la même contradiction que plus haut. Si $|\alpha| > 1$, la définition de la différentielle et un argument de degré donnent un $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(B^{2n}(\varepsilon)) \supset B^{2n}(r\varepsilon)$ avec $r > 1$, ce qui donne encore une contradiction. Donc $|\alpha|$

$= 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Si n est impair, un difféomorphisme préservant localement la capacité est symplectique s'il préserve aussi l'orientation. Pour n quelconque, il suffit que $\varphi \times \mathrm{id}$ aussi préserve localement la capacité.

Question. Pour n pair, peut-on trouver une caractérisation plus agréable ?

Une autre propriété intéressante est la suivante.

Propriété. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. Le sous-groupe des homéomorphismes de U préservant la capacité est fermé pour la topologie C^0 de $\mathrm{Homéo}\,(U)$.

Démonstration. Soit (φ_k) une suite de tels homéomorphismes qui converge vers un homéomorphisme φ pour cette topologie : cela veut dire que φ_k (resp. φ_k^{-1}) converge uniformément sur tout compact vers φ (resp. φ^{-1}).

Soit $B \subset U$, il suffit de montrer $c(\varphi(B)) \geq c(B)$ puisqu'en considérant ensuite φ^{-1} on en déduira $c(\varphi(B)) = c(B)$. On peut supposer B compact, alors pour ε fixé on a $U_\varepsilon(\varphi(B)) \supset \varphi_k(B)$ pour k assez grand. Donc $c(U_\varepsilon(B)) \geq c(\varphi_k(B)) = c(B)$, d'où le résultat cherché puisque $c(\varphi(B)) = \inf_{\varepsilon > 0} c(U_\varepsilon \varphi((B)))$ d'après 4.1.

Les homéomorphismes préservant (localement) la capacité sont assez mystérieux, sauf en dimension deux où cela équivaut à préserver l'aire (8.3). En particulier, on ignore la réponse aux questions suivantes, ce qui veut dire qu'on n'a pas encore une bonne notion d'homéomorphisme symplectique :

- Un homéomorphisme qui préserve localement la capacité la préserve-t-il globalement ? Préserve-t-il le volume ? Préserve-t-il les capacités supérieures ?
- Si une application continue préserve (localement) la capacité, est-ce un homéomorphisme sur son image ? Une limite uniforme sur tout compact de telles applications préserve-t-elle encore (localement) la capacité ? Notons que le raisonnement du lemme ci-dessus dit seulement que la limite ne diminue pas la capacité.
- S'il existe un homéomorphisme entre U et U' préservant (localement) la capacité, cela entraîne-t-il que U et U' sont symplectomorphes ou antisymplectomorphes ?

6. DOMAINES CONVEXES

6.1. Rappels d'analyse convexe (cf. [Ro])

Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ un domaine compact convexe contenant 0 dans son intérieur. On note $\Sigma = \partial B$ son bord. La jauge quadratique de Σ est la fonction $h : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positivement homogène de degré 2 telle que Σ soit définie par $(\ h(z) = 1\ )$. C'est une fonction convexe, et l'on peut définir sa duale de Fenchel par

$$h^*(u) = \max_{z \in \mathbb{R}^{2n}} ((z,u) - h(z)).$$

Elle aussi est convexe et positivement homogène de degré 2, et l'on a $h^{**} = h$. Elle est reliée à la fonctionnelle d'appui $\mathit{f}(u) = \max_{z \in \Sigma} (z,u)$ par $h^* = \mathit{f}^2/4$.

Supposons de plus que Σ est de classe C^1 et strictement convexe. Il en est alors de même de h et de h^*, et l'on a les propriétés suivantes :

(1) L'application gradient $z \mapsto \nabla h(z)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ et son inverse est ∇h^*.

(2) h^* est la transformée de Legendre de h, c'est-à-dire qu'on a $h^*(u) = (z,u) - h(z)$, où $z = \nabla h^{-1}(u) = \nabla h^*(u)$. De plus on a alors $u = \nabla h(z)$, et l'homogénéité de degré 2 donne $h(z) = g(u) = \frac{1}{2}(z,u)$.

(3) De l'encadrement $a|z|^2 \le h(z) \le b|z|^2$ on déduit $(4b)^{-1}|u|^2 \le h^*(u) \le (4a)^{-1}|u|^2$.

(4) Si Σ est de classe C^{1+Lip}, h et h^* sont de classe C^{1+Lip} sur $\mathbb{R}^{2n}$, la constante de Lipschitz étant uniforme. Si Σ est de classe C^k, h et h^* sont de classe C^k sur $\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$.

On notera $X_\Sigma = X_h = i\nabla h$ le champ hamiltonien associé.

6.2. Principe d'action duale [Cl]

Soit $H^1{}_0 \subset H^1(S^1,\mathbb{C}^n)$ le sous-espace des lacets à moyenne nulle ($w^0 = 0$). Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une hypersurface convexe et entourant 0, on définit la fonctionnelle

$$\mathcal{g}(w) = \int_0^1 h^*(-i\dot{w}(t))\, dt .$$

Propriétés. (1) $\mathcal{g}$ est de classe C^1 et

$$\mathcal{g}'(w).\xi = \langle \nabla h^*(-i\dot{w}), -i\dot{\xi}\rangle_0 .$$

(2) Tout nombre positif est une valeur régulière de $\mathcal{g}$. En particulier $\mathcal{g}^{-1}(1)$ est une sous-variété de classe C^1 de $H^1{}_0$.

Théorème (principe d'action duale). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface de classe C^2 et strictement convexe et entourant 0. Il y a une bijection entre

(a) les couples (z,λ) où $z \in C^1(\mathbb{R},\Sigma)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et

$$\dot{z} = X_\Sigma(z)$$

$$z(0) = z(\lambda)$$

(b) les points critiques w de $A|\mathcal{g}^{-1}(1)$.

Cette bijection est donnée par : $w(t) = (z(\lambda t) - z^0)/\lambda$.

Démonstration. Soit w un point critique de $A|\mathcal{g}^{-1}(1)$. Par la théorie d'extréma liés, il existe μ (multiplicateur de Lagrange) tel que $A'(w) = \mu\mathcal{g}'(w)$, et $\mu \ne 0$ puisque w n'est pas constant. Comme $A'(w).\xi = \langle w, -i\dot{\xi}\rangle_0$, il vient

$$A'(w) - \mu\nabla W = 0 \Leftrightarrow \langle w - \mu \nabla h^*(-i\dot{w}), -i\dot{\xi}\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in H^1{}_0$$

$$\Leftrightarrow \quad w - \mu\nabla h^*(-i\dot{w}) = cste$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla h^*(-i\dot{w}) = \lambda w + cste = \lambda w + z^0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{w} = i\nabla h(\lambda w + z^0) \quad \text{puisque } \nabla h^* = \nabla h^{-1}.$$

Notons $\lambda = \mu^{-1}$, et posons $z(t) = z^0 + \lambda w(t/\lambda)$, ou ce qui revient au même $z(\lambda t) = \nabla h^*(-i\dot{w}(t))$. Il vient $\dot{z} = i\nabla h(z) = X_\Sigma(z)$, $z(0) = z(\lambda)$. On a donc $h \circ z = cste$, et cette constante vaut

$$h(z(\lambda t)) = h(\nabla h^*(-i\dot{w}(t))) = g(-i\dot{w}(t)) = \mathcal{g}(w(t)) = 1 .$$

Il en résulte que (z,λ) est dans l'ensemble (a), et par définition on a $w(t) = (z(\lambda t) - z^0)/\lambda$.

Réciproquement, si (z,λ) est dans l'ensemble (a), alors en faisant à l'envers les constructions précédentes on voit que w défini par $w(t) = (z(\lambda t) - z^0)/\lambda$ est dans (b). □

6.3. Egalité action-période

On conserve les notations du § précédent.

Proposition. Soit $T > 0$. Si $z : [0,T] \longrightarrow \Sigma$ est une trajectoire de X_Σ telle que $z(0) = z(T)$, on a

$$A(z) = T = A(w)^{-1}.$$

En particulier l'ensemble $A(\Sigma)$ des périodes des caractéristiques fermées (Σ) est égal à l'ensemble des inverses des valeurs critiques positives de $A \,|\, \mathcal{G}^{-1}(1)$. En particulier

$$\min A(\Sigma) = (\max A \,|\, \mathcal{G}^{-1}(1))^{-1}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$A(z)\,) = \int_0^T \tfrac{1}{2}\langle z, -i\,\dot z\rangle\, dt$$

$$= \int_0^T \tfrac{1}{2}\,\langle z, \nabla h(z)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^T h(z)\, dt = T\ ,$$

et le fait que $w(t) = (z(\lambda t) - z^0)/\lambda$ implique $A(w) = \lambda^{-1}$. □

Remarque. Notons que $A(\Sigma)$ est donc formé de nombres positifs. Ceci peut être précisé : on a $(z, -i\,\dot z) = (z, \nabla h(z)) > 0$ sur toute trajectoire (fermée ou non) de X_h. Nous verrons une généralisation de ceci dans le § 7.

6.4. Existence d'une caractéristique fermée

Théorème. Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une hypersurface de classe $C^{1+\mathrm{Lip}}$ compacte et convexe, elle admet une caractéristique fermée. Autrement dit, l'ensemble $A(\Sigma)$ est non vide. De plus, il a un élément minimal.

Démonstration. On peut supposer que Σ entoure 0.

(1) Traitons d'abord le cas où Σ est strictement convexe. D'après le principe d'action duale, il suffit

pour montrer tout à la fois de voir que la fonction $A \,|\, G^{-1}(1)$ atteint sa borne supérieure. Puisque A et G sont homogènes de degré 2 et que $A \,|\, G^{-1}(1)$ prend au moins une valeur positive, on a $\sup\ A \,|\, G^{-1}(1) = \sup\ A \,|\, G^{-1}([0,1])$, donc il suffit de montrer que cette dernière est atteinte.

Ce dernier résultat est une variante du théorème classique de Tonnelli en calcul des variations. Esquissons-en la preuve :

Soit $(w_n \in G^{-1}([0,1])\,)$ une suite maximisante pour A. Comme $G(w) \geq C \,\|\, \dot w \,\|_0{}^2$, on a $\|\, w_n \,\|_1 \leq \mathrm{cste}$, et d'après la compacité de l'inclusion de H^1 dans $H^{1/2}$ (1.1, propriété 2), on peut supposer $w_n \longrightarrow w$ dans $H^{1/2}$, d'où $A(w) = \sup\ A \,|\, G^{-1}([0,1])$.

Reste à voir que $G(w) \leq 1$: les boules fermées de H^1 étant compactes pour la topologie (H^1 faible) (théorème de Banach-Alaoglu), on peut supposer $w_n \longrightarrow w$ dans (H^1 faible). Enfin, par le lemme de Tonnelli ([Ak], p.137-139), la convexité de h^* implique $G(w) \leq \liminf G(w_n) \leq 1$.

