

DM (sujet B)

Pour ceux ayant eu entre 3 et 10 compris

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - x e^x + e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. En déduire le signe de φ sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer que $\forall x \geq 1$, $x^2 - x \geq 0$, en déduire $x^2 - x + 1 \geq 1$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x(x^2 - x + 1)e^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
5. Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
6. Que peut on en déduire sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.