Indispensable 6 : Application

I Définir une application

Définition 1. Soient E et F deux ensembles. Définir une application f de l'ensemble E dans l'ensemble F, c'est choisir pour tout élément x de l'ensemble E un unique élément de F que l'on appelle l'**image** de x par f et que l'on note $f(x)$. On dit aussi que x est l'antécédent de $f(x)$ par f.
On notera alors :

E est appelé l'ensemble de définition de l'application f. L'ensemble de tous les éléments de F pouvant s'écrire $f(x)$ pour un $x \in E$ est appelé l'image de l'application f.

Méthode. Lorsque l'on vous demande l'ensemble de définition d'une fonction f, on souhaite que vous donniez le plus grand ensemble E pour lequel f est une application *ie* l'ensemble des x tels que l'on puisse définir $f(x)$. Dans ce cas, on notera D_f l'ensemble de définition de f.

Exemple. $D_{\frac{1}{x}}$ =.........., $D_{\sqrt{x}}$ =.......... et $D_{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ =..........

Définition 2 (Composition)**.** Soient E, F et G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.
On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie (lorsque c'est possible) par :

ATTENTION. L'ordre des fonctions dans la composition est TRÈS important.

Exemple. Prenons les applications $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g \circ f(x) = \text{.......} \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \text{.......}$$

Prenons les applications $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x \end{array} \right.$.

$$g \circ f(x) = \text{.......} \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \text{.......}$$

remarque. Pour que $f \circ g(x)$ existe, il faut que $x \in D_g$ et que $g(x) \in D_f$

EXERCICE 1.
Prenons $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ et $g : x \mapsto 2x+1$.

1. Donner les ensembles de définition des fonctions f et g
2. Exprimer la fonction $f \circ g$ et donner son ensemble de définition.
3. Exprimer la fonction $g \circ f$ et donner son ensemble de définition.

EXERCICE 2. Faire de même avec les fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto 3x^2$.

II Inverser une application

Dans cette partie, nous considérerons les exemples suivants :

Définition 3 (Injection)**.** Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.
On dit que f est une **injection** ou qu'elle est **injective** si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f (*ie* aucun antécédent ou un seul).

Exemple.

f ...., g .... et h ....

Définition 4 (Surjection)**.** Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.
On dit que f est une **surjection** ou qu'elle est **surjective** si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f (*ie* un, deux, trois antécédents ou plus).

Exemple.

f ...., g .... et h ....

Définition 5 (Bijection)**.** Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.
On dit que f est une **bijection** ou qu'elle est **bijective** si tout élément de F admet un **unique** antécédent par f.

Proposition 6. Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exemple.

f ...., g .... et h ....

III Exprimer l'inverse d'une bijection

Définition 7 (Réciproque)**.** Soient E et F deux ensembles et f bijective de E dans F.
On appelle **application réciproque** de f, et on note f^{-1}, l'application de F dans E qui a un élément de F associe son antécédent par f.

Ainsi, si $y = f(x)$, alors $f^{-1}(y) = x$.

Exemple. L'application $a : x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective et son application réciproque est : ....

Méthode. Pour trouver l'inverse d'une fonction f, on part de l'équation $f(x) = y$ et on fait en sorte de l'exprimer sous la forme $g(y) = x$.

EXERCICE 3. On considère les applications suivantes :

$$b : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 5x - 4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad c : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

Montrer que b et c sont des bijections et calculer leurs applications réciproques.

Proposition 8. Soient E et F des ensembles et f une bijection de E dans F.
Alors,

$$f \circ f^{-1} : \qquad\qquad \text{et} \quad f^{-1} \circ f :$$

Ce qui s'écrit également $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Proposition 9 (Réciproque)**.** Soit $f : E \to F$ une application.
S'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E$$

Alors f est une application bijective de réciproque $f^{-1} = g$.

ATTENTION. Il faut avoir les deux égalités, avoir uniquement l'une des deux ne suffit pas.

Exemple. La réciproque de l'application fonction g est : ....

EXERCICE 4. On considère les applications suivantes :

$$d : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad u : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

Montrez qu'elles sont bijectives et calculer leur application réciproque.

EXERCICE 5. On considère, pour $\alpha \neq 0$ l'application suivante :

$$v : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^\alpha \end{array} \right.$$

Montrez que cette application est bijective pour tous $\alpha \neq 0$.

Proposition 10 (Composition de bijection)**.**
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des bijections. Alors $g \circ f$ est aussi une bijection et sa réciproque est :

Exemple. L'application $w : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{e^x} \end{array} \right.$ est une bijection et sa réciproque est $w^{-1} =$....................

EXERCICE 6. Pour chacune de ces applications, donner l'ensemble de définition, dire si elle est bijective et, le cas échéant, donner sa réciproque.

$$f : x \mapsto (2x-3)^5,\ g : x \mapsto |x|,\ h : x \mapsto e^{-x} \text{ et } u : x \mapsto \ln(3x^2+1)$$