(2) Prouvons d'abord l'estimation suivante (cas particulier de l'inégalité de Croke-Weinstein [CW], voir plus loin) :

Proposition. Si $\Sigma \subset B^{2n}(r)$ est strictement convexe et de classe $C^{1+\mathrm{Lip}}$, l'aire minimale d'une caractéristique fermée vérifie

$$A(z) \leq \pi r^2$$

Corollaire. La longueur d'une telle caractéristique vérifie

$$L(z) \leq \pi r^2 \sup_\Sigma |\nabla h|\,.$$

Démonstration. L'hypothèse $\Sigma \subset B^{2n}(r)$ donne

$$h \geq |z|^2/r^2 \;\Rightarrow\; h^* \leq (r^2/4)\,|z|^2$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{G}(w) \leq (r^2/4)\,\|\,\dot w\,\|_0{}^2$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{G}^{-1}([0,1]) \supset \{\, w \mid \|\,\dot w\,\|_0{}^2 \leq 4/r^2 \,\}$$

$$\Rightarrow\; \sup A \,|\, \mathcal{G}^{-1}([0,1]) \geq (\pi/4\pi^2)\, 4/r^2 = 1/(\pi r^2)\,.$$

Donc pour une caractéristique fermée z correspondant au maximum $A(w)$ de $A \,|\, G^{-1}([0,1])$, on a $A(z) = A(w)^{-1} \leq \pi r^2$. Pour prouver le corollaire, il suffit d'observer que z est une orbite de période $T = A(z)$ du champ $X = i\nabla h$ sur Σ.

(3) Si Σ est convexe, on peut l'approximer C^1 par des hypersurfaces strictement convexes Σ_i.

Le (2) donne une suite de caractéristiques fermées $\gamma_i \subset \Sigma_i$ dont la longueur est bornée. Il est facile d'en déduire que γ_i converge vers une caractéristique fermée de Σ. □

La théorie des caractéristiques fermées sur une hypersurface convexe a été beaucoup développée notamment par I. Ekeland (voir son livre [Ek]). Comme exemples de résultats, citons les minorations du nombre de caractéristiques fermées géométriquement distinctes $(n \geq 2)$: au moins 2 dans tous les cas, au moins n si le convexe est coincé entre deux boules dont les rayons vérifient $R/r < \sqrt{2}$, une infinité C^2-génériquement. Certains de ces résultats ont été étendus aux hypersurfaces étoilées [BLMR] [Vi2].

6.5. Capacité d'un domaine convexe et de son bord

Théorème. Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ un domaine compact bordé par une hypersurfaceconvexe Σ de classe $C^{1+\mathrm{Lip}}$. Alors les capacités de B et de Σ sont égales, et leur valeur commune est la plus petite action d'une caractéristique fermée de Σ. Autrement dit :

$$c(B) = c(\Sigma) = \min A(\Sigma).$$

<u>Démonstration</u>. Par approximation on se ramène au cas strictement convexe.

Posons $a = \min A(\Sigma)$.

Lemme 1. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $x \in \gamma(S^+)$ tel que $A(x) \leq a\mathcal{H}_h(x)$.

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 6.3, il existe $y \in H^1_0$ tel que $A(y) = a^{-1}$ et $G(y) = 1$, d'où $G(\lambda y) = \lambda^2$ pour tout λ. Or

$$G(u) = \sup_{x \in E} (\langle x, -i\dot{u}\rangle_0 - \mathcal{H}_h(x)).$$

Donc pour tout $(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}$ on a $\mathcal{H}_h(x) \geq \langle x, -\lambda i\dot{y}\rangle_0 - \lambda^2$. Pour $\lambda = \frac{1}{2}\langle x, -i\dot{y}\rangle_0$, cela donne

$$(\forall x \in E) \qquad \mathcal{H}_h(x) \geq (\tfrac{1}{2}\langle x, -i\dot{y}\rangle_0)^2 .$$

Soit $\gamma \in \Gamma$: il existe $x \in \gamma(S^+) \cap (E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R}y)$ d'après le lemme 3.1. Puisque $A(y) > 0$ et $A|E^- \oplus E^0 \leq 0$, le polynôme du second degré

$$P(t) = A(x+ty) = A(x) + \langle x, -i\dot{y}\rangle_0\, t + A(y)\, t^2$$

a une racine réelle, donc

$$4A(x)A(y) \leq (\langle x, -i\dot{y}\rangle_0)^2 .$$

Puisque $A(y) = a^{-1}$, il vient

$$A(x) \leq a(\tfrac{1}{2}\langle x, -i\dot{y}\rangle_0)^2 \leq a\mathcal{H}_h(x).$$ □

Définitions. (1) Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$ l'espace des fonctions $H = f\circ h$, où f vérifie

$$f(s) = 0 \text{ près de } 1$$

$$f'(s) \leq 0 \text{ si } s \leq 1$$

$$f'(s) = \alpha \in \mathbb{R}\setminus A(\Sigma)) \text{ si } f(s) \geq \varepsilon .$$

(2) De même, on note $\mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},B)$ l'espace des fonctions $H = f\circ h$, où f vérifie

$$f(s) = 0 \text{ si } s \leq 1$$

$$f'(s) = \alpha \in \mathbb{R}\setminus A(\Sigma)) \text{ si } f(s) \geq \varepsilon .$$

Il est clair que $\mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$ (resp. $\mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},B)$) est un sous-ensemble cofinal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$.

De plus, on a :

Lemme 2. Si $H \in \mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$, A_H vérifie (PS).

Corollaire. Si $H \in \mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$, $c(H)$ est une valeur critique de A_H.

<u>Démonstration</u>. On reprend les notations de 3.4. Soit $(x_p \in H^{1/2})$ une suite telle que $-x_p^- + x_p^+ + \nabla\mathcal{H}_H(x_p) \longrightarrow 0$. Il s'agit de voir que x_p reste dans un compact.

Comme dans le lemme 1 de 3.4, on montre que $-x_p^- + x_p^+ + \alpha\nabla\mathcal{H}_h(x_p)$ reste borné dans $H^{1/2}$. Si $\|x_p\|_{1/2}$ est borné alors $\nabla\mathcal{H}_H(x_p)$ reste dans un compact donc x_p aussi.

Raisonnant par l'absurde, on peut donc supposer $\|x_p\|_{1/2} \longrightarrow \infty$. Posons alors $v_p = x_p/\|x_p\|$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $v_p \longrightarrow v$ dans H^0. Alors $\nabla\mathcal{H}(v_p) \longrightarrow \mathcal{H}'_h(v)$ dans $H^{1/2}$, et le fait que $-v_p^- + v_p^+ + \alpha\nabla\mathcal{H}_h(v_p) \longrightarrow 0$ dans $H^{1/2}$

implique $v_p \longrightarrow v$ dans $H^{1/2}$. Donc $\|v\|_{1/2} = 1$ et a fortiori $v \neq 0$.

Par ailleurs on a $-v^- + v^+ + \alpha\nabla\mathcal{H}_h(v) = 0$, c'est-à-dire $-i\dot{v} + \alpha\nabla h(v) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse $\alpha \notin A(\Sigma)$ (cf. l'égalité action-période dans le principe d'action duale). □

Lemme 3. Soit $H \in \mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n}, \Sigma)$. Alors toute valeur critique positive c de A_H vérifie

$$c > \min A(\Sigma) - \varepsilon .$$

Démonstration. Soit x un point critique de A_H tel que $A_H(x) > 0$. On sait que $A_H(x)$ est de la forme $sf'(s) - f(s)$, $f'(s) \in A(\Sigma)$. La positivité de $A_H(x)$, jointe aux deux premières propriétés de f, entraîne $s > 1$, et la dernière propriété de f entraîne $f(s) < \varepsilon$. Donc $c(H) > f'(s) - \varepsilon \geq \min A(\Sigma) - \varepsilon$.

Preuve du théorème 6.5.

(1) Nous allons d'abord montrer $c(B) \leq a$. Pour cela il faut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ tel que $c(H) \leq a + \varepsilon$, ou encore :

(*) $(\forall \gamma \in \Gamma)(\exists x \in \gamma(S^+)) \qquad A_H(x) \leq a + \varepsilon$.

Quel que soit $C > 0$, il existe $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ telle que $H \geq C\{h - (1 + (\varepsilon/2a))\}$. Nous allons voir que pour C assez grand ceci implique (*). Soit $\gamma \in \Gamma$, et soit x donné par le lemme 1. Il y a deux cas :

(i) $\mathcal{H}_h(x) \leq 1 + \varepsilon/a$: alors

$$A_H(x) \leq A(x) \leq a\,\mathcal{H}_h(x) \leq a + \varepsilon .$$

(ii) $\mathcal{H}_h(x) > 1 + \varepsilon/a$: alors l'inégalité sur H implique

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_H(x) &\geq C\,(\mathcal{H}_h(x) - (1 + (\varepsilon/2a)))\\ &\geq C\,(\varepsilon/2a)\,(1 + \varepsilon/a)^{-1}\,\mathcal{H}_h(x)\\ &\geq a\mathcal{H}_h(x) \qquad \text{si } C \text{ est assez grand.}\end{aligned}$$

On en déduit $A_H(x) = A(x) - \mathcal{H}_H(x) \leq A(x) - a\,\mathcal{H}_h(x) \leq 0$.

Dans les deux cas, on a prouvé (*), ce qui achève de prouver $c(B) \leq a$.

(2) D'après la monotonie, il suffit pour finir de prouver le théorème de voir que $c(\Sigma) \geq a$. Pour cela, soit $K \in \mathcal{F}(\Sigma)$. Il s'agit de montrer $c(K) \geq a$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut majorer K par une fonction H dans $\mathcal{E}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n}, \Sigma)$. Le lemme 2 dit que $c(H)$ est une valeur critique positive de A_H, donc le lemme 3 donne $c(H) \geq a - \varepsilon$. Donc Comme $c(K) \geq c(H)$, on en déduit $c(K) \geq a - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc le théorème est démontré.

En utilisant la monotonie, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire. Soient B, $B' \subset \mathbb{R}^{2n}$ deux compacts convexes de classe C^{1+Lip}, de bords Σ et Σ'. On suppose qu'il existe un plongement symplectique de B dans B'. Alors $\min A(\Sigma) \leq \min A(\Sigma')$. En particulier :

(a) Si B admet un plongement symplectique dans $B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, pas nécessairement d'image convexe, Σ a une caractéristique fermée d'action $< \pi r^2$.

(b) S'il existe un plongement symplectique de $B^{2n}(r)$ dans B, alors toute caractéristique fermée de Σ a une action $\geq \pi r^2$.

Remarque. Le (b) généralise un résultat de C. Croke et A. Weinstein [CW], qui traitait le cas d'un plongement d'image convexe.

6.6. Formule du produit

Soient $B_i \subset \mathbb{R}^{2n_i}$, $1 \leq i \leq k$. On considère $B_1 \times \ldots \times B_k$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2n}$, $n = \sum n_i$. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant (cas particulier d'une formule plus générale, cf. [FH]).

Théorème. Supposons que les B_i soient convexes. Alors :

(a) $$c(B_1 \times \ldots \times B_k) = \min_i c(B_i) .$$

(b) Si de plus les B_i sont compacts et d'intérieur non vide, alors on a aussi

$$c(\partial B_1 \times \ldots \times \partial B_k) = \min_i c(B_i) .$$

Démontrons d'abord un cas particulier.

