DM d'avril à rendre le 21 avril

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans une part importante dans l'appréciation des copies. Une réponse mettant en avant un bon raisonnement mais n'aboutissant pas à la bonne réponse seront valorisées.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

EXERCICE 1 (Calcul d'intégrale)**.**

1. Calculer l'intégrale $\int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}\,dx$.
2. Calculer l'intégrale $\int_1^3 t^3 \ln(t)\,dt$.
3. Calculer l'intégrale $\int_0^2 \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,ds$ par le changement de variable $t = s^2$.
4. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\,dx$.

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Partie A : Étude de fonction

1. Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

   Par la suite nous étudierons la fonction f sur l'ensemble $D = \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction f est continue, dérivable et de classe C^∞ sur D.
3. Calculer les dérivées f' et f''.
4. Donner les variations de la fonction f sur D.
5. Calculer les limites $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire les extrema de f.
6. Établir le tableau de signe de f''.

Partie B : Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction g sur D par $g(x) = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Justifier que f admet une primitive F sur D (on ne demande pas à la calculer) et exprimer g à l'aide de F.
2. En déduire que g est de classe C^1 sur D et montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{e^{2x}}{x}$.
3. Montrer que, pour tout $x \geqslant \frac{1}{2}$, $g(x) \geqslant e\ln(2x)$.

   En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) \leqslant e^{2x}\ln(2x)$.

   En déduire $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
5. Déterminer le tableau de variation de g sur D.
6. Donner l'équation de la tangente au graphe de g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel strictement positif que l'on note u_n tel que
$$g(u_n) = n$$
8. Déterminer u_0.
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
10. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.