Lemme 1. Si B est convexe, on a $c(B \times \mathbb{R}^{2k}) = c(B)$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où B est un domaine convexe compact à bord C^2 strictement convexe. Notant h sa jauge quadratique, on a alors (en utilisant la monotonie et l'homogénéité)

$$c(B \times \mathbb{R}^{2k}) = \sup_R c(E_R)$$

$$E_R = \{ (z,z') \mid h(z) + (|z'|/R)^2 < 1 \}.$$

Comme E_R est strictement convexe et que son bord Σ_R est de classe C^2, on a $c(E_R) = \min A(\Sigma_R)$. Or les équations de Hamilton s'écrivent

$$\dot{x} = X_h(x) \ , \quad \dot{x}' = 2ix'/R^2 \ , \quad (x(t)) \in \mathbb{R}^{2n} \ , x'(t) \in \mathbb{R}^{2k} \ )$$

donc on a une solution de période λ si et seulement si

$$(x \equiv 0 \text{ ou } \lambda \in A(\Sigma) \ ) \quad \text{et} \quad (x' \equiv 0 \text{ ou } \lambda/R^2 \in \pi\mathbb{Z} \ ).$$

(cf. 6.3) On en déduit

$$A(\Sigma_R) \subset (A(\Sigma) \cup \{0\} \ ) + \pi R^2 \mathbb{N} \ .$$

Donc pour R assez grand on a

$$c(E_R) = \min A(\Sigma_R) = \min A(\Sigma) = c(B). \qquad \square$$

On déduit de ce lemme

$$c(B_1 \times \ldots \times B_k) \le \min_i \ c(B_i \times \mathbb{R}^{2(n-n_i)}) = \min_i c(B_i).$$

Reste donc à minorer $c(B_1 \times \ldots \times B_k)$ et éventuellement $c(\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k)$.

Lemme 2. Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ un compact strictement convexe de bord Σ de classe C^2, et soit $K \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$A_H | \gamma(B^+ \setminus \varepsilon B^+) \ge c(B) - \varepsilon \ , \quad A_H | \gamma(B^+) \ge 0 \ ,$$

où B^+ est la boule bordée par S^+ dans E^+.

Démonstration. Comme on peut remplacer H par une fonction plus grande, on peut supposer que H

$\in \mathcal{F}_{\varepsilon/2}(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$. Soit $z \in \Sigma$; puisque $H = 0$ près de z il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\inf A_H | (z + \alpha S^+) > 0 \quad , \quad A_H | (z_0 + \alpha B^+) \ge 0 \ .$$

(cf. La preuve de la proposition 2 de 3.3). Notant (φ_u) le flot de ∇A_H, posons

$$S_u = \varphi_u(z_0 + \alpha S^+)$$

$$d'(H) = \sup_{u \ge 0} \inf (A_H | S_u) \ .$$

Alors $d'(H)$ est une valeur critique positive de A_H puisqu'il est fini et que la condition (PS) est vérifiée. Donc le lemme 3 de 6.4 montre que $d'(H) \ge c(B) - \varepsilon/2$. Ensuite, par définition de $d'(H)$, il existe $r > 0$ tel que $A_H | S_r \ge d'(H) - \varepsilon/2$, ce qui implique $A_H | S_r \ge c(B) - \varepsilon$. Notons que le fait qu'on pousse par le flot entraîne

$$A_H | S_u \ge A_H | S_0 > 0 \quad \text{pour tout } u \ge 0 \ .$$

Définissons $\gamma : E \longrightarrow E$ par

$$\gamma(x) \quad = \quad z_0 + 2(\alpha/\varepsilon)x \qquad \text{si } x \in E^+ \text{ et } \|x\| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$= \varphi_{r(2\|x\|-\varepsilon)/\varepsilon}(z_0 + \alpha x/\|x\|) \qquad \text{si}$$
$x \in E^+$ et $\frac{1}{2}\varepsilon < \|x\| \le \varepsilon$

$$= \varphi_r(z_0 + \alpha x/\|x\|) \qquad \text{si } x \in E^+ \text{ et } \|x\| > 1 \ .$$

$$\gamma(x^+ + x^0 + x^-) = \gamma(x^+) + x^0 + x^- \ .$$

Alors on a $\gamma(B^+ \setminus \varepsilon B^+) = S_r$ et $\gamma(B^+) = (z_0 + \alpha B^+) \cup_{0 \le u \le r} S_u$, donc les minorations cherchées de A_H sont satisfaites.

Enfin l'homotopie

$$\gamma_u(x) = u^{-1}(\gamma(ux) - z_0) + z_0 \ , \ 0 < u \le 1$$

$$\gamma_0(x) = 2(\alpha/\varepsilon)\, x^+ + x^0 + x^-$$

montre que $\gamma \in \Gamma$. $\square$

Remarque. Dans cette preuve on s'est servi du fait que la définition de Γ ne demande pas que γ soit un homéomorphisme.

Fin de la preuve du théorème. D'après la continuité, on peut supposer les B_i compacts, strictement convexes et à bord C^2. Nous allons alors montrer $c(\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k) \geq \min_i c(B_i)$. D'après la monotonie, ceci impliquera à la fois (a) et (b).

Soit H dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k)$. On peut la majorer par $\sum H_i(z_i)$, où $H_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n_i}, \Sigma_i)$. D'après le lemme 2, il existe des éléments $\gamma_i \in \Gamma(\mathbb{R}^{2n_i})$ tels que

$$A_{H_i} | \gamma_i(B_i^+ \setminus (2k)^{-1} B_i^+) \geq c(B_i) - \varepsilon \,, \quad A_{H_i} | \gamma_i(B_i^+) \geq 0 \,.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in S^+$, alors $x_i \in B_i^+$ pour tout i et il existe i tel que $x_i \in B_i^+ \setminus (2k)^{-1} B_i^+$. Il vient donc, en posant $\gamma = \gamma_1 \times \ldots \times \gamma_k$:

$$(\forall x \in S^+) \qquad A_H(\gamma(x)) \geq \sum A_{H_i}(\gamma(x_i)) \geq \min_i \, (c(B_i) - \varepsilon) \,.$$

Comme $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^{2n})$, ceci achève la preuve du théorème. □

Une conséquence immédiate de la formule du produit est le

Corollaire. La capacité du tore standard $T^n = S^1(r_1) \times \ldots \times S^1(r_n) \subset \mathbb{R}^{2n}$ est égale à $\inf_i \pi r_i^2$.

Question. La capacité d'une sous-variété lagrangienne fermée $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ est-elle positive ? Ceci donnerait une nouvelle preuve de la non-exactitude de L [G1], et impliquerait qu'il n'existe pas d'engouffrement hamiltonien de L dans un cylindre $B^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Dans le cas L est "rationnelle" ($[i^*\lambda]$ est un multiple d'une forme entière), ceci résulte de [G1] (cf. [Si]).

7. QUASI-EXISTENCE DE CARACTERISTIQUE FERMEE. HYPERSURFACES DE TYPE CONTACT

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface fermée lisse, munie d'un voisinage feuilleté $\psi : \Sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. On note $U = \mathrm{im}(\psi)$ et $I(U), E(U)$ les composantes bornée et non bornée de $\mathbb{R}^{2n} \setminus U$ (cf. figure 3).

7.1. Fonctions adaptées à un voisinage feuilleté. Théorème de Hofer-Zehnder

Définition (cf. [HZ]). Soit $H \in \mathcal{F}$. On dit qu'elle est adaptée à ψ si

$$H = C_0 \text{ sur } I(U)$$

$$H(\psi(z,u)) = f(u) \text{ sur } U$$

$$H = C_1 \text{ sur } E(U) \cap B^{2n}(R) \text{, où } B^{2n}(R) \text{ est une boule contenant } \Sigma$$

$$H = h(|z|^2) \text{ sur } E(U) \setminus B^{2n}(R) \text{, où } h \text{ vérifie : } (\forall s) \;\; s h'(s) - h(s) \leq 0 \,.$$

Il est clair qu'il existe toujours des fonctions adaptées à ψ, et qu'elles forment une famille cofinale dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, \Sigma)$ aussi bien que dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$, où B est le domaine bordé par Σ.

Lemme. Si x est un point critique de A_H de valeur strictement positive, alors $(x(t))$ est une solution 1-périodique de X_H à valeurs dans U.

Démonstration. Le fait que $(x(t))$ est une solution 1-périodique de X_H est le principe de Hamilton (2.5). De plus, X_H laisse invariantes les régions (i) à (iv) ci-dessus, donc $(x(t))$ est entièrement contenu dans l'une d'elles. Si ce n'est pas U, alors il y a deux possibilités :

(1) $x(t) \in I(U) \cup (E(U) \cap B^{2n}(R))$: alors $x(t) = \mathrm{cste}$, $A(x) = 0$ donc $A_H(x) \leq 0$.

(2) $x(t) \in E(U) \setminus B^{2n}(R)$: alors $|x(t)|^2 = \mathrm{cste} = s_0$, et d'après la forme des valeurs critiques de A_H pour $H = h(|z|^2)$ (corollaire 3.4), on a

$$A_H(x) = s_0 h'(s_0) - h(s_0) \leq 0 \,.$$

Théorème [HZ]. Il existe toujours une caractéristique fermée sur une des surfaces Σ_u, $u \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Démonstration. Il existe une fonction admissible H adaptée à ψ et telle que $a_H \notin \pi\mathbb{Z}$. On peut de plus supposer $f'(u) \neq 0$ pour $u \in]-1,1[$. D'après la proposition 3.4, la fonctionnelle A_H admet une valeur critique positive, et d'après le lemme celle-ci correspond à une solution périodique de X_H dans U. Mais puisque $X_H = f'(u)X_u$, une telle solution se trouve sur une surface Σ_u, et est une caractéristique fermée puisque $f'(u) \neq 0$.

7.2. Hypersurfaces de type contact

Définitions [W3]. Soit (V^{2n}, ω) une variété symplectique. Une hypersurface $\Sigma^{2n-1} \subset V$ est de type contact s'il existe une 1-forme λ définie sur Σ telle que

(a) $d\lambda = \omega_\Sigma$ forme induite

(b) λ ne s'annule pas sur $\ker \omega_\Sigma$ (feuilletage caractéristique de Σ)

On dit que Σ est de type contact restreint s'il existe une 1-forme λ définie sur V telle que $d\lambda = \omega$ et dont la restriction à Σ vérifie (b).

Remarque. Le champ d'hyperplans $\ker \lambda$ est alors une structure de contact sur Σ (cf. [Ar]) : $\ker d\lambda$ est de dimension 1 et $\lambda | \ker d\lambda$ ne s'annule pas, autrement dit $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ est une forme volume.

Autres caractérisations du type contact. Une 1-forme λ définie sur Σ telle que $d\lambda = \omega_\Sigma$ est toujours induite par une 1-forme sur un voisinage (encore notée λ) telle que $d\lambda = \omega$. Le champ de vecteurs dual $X = \omega^{-1}(\lambda)$ vérifie alors

(a1) $L_X\omega = \omega$

(b1) X est transverse à Σ.

Son intégration fournit un voisinage feuilleté $\psi : \Sigma \times]-\varepsilon,\varepsilon[\approx U$ tel que, si ω_u est la forme induite sur $\Sigma_u = \psi(\Sigma \times \{u\})$, on a

(a2) $\omega_u = e^u \omega_\Sigma$ en identifiant Σ_u à Σ via $\psi(.u)$

(b2) $X = \partial/\partial u$.

Réciproquement, il est clair que l'existence d'un tel voisinage implique la propriété de contact : il suffit de poser $\lambda = \omega(\partial/\partial u)$. Une équation de Σ est $(u = 0)$ et le feuilletage caractéristique est dirigé par le champ hamiltonien X_u. On a

$$\lambda(X_u) = 1$$

$$X_u(z,u) = e^u X_u(z,0).$$

donc toute caractéristique fermée de $\psi(\Sigma \times \{u\})$ est de la forme $x(t) = \psi(y(e^u t), u)$, où y est une caractéristique fermée de Σ.

Notons une propriété essentielle des hypersurfaces de type contact.

Propriété. Toute hypersurface de type contact admet un voisinage feuilleté tel que les hypersurfaces parallèles (Σ_u, ω_u) soient conformément symplectiquement équivalentes. En pariculier, le feuilletage caractéristique de Σ_u est conjugué à celui de $\Sigma_0 = \Sigma$.

Ces propriétés sont parfois suffisantes pour que Σ soit de type contact :

Proposition. (a) Supposons que Σ a un voisinage feuilleté tel que

(i) $\omega_u = f_u \omega_\Sigma$

(en identifiant Σ_u à Σ via $\psi(.u)$, f_u étant une fonction positive sur Σ)

(ii) Σ a une caractéristique dense.

Alors Σ est de type contact.

Démonstration. Le fait que $d\omega_u = 0$ et la propriété (i) impliquent que f_u doit être constante le long des caractéristiques (calcul facile). Donc (ii) implique que $f_u = \mathrm{cste} = f(u)$, et la non-dégénérescence de ω donne $f'(u) \neq 0$.

Remarques. (1) Supposons que ω admet une primitive λ_0 sur V. Pour que Σ soit de type contact restreint il suffit qu'elle soit de type contact et qu'on puisse trouver λ vérifiant (a1), (b1) et telle que $\lambda - \lambda_0$ soit exacte. La dernière propriété est automatique si $H^2(V,\Sigma) = 0$, par exemple si $V = \mathbb{R}^{2n}$ et $H^1(\Sigma) = 0$.

(2) Si Σ est de type contact restreint, et si elle borde un domaine compact, la forme λ est nécessairement positive sur les caractéristiques orientées. Autrement dit : le champ dual X est sortant du domaine B bordé par Σ. En effet, le flot de ce champ vérifie $\varphi_t{}^*\omega_0 = e^t\omega_0$ donc $\varphi_t{}^*(\mathrm{vol}) = e^{nt}(\mathrm{vol})$ (forme volume). Si X était rentrant, son flot pour $t > 0$ enverrait B dans lui-même ce qui est impossible puisque $\mathrm{vol}\,\varphi_t(B) = e^{nt}\,\mathrm{vol}\,B > \mathrm{vol}\,B$.

Ceci s'applique en particulier si $V = \mathbb{R}^{2n}$.

Exemples.

(1) Dans $\mathbb{R}^{2n}$, une hypersurface strictement étoilée par rapport à l'origine est de type contact restreint (par rapport à $\lambda = \frac{1}{2}(p.dq - q.dp)$).

(2) Dans un cotangent T^*M muni de sa structure symplectique canonique, toute hypersurface qui est strictement étoilée par rapport à la section nulle ($\Sigma_q \subset T^*{}_qM$ est strictement étoilée par rapport à 0) est de type contact restreint par rapport à la primitive de Liouville $\lambda = p.dq$. Par exemple, on peut prendre le fibré unitaire d'une métrique riemannienne : le feuilletage caractéristique n'est autre que le flot géodésique.

(3) Si $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une sous-variété lagrangienne fermée, on peut plonger symplectiquement dans $\mathbb{R}^{2n}$ un fibré en boules $U \subset T^*L$ associé à une métrique riemannienne sur L ; le bord ∂U devient alors une hypersurface de type contact (par rapport à la primitive de Liouville dans U).

On obtient ainsi de nombreux exemples d'hypersurfaces de type contact non difféomorphes à S^{2n-1}. Mais il semble que ∂U n'est pas de type contact restreint (cf. le théorème de Gromov [G1] sur la non-exactitude de L).

(4) Faisant une chirurgie d'indice i, $1 \le i \le n-1$, sur la sphère standard S^{2n-1}, on construit une sous-variété Σ de type contact restreint et difféomorphe à $S^i \times S^{2n-1-i}$ (F. Laudenbach).

Du théorème 7.1 et de la caractérisation (b) des hypersurfaces de contact résultent immédiatement le théorème de Viterbo, résolvant la conjecture de Weinstein dans $\mathbb{R}^{2n}$ (cf. l'Introduction) :

Théorème [Vi 1]. Sur toute hypersurface de type contact dans $\mathbb{R}^{2n}$ il existe une caractéristique fermée. $\square$

Remarques. (a) La construction de Hofer-Zehnder utilisée pour prouver le théorème 7.1 permet de

passer du problème "à période fixée" au problème"à énergie fixée" si Σ est de type contact.

(b) Le théorème 7.1 a été généralisé à un certain nombre de variétés symplectiques dont l'infini est le symplectisé d'une hypersurface compacte de type contact [FV] [FHV]. On en déduit des généralisations correspondantes du théorème de Viterbo.

7.3. Discussion de la propriété de contact

On peut se demander combien restrictive est la condition d'être de type contact ? Une propriété satisfaite par une surface Σ de type contact par rapport à λ est : $\int_\gamma \lambda > 0$ pour toute caractéristique fermée γ. Si γ est homologue à zéro dans $H_1(\Sigma;\mathbb{R})$, en particulier si $H_1(\Sigma;\mathbb{R}) = 0$, alors $\int_\gamma \lambda = A(\gamma)$ ne dépend pas du choix de la primitive λ de ω_Σ. Tenant compte des deux orientations possibles de Σ, on obtient donc la condition nécessaire suivante pour que Σ soit de type contact :

(*) Il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que : pour toute caractéristique fermée γ homologue à zéro dans $H_1(\Sigma;\mathbb{R})$, on a $\varepsilon A(\gamma) > 0$.

Cas particulier. Si $V = \mathbb{R}^{2n}$ et $H^1(\Sigma) = 0$, la condition est : pour toute caractéristique fermée γ on a $A(\gamma) > 0$ (ici contact équivaut à contact restreint, et l'orientation est imposée puisque s borde un domaine compact).

On en déduit un exemple de surface qui n'est pas de type contact : il suffit de construire une sphère $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ ayant une caractéristique fermée γ telle que $A(\gamma) \le 0$ (cf. [W 3]).

Pour formuler une condition nécessaire et suffisante, on a besoin de la notion de cycle du feuilletage $\mathcal{F}_\Sigma$ (cf. [Su]) : par définition, un tel cycle γ est un courant de De Rham de degré un tel que :

- γ est fermé

- γ est (positivement) tangent au feuilletage, c'est-à-dire : γ est une limite de combinaisons linéaires finies $\sum X_i$, où X_i est un courant de Dirac associé à un vecteur tangent positivement tangent à $\mathcal{F}_\Sigma$.

L'action $A(\gamma) = \int_\gamma \lambda$ a encore un sens pour un tel cycle γ, et l'on a :

Théorème ([McD], Theorem 5.2). $\Sigma \subset (V,\omega)$ est de type contact si et seulement si :

Pour tout cycle γ non trivial du feuilletage caractéristique $\mathcal{F}_\Sigma$ qui est homologue à zéro dans $H_1(\Sigma,\mathbb{R})$, on a $A(\gamma) \neq 0$.

Si $V = \mathbb{R}^{2n}$ et $H^1(\Sigma) = 0$, la condition est :

Pour tout cycle non trivial de $\mathcal{F}_\Sigma$, on a $A(\gamma) > 0$.

7.4. Aire des caractéristiques fermées sur une hypersurface de type contact

Rappelons que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface compacte sans bord, on note $A(\Sigma)$ l'ensemble des valeurs de $A(x)$ où x est une caractéristique fermée de Σ. Notons qu'on ne demande pas que x soit primitive, mais qu'en revanche les caractéristiques sont orientées : donc si $a \in A(\Sigma)$, $A(\Sigma)$ contient aussi $\mathbb{N}^*a$.

Proposition. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface de type contact restreint. Alors $A(\Sigma)$ est un fermé d'intérieur vide, contenu dans $]0,+\infty[$. Comme il est non vide, il a un plus petit élément $a(\Sigma)$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut choisir l'équation $(H = c)$ de Σ de façon à avoir $\lambda(X_H) = 1$. Notant (φ_u) le flot de X_H, on en déduit que $A(\Sigma)$ est l'ensemble des périodes des points de Σ, soit :

$$A(\Sigma) = \{ T > 0 \mid (\exists z \in \Sigma) \quad \varphi_T(z) = z \},$$

et cet ensemble est fermé car la condition $(T > 0)$ peut être remplacée par $(T \geq \varepsilon)$.

Pour voir que $A(\Sigma)$ est d'intérieur vide, considérons un voisinage tubulaire $\psi : \Sigma \times]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow U$ tel que la forme α_u induite par ω_0 sur Σ_u vérifie $\alpha_u = e^u\alpha_0$ (propriété 7.2,(b)). Ensuite, soit H adapté à ψ, avec $H = f(u)$ sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Lemme. (a) Si x est un point critique non constant de A_H tel que $x(0) \in \psi(\Sigma \times \{u\})$, alors

$$f'(u) \in e^u A(\Sigma)$$

$$A_H(x) = f'(u) - f(u).$$

(b) Réciproquement, si $u \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ est tel que $f'(u) \in e^u A(\Sigma)$, alors il existe un point critique

de A_H tel que $x(0) \in \psi(\Sigma \times \{u\})$.

Démonstration. (a) x est une caractéristique fermée de $\psi(\Sigma \times \{u\})$, donc est de la forme $x(t) = \psi(y(t),u)$, où y est une caractéristique fermée de Σ : donc $A(x) \in e^u A(\Sigma)$. De plus, on a $X_H = f'(u) X_u$ et $\lambda(X_u) = 1$, d'où

$$A(x) = \int_0^1 \lambda(X_H)\, dt = f'(u).$$

Enfin, $A_H(x) = A(x) - \int H\, dt = f'(u) - f(u)$.

(b) Par hypothèse il existe $y(t)$ tel que $y(0) = y(1) \in \Sigma$ et $\dot{y} = f'(u)\, X_u(y)$. Il suffit alors de poser $x(t) = \psi(y(t),u)$.

Preuve de la proposition. D'après le lemme 3.5, les valeurs critiques de A_H forment un ensemble d'intérieur vide. Donc l'ensemble $\{ f'(u) - f(u) \mid e^{-u}f'(u) \in A(\Sigma) \}$ est d'intérieur vide pour toute fonction f sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$. Prenant $f(u) = u$ on en déduit que $A(\Sigma)$ est d'intérieur vide.

7.5. Théorème de représentation

Théorème. Soit $\Sigma \subset (\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ une hypersurface de type contact restreint, entourant un domaine B. Alors :

(1) $$c(B) \in A(\Sigma)$$

(2) $$c(\Sigma) = c(B).$$

Démonstration. On fixe un voisinage feuilleté ψ vérifiant la propriété 7.2.(b).

Pour C assez grand et η assez petit on définit $H = H_{C,\eta} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$ adaptée à ψ et avec les propriétés supplémentaires suivantes :

$$C_0 = C_1 = C$$

$$f|[-\eta,\eta] \equiv 0$$

f' a le signe de u si $\eta < |u| < 2\eta$

$$f'(u) - f(u) > c(\Sigma) + 1 \text{ si } u > 0 \text{ et si } \eta < f(u) < C - \eta$$

$$f(u) = C \text{ si } |u| \geq 2\eta .$$

$$a_H = C/R^2 .$$

On vérifie que $H_{C,\eta}$ existe et qu'on peut imposer : $C \leq C' \Rightarrow H_{C,\eta} \leq H_{C',\eta}$. La famille $H_{C,\eta}$, $C \longrightarrow +\infty$, $\eta \longrightarrow 0$, est cofinale dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n},\Sigma)$, donc on a :

$$c(\Sigma) = \lim_{C \longrightarrow +\infty} \delta(C) \quad , \quad \delta(C) = \lim_{\eta \longrightarrow 0} c(H_{C,\eta}) .$$

Notons que $\delta(C)$ est une fonction décroissante de C .

Supposons provisoirement

(*) $$C/\pi R^2 > 1 \text{ et non entier.}$$

Alors d'après la proposition 3.4, $c(H_{C,\eta})$ est une valeur critique > 0 de $A_{H_{C,\eta}}$. D'après le lemme 7.1, elle est associée à une solution périodique dans U . En utilisant le lemme 7.4,(a), on en déduit

$$c(H_{C,\eta}) = f'(u) - f(u) , \text{ où } f'(u) \in e^u A(\Sigma) .$$

De plus pour C assez grand le fait que $c(H_{C,\eta}) < c(\Sigma) + 1$ implique $f(u) < \eta$ ou bien $f(u) > C - \eta$, donc un des deux cas suivants se produit :

$$c(H_{C,\eta}) = e^u a - v$$

$$c(H_{C,\eta}) = e^u a - v - C ,$$

avec $0 \leq u , v \leq 2\eta$ dans les deux cas. Comme $A(\Sigma)$ est fermé, on en déduit, sous l'hypothèse (*), que l'on a toujours un des deux cas suivants :

(a) $$\delta(C) \in A(\Sigma)$$

(b) $$\delta(C) + C \in A(\Sigma) .$$

Si (b) était vrai pour tout C assez grand vérifiant (*), alors le fait que $A(\Sigma)$ est d'intérieur vide et la décroissance de δ impliqueraient que $\delta(C) + C$ est aussi décroissante, d'où $\delta(C) \longrightarrow -\infty$. Ceci est impossible, donc il existe C arbitrairement grand tel que (a) soit vérifié, d'où

$$c(\Sigma) = \lim_{C \longrightarrow +\infty} \delta(C) \in \overline{A(\Sigma)} = A(\Sigma) ,$$

ce qui achève la preuve de (1).

(2) La capacité $c(B)$ s'obtient en prenant l'inf des $c(H'_{C,\eta})$ où $H'_{C,\eta}$ a une définition analogue à $H_{C,\eta}$, les seules différences étant

$$H = 0 \text{ sur } I(U) \text{ (et non } C)$$

$$f(u) = 0 \text{ si } u \leq 0 .$$

On considère alors $H_s = sH + (1-s)H'$, $0 \leq s \leq 1$, et l'on pose $A_s = A_{H_s}$. Pour montrer $c(\Sigma) = c(B)$ il suffit de voir que $c(H_0) = c(H_1)$.

Si $A_s'(x) = 0$ et $A_s(x) > 0$, on a $x(t) \in \psi(\Sigma \times \{u\})$ avec $u > 0$. Donc on se trouve dans une région où $H_s = H$. Ceci implique que A_s a pour tout s les mêmes valeurs critiques > 0 que A_H . L'égalité $c(H_0) = c(H_1)$ résulte alors de la continuité de $c(H_s)$ en fonction de s et du fait que les valeurs critiques de A_H forment un ensemble d'intérieur vide. □

Corollaire. Supposons $n \geq 2$, et soit $S^{2n-1}(r)$ la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^{2n}$. S'il existe un plongement symplectique de cette sphère dans $B^2(s) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, alors $r < s$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de prouver $r \leq s$. Soit Σ l'image de ce plongement : c'est une hypersurface de type contact puisque cette propriété est symplectiquement invariante. De plus $H^1(\Sigma) = 0$ donc elle est de contact restreint. Le théorème implique $c(\Sigma) \in A(\Sigma)$. Or, toujours d'après $H^1(\Sigma) = 0$, on a $A(\Sigma) = A(S^{2n-1}(r)) = \pi r^2 \mathbb{N}^*$: donc $c(\Sigma) \geq \pi r^2$. Par ailleurs, on a $c(\Sigma) \leq c(B^2(s) \times \mathbb{R}^{2n-2})$ d'où le résultat.

(4) Que vaut $c(\Sigma)$ si Σ est une hypersurface de type contact non restreint, ou n'est pas de type contact ? En tout cas, elle est positive, car $c(\Sigma) \geq e(\Sigma) = e(B) > 0$.

7.6. Exemple d'étoilé non "convexifiable"

On va construire un domaine strictement étoilé $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ $(n \geq 2)$ à bord C^∞ et ayant sur celui-ci une caractéristique fermée d'aire $a(\partial B) < c(B)$ (cf. figure 4).

Pour simplifier les notations, on suppose $n = 2$. On considère le domaine de Reinhardt $B_f \subset \mathbb{R}^4$ défini par $f(|z_1|, |z_2|) < 1$ où $f : \mathbb{R}_+{}^2 \to \mathbb{R}$ est homogène de degré un. On se donne $\varepsilon \in]0,1[$ et l'on prend f vérifiant

$$f(s_1, s_2) \leq s_1 + s_2$$

$$f(\varepsilon, 1-\varepsilon/2) = 1$$

$$\partial f/\partial s_2(\varepsilon, 1-\varepsilon/2) = 0 .$$

La première condition implique que B_f contient $B^4(1)$ donc $c(B_f)$ est minorée par π. Les deux autres impliquent que le cercle $\partial B_f \cap \{ z_2 = 1-\varepsilon/2 \}$ est une caractéristique fermée du bord. Or son aire entourée est $\pi\varepsilon^2$ qui est aussi petit qu'on veut.

Donc le domaine fermé $\bar{B}$ n'est symplectomorphe à aucun domaine convexe (comparer [W4]). En fait, il résulte de [FH] que la même propriété vaut pour le domaine ouvert.

8. ENERGIE

8.1. Définitions [H]

(1) Notons $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n} \times [0,1])$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n} \times [0,1]$ et à support compact. On rappelle (cf. § 2.1) que chaque $H \in \mathcal{H}$ engendre un symplectomorphisme compactement hamiltonien $\exp(H) \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$. L'<u>énergie</u> de $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ (ou norme de Hofer) est

$$e(\varphi) = \inf \{ \mathrm{osc}\,(H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ et } \exp(H) = \varphi \} ,$$

où $\mathrm{osc}\,(H) = \sup\,(H) - \inf\,(H)$ (oscillation). en fait, il faut prendre $\int_0^1 \mathrm{osc}(H_t)\,dt$

(2) Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^{2n}$. Si $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ et $\varphi(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset$ on dira que φ <u>disjoint</u> B. De même, si $H \in \mathcal{H}$ et $\exp(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset$ on dira que H disjoint B. L'<u>énergie de disjonction</u> de B est

$$e(B) = \inf \{ e(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{D} \text{ et } \varphi(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset \} .$$

$$= \inf \{ \mathrm{osc}\,(H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ et } \varphi = \exp(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset \} .$$

Remplaçant H par $\rho\,(H - \inf\,(H))$ où ρ est une fonction plateau valant 1 sur $\mathrm{supp}\,(H)$, on peut se limiter aux fonctions $H \geq 0$. Notant $\mathcal{H}_+$ ces fonctions, on a donc

$$e(B) = \inf \{ e(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}) \text{ et } \varphi(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset \} .$$

$$= \inf \{ \sup\,(H) \mid H \in \mathcal{H}_+ \text{ et } \exp(H)(\bar{B}) \cap \bar{B} = \emptyset \} .$$

Si B n'est pas borné, on pose

$$e(B) = \sup_{B' \subset B} e(B') .$$

<u>Remarques</u>. (1) A priori, la non-nullité de $e(B)$ (et même celle de $e(\varphi)$) n'est pas évidente.
(2) Rappelons que l'intégrale $\iint_{\mathbb{R}^{2n} \times I} H$ ne dépend que de φ : c'est l'invariant de Calabi (cf. [Ba]).

Premières propriétés. (1) L'énergie $e(\varphi)$ est un invariant de conjugaison symplectique. En effet, si (H_t) engendre (φ_t) et si $\psi \in \mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$, alors $(H_t \circ \psi)$ engendre $(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1})$. De plus on a

$$e(\varphi^{-1}) = e(\varphi)$$

$$e(\varphi\psi) \le e(\varphi) + e(\psi)$$

$e(\varphi\psi) \le 2 \sup (e(\varphi), e(\psi))$ si les supports de φ et ψ sont séparés par un hyperplan. et aussi $e(\varphi_1 \cdots \varphi_\ell) \le 2 \max_j e(\varphi_j) \ldots$

(2) L'énergie de disjonction $e(B)$ vérifie

$e(\psi(B)) = e(B)$ pour tout $\psi \in \mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$

$c(B') \le c(B)$ si $B' \subset B$

$c(\lambda^2 B) = \lambda^2 c(B)$

$e(B \times \mathbb{R}^{2k}) \le e(B)$, où $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ et $B \times \mathbb{R}^{2k} \subset \mathbb{R}^{2(n+k)}$

$e(B) = \inf\limits_{U \supset \overline{B}} e(U)$, U ouvert.

De plus, il est facile de voir que $e(B^2(r)) \le \pi r^2$: en effet, d'après l'invariance et l'homogénéité, il suffit de montrer que si B est le carré $[0,1] \times [0,1]$ on a $e(B) \le 1$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$. Le hamiltonien autonome $F(p,q,t) = (1+\varepsilon)p$ disjoint B puisque $\exp\,(F)$ est la translation par $(0,1)$. Posons $H_\varepsilon = \rho_\varepsilon(|p|)\rho_\varepsilon(|q/2|)\,F$ où ρ_ε est une fonction plateau sur $\mathbb{R}$ valant 1 sur $[0,1]$ et 0 hors de $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$: on obtient un élément de $\mathcal{H}$ tel que $\mathrm{osc}\,(H) \le (1+\varepsilon)^2$ et $\exp(H)|B = \exp(F)$. Ceci implique $e(B) \le (1+\varepsilon)^2$ d'où le résultat.

Il résulte de ce qui précède qu'on a

$$e(B^{2n}(r)) \le e(B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}) \le \pi r^2 .$$

Energie d'une réunion. Soient B_1 et B_2 deux compacts séparés par un hyperplan. Alors

$$e(B_1 \cup B_2) = \sup\,(e(B_1), e(B_2)) .$$

Démonstration. L'inégalité $\ge$ résulte de la monotonie. Dans l'autre sens, soit $H_i \in \mathcal{H}_+$ disjoignant B_i, $i = 1, 2$. Si τ est une translation assez grande perpendiculaire à l'hyperplan (de B_1 vers B_2), les supports de H_1 et de $H_2 \circ \tau$ sont disjoints et $H = H_1 + H_2 \circ \tau$ disjoint $B_1 \cup \tau(B_2)$. On en déduit d'abord $\sup\,(H) \le 2 \sup\,(\sup(H_1), \sup(H_2))$ qui peut être rendu aussi

car ici on ne peut pas supposer $H_i \geq 0$

cf HZ

proche qu'on veut de $\sup\,(e(B_1), e(B_2))$. De plus, B_1 et $\tau(B_2)$ sont séparés par l'hyperplan donc la paire $B_1 \cup \tau(B_2)$ est équivalent à $B_1 \cup B_2$ par $\varphi \in \mathrm{Symp}\,(\mathbb{R}^{2n})$. Donc $e(B_1 \cup B_2) = e(B_1 \cup \tau(B_2)) \le \sup\,(H)$, d'où le résultat.

8.2. Comparaison avec la capacité

Proposition [H] Pour tout $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ on a

$$e(B) \ge c(B) .$$

Corollaire. On a $\quad e(B^{2n}(r)) = \pi r^2 .$

Démonstration. On peut supposer B compact. Soit $H \in \mathcal{H}_+$ tel que $\exp(H)(B) \cap B = \varnothing$. Il s'agit de montrer $\sup\,(H) \ge c(B)$, c'est-à-dire de trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un $F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ tel que $c(F) \le \sup\,(H) + \varepsilon$. Fixons donc un tel ε.

Soit U un voisinage compact de B tel que $\varphi_1(U) \cap U = \varnothing$, et soit $C > 0$ assez grand (ceci sera précisé par la suite). On construit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}, B)$ tel que

$F(z) = 3\pi|z|^2 + b$ hors d'un compact

F est constant près de la frontière de U : donc U et $\mathbb{R}^{2n} \setminus U$ sont stables par $\exp\,(F)$

pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n} \setminus U$ on a $\langle z, F'(z) \rangle - 2F(z) < -C$.

(il est aisé de construire un tel F, par exemple en choisissant une boule $B^{2n}(R)$ contenant U et en imposant $F|B^{2n}(R) \setminus U = \mathrm{cste}$ et $H(z)|\mathbb{R}^{2n} \setminus B^{2n}(R) = f(|z|^2)$).

Considérons ensuite les fonctionnelles sur E :

$$A_{1,H}(x) = \int_0^{1/2} \{ \tfrac{1}{2}\langle x, -i\dot{x} \rangle - 2H_{2t}(x) \}\, dt$$

$$A_{2,F}(x) = \int_{1/2}^{1} \{ \tfrac{1}{2}\langle x, -i\dot{x} \rangle - F(x) \}\, dt ,$$

$$A_{H,F}(x) = A_{1,H}(x) + A_{2,H}(x)$$

$$= A(x) - \int_0^{1/2} 2H_{2t}(x)\, dt - \int_{1/2}^{1} F(x)\, dt .$$

Lemme 1. On suppose $A_{H,F}(x) = 0$. Alors

(1) $x(t) = \varphi_{2t}(z)$ pour $0 \le t \le \frac{1}{2}$
$x(t) = \psi_{t-1/2}(z')$ pour $\frac{1}{2} \le t \le 1$, où (ψ_t) est le flot de X_F
x est continue donc $x(\frac{1}{2}) = \varphi_1(z) = z'$ et $x(0) = z = \psi_{1/2}(z')$.

(2) $A_{1,H}(x) \le C_1$ où C_1 ne dépend que de H.

(3) $A_{H,F}(x) \le 0$ si $C \ge 2C_1$

Démonstration. (a) Comme dans la preuve du principe de Hamilton (cf. 2.5), on a $\dot{x}(t) = 2X_{H_{2t}}(x(t))$ pour $0 \le t \le \frac{1}{2}$ et $\dot{x}(t) = X_F(x(t))$ pour $\frac{1}{2} \le t \le 1$. On en déduit les deux premières égalités. La continuité vient de ce qu'un lacet $H^{1/2}$ ne peut avoir de discontinuité du premier ordre (cf. 1.2).

(2) Le (1) implique $A_1(x) = F(x(0))$ où F est une fonction à support compact et qui ne dépend que de H, d'où le résultat.

(3) D'après le (1) on a $\psi_{1/2} \circ \varphi_1(z) = z$. Comme (ψ_t) laisse U invariant et que $U \cap \varphi_1(U)$ est vide, ceci implique $z \in \mathbb{R}^{2n} \setminus U$. On en déduit $x(\frac{1}{2}) = z$ donc $x(t) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus U$ pour $\frac{1}{2} \le t \le 1$. Il en résulte

$$A_{2,F}(x) = \int_{1/2}^{1} \{ \tfrac{1}{2}\langle x, 2F'(x)\rangle - 2F(x) \}\, dt < -\tfrac{1}{2} C$$

d'où $A_{H,F}(x) < C_1 - \frac{1}{2} C < 0$. □

On suppose dorénavant $C \ge 2C_1$. Alors le lemme 1 implique que $A_{H,F}$ n'a pas de valeur critique positive (la condition (PS) est vérifiée à cause du choix de 3π).

Lemme 2. Soit

$$d = \sup_{\gamma \in \Gamma} \; \inf_{x \in \gamma(S^+)} A_{H,F}(x).$$

Alors $d \le 0$.

Démonstration. Supposons au contraire $d > 0$. Alors la preuve de la proposition 3.4 montre que d est une valeur critique de $A_{H,F}$, ce qui contredit le lemme 1.

Fin de la preuve de la proposition. Par définition de $c(F)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $A_F | \gamma(S^+) \ge c(F) - \varepsilon$. Si $x \in \gamma(S^+)$, on a alors

$$0 \ge A_{H,F}(x)$$
$$\ge A_F(x) - \int_0^{1/2} 2H_{2t}(x)dt$$
$$\ge c(F) - \varepsilon - \sup(H)$$

ce qui implique $c(F) \le \sup(H) + \varepsilon$. □

Remarque. Dans la définition de l'énergie de disjonction il est esentiel de demander que le s équations de Hamilton soient intégrables sur $\mathbb{R}^{2n}$ tout entier. En effet, on a

Proposition. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une fonction $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0,\varepsilon])$ telle que, en un temps 1, toutes les trajectoires des équations de Hamilton $\dot{x} = X_H \circ x$ partent vers l'infini.

Démonstration. Il suffit de construire l'exemple sur $\mathbb{R}^2$, ensuite on fera un produit. On part d'un hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \to [0,\varepsilon]$ à support compact disjoignant la boule $B = B^2(\varepsilon)$. Le champ $X_H | B$ a donc toutes ses orbites qui partent à l'infini (de B !) en un temps 1, et il en est de même de $X_H | B \setminus \{0\}$. Le revêtement universel de $B \setminus \{0\}$ étant symplectomorphe à $\mathbb{R}^2$, on obtient l'exemple annoncé.

Une application frappante de l'énergie de disjonction est le résultat suivant (cf. [Vi 3]).

Corollaire. Soient $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à support compact sur $\mathbb{R}^{2n} \times I$, et $\varphi_i = \exp(H_i)$. On suppose $H_i \to 0$ et $\varphi_i \to \varphi$ au sens C^0. Alors $\varphi = \mathrm{id}$.

Démonstration. Sinon, il existe une boule fermée B de rayon $\varepsilon > 0$ que φ disjoint. Donc φ_i disjoint B pour i assez grand, ce qui implique $e(\varphi_i) > \pi\varepsilon^2$. or l'hypothèse $H_i \to 0$ entraîne $e(\varphi_i) \to 0$, contradiction.

Question. Supposons que les φ_i sont à support dans un compact fixe et que $\varphi_i \to \varphi$ au sens C^0. A-t-on $e(\varphi_i) \to 0$?

8.3. Cas de la dimension 2

Proposition. Soit $B \subset \mathbb{R}^2$. On note B_i les composantes connexes de $\overline{B}$, et $\hat{B}_i$ la réunion de B_i et des composantes bornées de $\mathbb{R}^2 \setminus B_i$. On a alors

$$c(B) = e(B) = \sup \lambda(\hat{B}_i) \qquad \text{(mesure de Lebesgue).}$$

Démonstration. On peut supposer B compact.

(a) Supposons d'abord B connexe et à bord C^∞ : alors $B = \hat{B}$ est équivalent à un disque par un symplectomorphisme global, d'où le résultat.

(b) Si B est un compact connexe quelconque, il admet une suite de voisinages U_i ayant les propriétés du (a) et telle que $c(U_i) \longrightarrow c(B)$, $e(U_i) \longrightarrow e(B)$ et $\lambda(U_i) \longrightarrow \lambda(B)$, d'où le résultat.

(c) Si B n'a qu'un nombre fini de composantes, à symplectomorphisme près on peut supposer que les $\hat{B}_i$ maximaux (non contenus dans un autre $\hat{B}_j$) sont deux à deux séparés par une droite. Donc la formule sur l'énergie d'une réunion donne $e(B) = \sup \lambda(\hat{B}_i)$. D'autre part, le (a) implique $c(B) \geq \sup c(\hat{B}_i) = \sup \lambda(\hat{B}_i)$. Le résultat suit alors de la majoration $c(B) \leq e(B)$.

(d) Le cas général se ramène au cas (c) en utilisant la régularité extérieure de c, e et λ.

8.4. Autres propriétés

L'énergie de disjonction du tore standard $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ est égale à πr^2 (la majoration est claire, la minoration résulte de la comparaison avec la capacité). La question sur la positivité de la capacité d'une sous-variété lagrangienne (6.6) peut être affaiblie :

Question. L'énergie de disjonction d'une sous-variété lagrangienne fermée est-elle positive ?

La méthode des disques holomorphes de [G1] devrait donner une réponse positive dans le cas où la sous-variété est rationnelle.

Une autre approche de l'énergie de disjonction est dûe à C. Viterbo [Vi4] via les fonctions génératrices. La propriété élémentaire suivante a son origine dans un résultat de ce papier et répond à une question de Hofer et Viterbo.

Proposition. Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ borné. Il existe $c(B) < +\infty$ tel que pour toute difféotopie hamiltonienne (φ_t) à support dans B on a $e(\varphi_1) \leq c(B)$. Autrement dit : il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $\exp(H) = \varphi_1$ et $|H| \leq c(B)$.

Pus précisément : soit ψ un symplectomorphisme compactement hamiltonien tel que B et $\psi(B)$ sont séparés par un hyperplan. Alors $e(\varphi_1) \leq 8\, e(\psi)$.
16

Démonstration. Soit N un entier très grand. Il existe des symplectomorphismes $\psi_1 = \psi, \psi_2 \ldots \psi_{2N}$ qui sont tous conjugués et tels que $\psi_i(B)$ et $\psi_j(B)$ sont séparés par un hyperplan si

$i \neq j$. On définit pour $0 \leq i \leq N$:

$$\alpha_i = \psi_{2i-1}\, \varphi_{i/N}\, \psi_{2i-1}^{-1}$$

$$\beta_i = \psi_{2i}\, \varphi_{i/N}^{-1}\, \psi_{2i}^{-1}.$$

Alors α_i est à support dans $\psi_{2i-1}(B)$ et β_i dans $\psi_{2i}(B)$ donc les supports sont deux à deux séparés par un hyperplan. On en déduit qu'ils commutent et que l'énergie de n'importe quel produit est majorée par le sup des énergies des facteurs. De même pour les deux produits suivants (cf. figures 5 et 6) : 2x

$$\Phi = \prod_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \beta_i \qquad \leq 2 \max_i e(\alpha_i \beta_i)$$

$$\Psi = \Phi\, \beta_N^{-1} = \prod_{0 \leq i \leq N-1} \alpha_{i+1} \beta_i. \qquad \leq 2 \max e(\alpha_{i+1} \beta_i)$$

Comme β_N est conjugué à φ^{-1} on a $e(\varphi) = e(\beta_N) = e(\Psi^{-1}\Phi) \leq e(\Phi) + e(\Psi)$ donc il reste à majorer $e(\Phi)$ et $e(\Psi)$. D'après la remarque faite ci-desus il suffit de majorer $e(\alpha_i\beta_i)$ et $e(\alpha_{i+1}\beta_i)$:

(a) La décomposition $\alpha_i\beta_i = \psi_{2i-1} \cdot \varphi_{i/N}\, (\psi_{2i-1}^{-1}\psi_{2i})\, \varphi_{i/N}^{-1} \cdot \psi_{2i}^{-1}$ montre que $e(\alpha_i\beta_i)$ est majoré par $2\,(e(\psi_{2i-1}) + e(\psi_{2i})) = 4\, e(\psi)$.
(b) On peut écrire $\alpha_{i+1}\beta_i = \gamma\gamma'$, où

$$\gamma = \psi_{2i+1}\, \varphi_{i+1/N}\, \psi_{2i+1}^{-1}\, \psi_{2i}\, \varphi_{i/N}^{-1}\, \psi_{2i}^{-1}$$

$$\gamma' = \psi_{2i}\, \varphi_{i+1/N}\, \varphi_{i/N}^{-1}\, \psi_{2i}^{-1}.$$

On a $e(\gamma) \leq 4\, e(\psi)$ comme dans (a), et $e(\gamma') = e(\varphi_{i+1/N}\varphi_{i/N}^{-1}) = O(1/N)$.

Prenant N arbitrairement grand on en déduit la majoration annoncée.

Remarques. (1) La constante 8 peut sans doute être remplacée par 2 (mais pas 1 ?).
(2) Le support de H ne peut être pris dans B : en effet l'invariant de Calabi de $\exp(H)$ serait alors borné par $c(B).\mathrm{vol}(B)$ alors qu'il peut être arbitrairement grand pour un φ_1 comme dans la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[AM] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, Reading (Mass.), 1978.

[AR] R. Abraham, J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin/ Cummings, Reading (Mass.), 1967.

[Ak] N.I. Akhiezer, *The calculus of variations*, Blaisdell, New York 1962.

[Ar1] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grundlehren **250**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[Ar2] V.I. Arnold, *First steps in symplectic topology*, Russ. Math. Surv. **41** (1986), 1-21.

[Ba] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 174-227.

[Ben1] D. Bennequin, *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann, et structures symplectiques*, Séminaire Bourbaki n° 657 (février 1986), Astérisque **145-146** (1987), p. 111-136.

[Ben2] D. Bennequin, *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact...* Séminaire Bourbaki n° 725 (juin 1990).

[Ber] H. Berestycki, *Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens*, Séminaire Bourbaki n° 603 (février 1983), Astérisque **105-106** (1983), p. 105-128.

[BLMR] H. Berestycki, J.-M. Lasry, G. Mancini, B. Ruf, *Existence of multiple periodic orbits on star-shaped hypersurfaces*, Comm. Pure and Appl. Math. **38** (1985), 253-290.

[BR] V. Benci, P. Rabinowitz, *Critical point theory for indefinite functionals*, Invent. Math. **52** (1979), 336-352.

[Ch] G. Chilov, *Analyse mathématique : fonctions de plusieurs variables réelles*, Mir, Moscou 1975.

[Cl] F.H. Clarke, *A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories*, Proc. Am. Math. Soc. **76** (1979), 186-188.

[CW] C. Croke, A. Weinstein, *Closed curves on convex hypersurfaces and periods of nonlinear oscillators*, Inv. Math. **64** (1981), 199-201.

[CZ] C.C. Conley, E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture by V. I. Arnold*, Invent. Math. **73** (1983), 33-49.

[D] N. Desolneux-Moulis, Séminaire Bourbaki n° 552 (février 1980), Springer Lect. Notes in Math. **842**.

[Ed] R.E. Edwards, *Fourier series*, vol.2, Springer Grad. Texts in Math. **85**, 1982.

[Ek] I. Ekeland, *Convex methods in Hamiltonian mechanics*, Springer Ergebnisse **19**, 1990.

[EH1] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic Topology and Hamiltonian Dynamics*, Math. Z. **200** (1989), 355-378.

[EH2] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic Topology and Hamiltonian Dynamics II*, Math. Z. 203 (1990), 553-568.

[El1] Ya.M. Eliashberg, *Rigidity of symplectic and contact structures*, manuscrit 1981.

[El2] Ya.M. Eliashberg, *A theorem on the structure of wave fronts and its applications to symplectic topology*, Funct. Anal. and Appl. **19** (1987), 227-231

[El3] Ya.M. Eliashberg, Communication au Congrès de Systèmes Dynamiques, Lyon juillet 1990

[F] A. Floer, *Morse theory and Lagrangian intersections*, J. Diff. Geom **25** (1988), 513-547.

[FH] A. Floer, H. Hofer, en préparation.

[FHV] A. Floer, H. Hofer, C.Viterbo, *The Weinstein conjecture in* $P \times \mathbb{C}^{\ell}$, Math. Z. **203** (1990), 469-482.

[G1] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1983), 307-347.

[G2] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse **9**, 1986.

[G3] M. Gromov *Hard and soft symplectic geometry*, in Proc. Int. Cong. Math. Berkeley 1986, vol. 1, 81-98, Amer. Math Soc. 1987.

[H] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, préprint Essen-Bochum--Düsseldorf 1990.

[HV] H. Hofer, C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in cotangent bundles and related results*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1989)

[HZ] H. Hofer, E. Zehnder, *Periodic solutions on hypersurfaces and a theorem by C. Viterbo*, Invent. Math. **90** (1987), 1-9.

[K] C. Kress, *Linear integral equations*, Springer Appl. Math. Sci. **82**, 1989.

[Le] J. Leray, *La théorie des points fixes et ses applications en analyse*, Proc. Int. Cong. Math. Harvard 1950, vol. II, p. 202-208.

[LM] P. Libermann, Ch.-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Reidel, Boston 1987.

[McD] D. McDuff, *Application of convex integration to symplectic and contact geometry*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987),107-133.

[P] R.S. Palais, *Critical point theory and the minimax principle*, Proc. Symp. Pure Math. **15** (1968), Global analysis, Amer. Math. soc., 1970, p. 185-212.

[Ra1] P. Rabinowitz, *A variational method for finding periodic solutions of differential equations*, in *Nonlinear Evolution Equations, Madison 1977*, Acad. Press, New York 1978.

[Ra2] P. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Math. Pure and Appl. **31** (1979), 157-184.

[Ro] R.T . Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.

[Sc] J.T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York-London-Paris 1969.

[Si] J.-C. Sikorav, *Quelques propriétés des plongements lagrangiens*, préprint 1990.

[Va] I. Vaisman, *Symplectic geometry and secondary characteristic classes*, Birkhaüser Progress In Math. **72**, Boston 1987.

[Vi1] C. Viterbo, *A proof of the Weinstein conjecture in* $\mathbb{R}^{2n}$, Annales de l'Inst. H. Poincaré Analyse non linéaire 4 (1987), 337-357.

[Vi2] C. Viterbo, *Equivariant Morse theory for starshaped Hamiltonian systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 621-655.

[Vi3] C. Viterbo, *Capacités symplectiques et applications*, Séminaire Bourbaki n° 695 (juin 1989).

[Vi4] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, préprint 1990.

[W1] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, C.B.M.S. Reg. Conf. Series **29**, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1977.

[W2] A. Weinstein, *Bifurcations and Hamilton's principle*, Math. Z. **159** (1978), 235-248.

[W3] A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz's periodic orbit theorem*, J. Diff. Equations **33** (1979), 353-358.

[W4] A. Weinstein, *A symplectic rigidity theorem*, Duke Math. J. **50** (1983), 1121-1125.

[Ze] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. I-III-IV, Springer 1984.

[Zy] A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. 2, Cambridge U.P., 1959 (2^e édition).

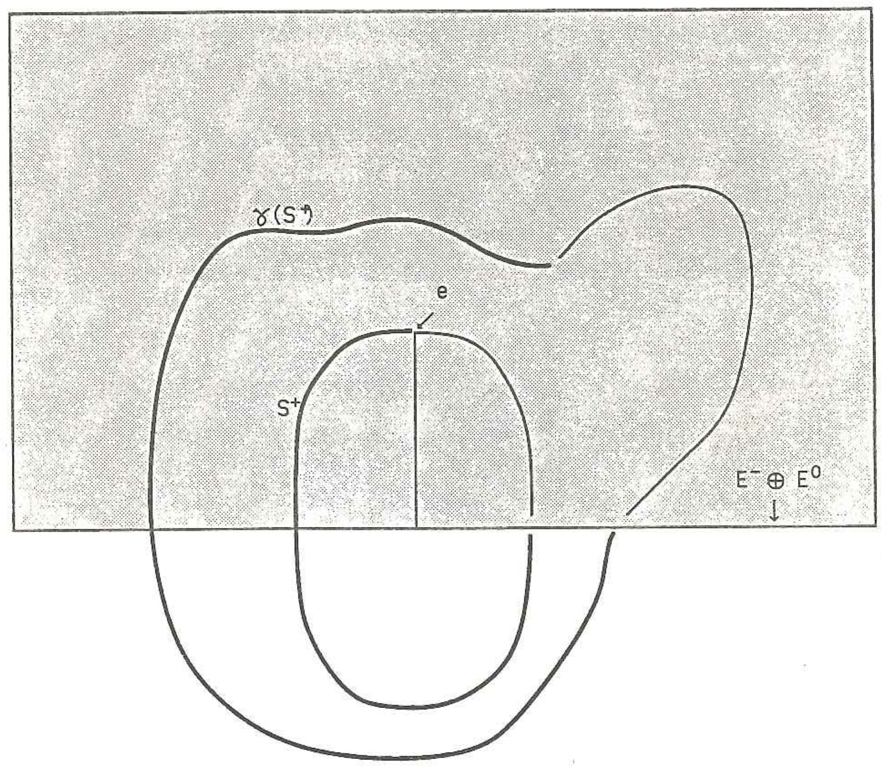

Figure 1

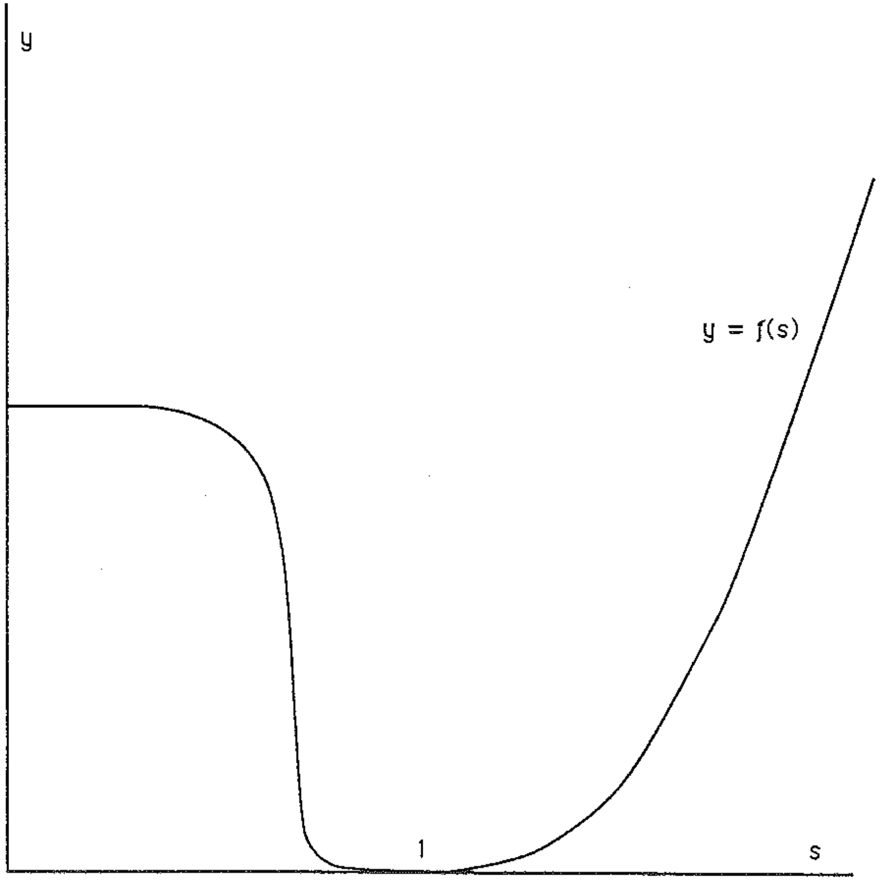

Figure 2

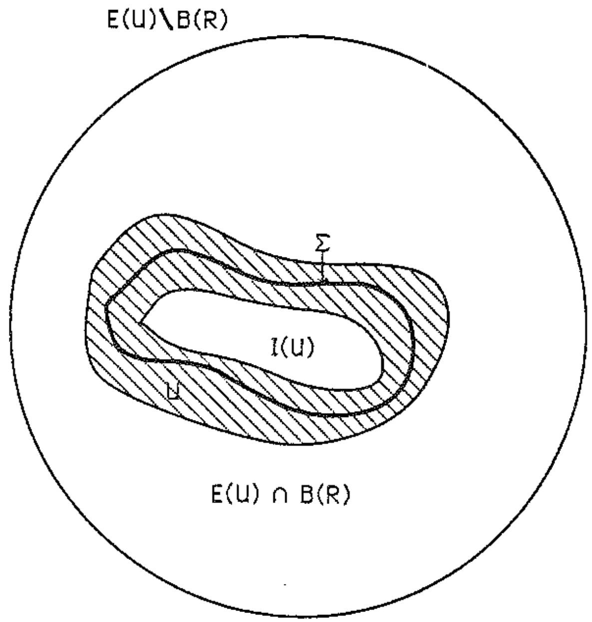

Figure 3

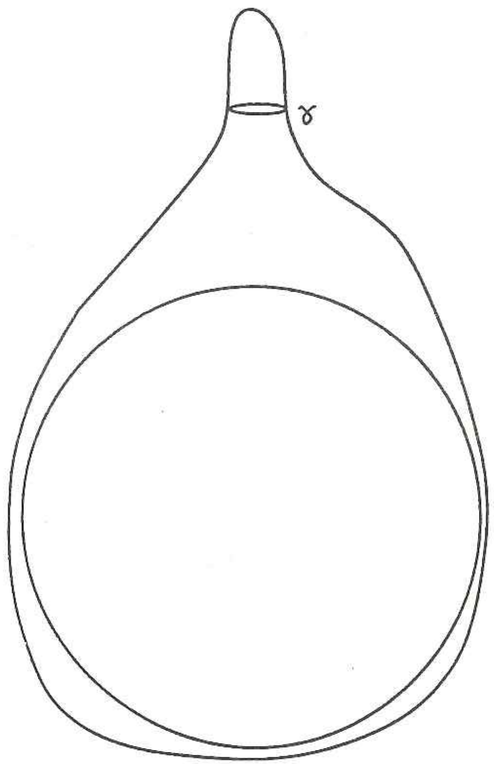

Figure 4

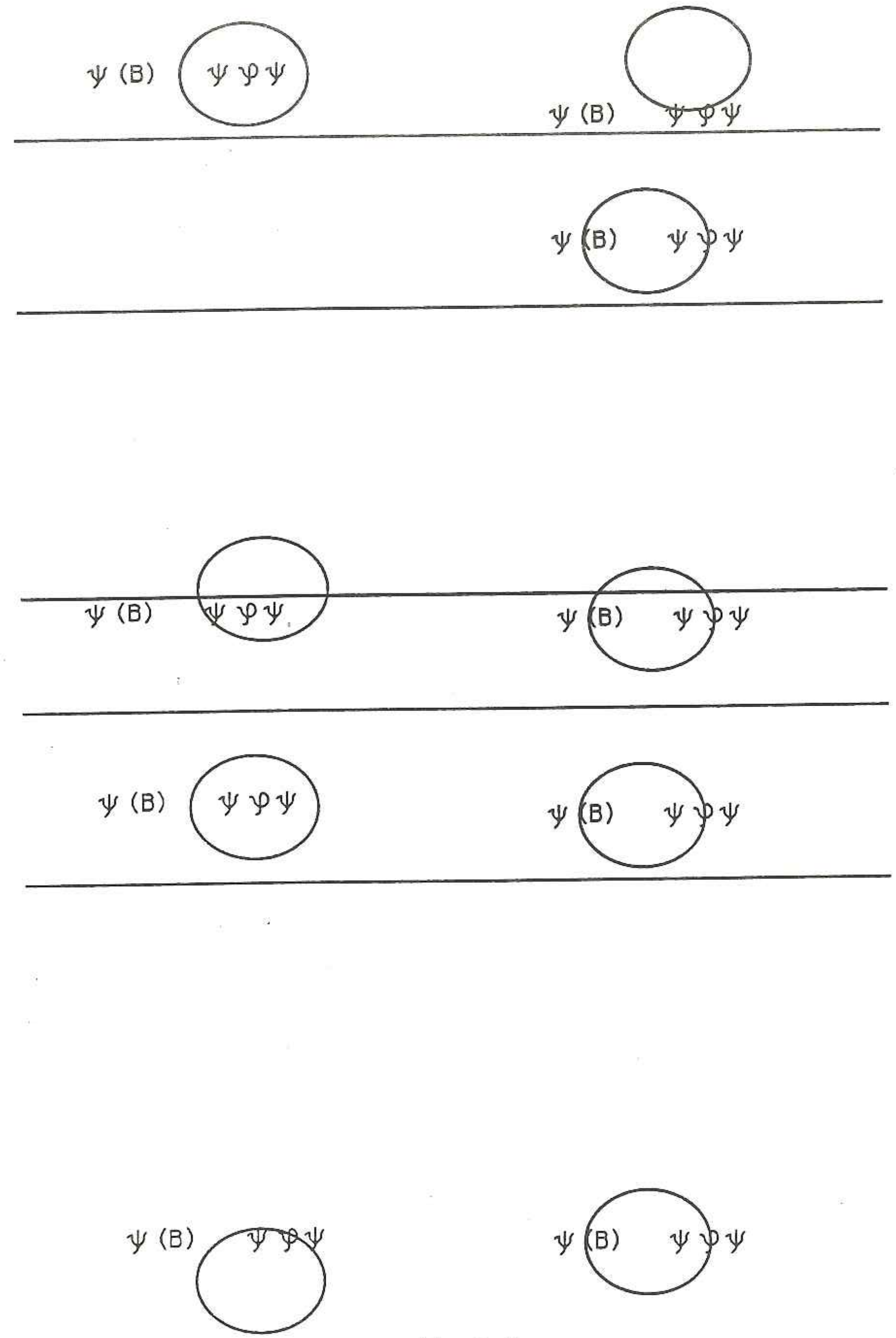

Figure 5

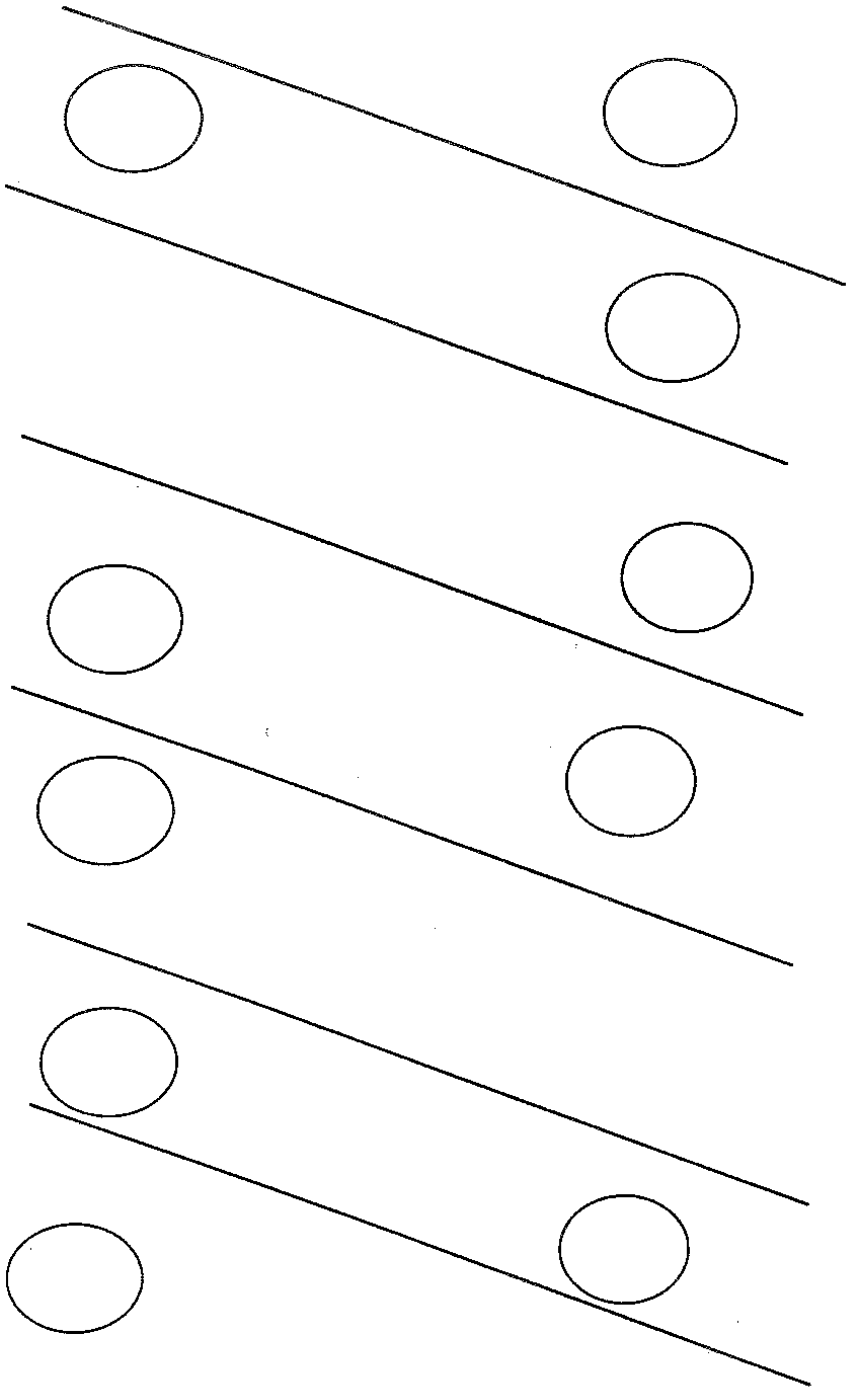

Figure 6

Finito di stampare nell'ottobre 1990
dall'ETS EDITRICE PISA