Correction du DM d'avril

EXERCICE 1 (Calcul d'intégrale).

1. On peut calculer cette intégrale par calcul direct, on reconnait une fonction de la forme $u' \ln(u)$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}\,dx &= \left[\frac{1}{4}(\ln(x))^4\right]_1^e \\ &= \frac{1}{4}(\ln(e))^4 - \frac{1}{4}(\ln(1))^4 \\ &= \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}0^4 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2. Nous allons calculer cette intégrale par intégration par partie.

   Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t^3$, alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{4}t^4$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 t^3 \ln(t)\,dt &= \left[\frac{1}{4}t^4 \ln(t)\right]_1^3 - \frac{1}{4}\int_1^3 t^3\,dt \\ &= \frac{1}{4}3^4\ln(3) - \frac{1}{4}1^4\ln(1) - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^3 \\ &= \frac{81}{4}\ln(3) - \frac{81}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{81}{4}\ln(3) - 5\end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $t = s^2$, on a alors $dt = 2s\,ds$.

   On trouve alors

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,ds &= \int_0^4 \frac{dt}{2\sqrt{1+t}} \\ &= \left[\sqrt{1+t}\right]_0^4 \\ &= \sqrt{1+4} - \sqrt{1} \\ &= \sqrt{5} - 1\end{aligned}$$

4. Effectuons le changement de variable $t = x + 2$, on a alors $dt = dx$.

   On trouve alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\,dx &= \int_2^4 \frac{(t-2)^2}{t}\,dt \\ &= \int_2^4 \frac{t^2 - 4t + 4}{t}\,dt \\ &= \int_2^4 t\,dt - 4\int_2^4 \,dt + 4\int_2^4 \frac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_2^4 - 4\left[\frac{1}{2}t\right]_2^4 + 4\left[\ln(t)\right]_2^4 \\ &= 2 - \frac{1}{2} - 4 + 4\ln(4) - 4\ln(2) \\ &= 8\ln(2) - 4\ln(2) - \frac{5}{2} \\ &= 4\ln(2) - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

EXERCICE 2. Partie A : Étude de fonction

1. f est définie pour $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc sur D.

   x est un polynôme donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc D.

   x ne s'annule pas sur D.

   Par quotient de fonctions de classe C^∞, f est de classe C^∞ et donc continue et dérivable sur D.
3. Soit $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{x-1}{x^2}e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4}e^x + \frac{x-1}{x^2}e^x \\ &= \left(\frac{-x+2}{x^3} + \frac{x^2-x}{x^3}\right)e^x \\ &= \frac{x^2-2x+2}{x^3}e^x \end{aligned}$$

4. L'exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $\frac{e^x}{x^2}$ est positive sur D.

   Donc f' est sur signe de $x-1$.

	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	

5. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   La limite de f en $+\infty$ est une forme indéterminée.

   Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   D'après le tableau de variation, f admet un minimum local en 1 et $f(1) = e$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, f admet un minimum global en 1 et n'admet pas de maximum.
6. Sur D, on a $x > 0$ donc $\frac{e^x}{x^3} > 0$.

   Donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 2x + 2$.

   Regardons son discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.

   Le trinôme est de signe constant, donc $f''(x) > 0$ pour $x \in D$.

Partie B : Fonction définie par une intégrale

f est continue donc admet une primitive F sur D.
On a alors, pour tout $x \in D$, $g(x) = F(2x) - F(1)$.

F est de classe C^1 sur D car il s'agit de la primitive de f.
$2x$ est un polynôme comme de classe C^1 sur D et pour tout $x \in D$, $2x \in D$.
Par composition de fonction de classe C^1, g est de classe C^1 sur D.

Pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2F'(2x) \\ &= 2f(2x) \\ &= 2\frac{e^{2x}}{2x} \\ &= \frac{e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a $2x \geqslant 1$.

Donc, dans l'intégrale définissant g, on a $t \geqslant 1$ et donc $e^t \geqslant e$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\ dt &\geqslant e \int_1^{2x} \frac{1}{t}\ dt \\ &\geqslant e\left[\ln(t)\right]_1^{2x} \\ &\geqslant e(\ln(2x) - \ln(1)) \\ &\geqslant e\ln(2x) \end{aligned}$$

Or $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e\ln(2x) = +\infty$

Par comparaison avec une fonction divergeant vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Pour $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$, $2x \in]0;1]$

Donc, dans l'intégrale définissant g, on a $t \leqslant 1$, donc $e^t \geqslant e^{2x}$ et $-e^t \leqslant -e^{2x}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_{2x}^1 \frac{e^t}{t}\ dt \\ &\leqslant -e^{2x}\int_{2x}^1 \frac{dt}{t} \\ &\leqslant -e^{2x}\left[\ln(t)\right]_{2x}^1 \\ &\leqslant -e^{2x}\left(\ln(1) - \ln(2x)\right) \\ &\leqslant e^{2x}\ln(2x) \end{aligned}$$

Or, par continuité de $x \mapsto e^{2x}$, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{2x} = e^{2\times0} = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to0^+} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(2x) = -\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{2x}\ln(2x) = -\infty$

Par comparaison avec une fonction divergeant vers $-\infty$, on trouve que $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$.

On a $g'(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ pour tout $x \in D$.

Donc $g'(x)$ est strictement positive sur D.

Finalement g est strictement croissante sur D.

L'équation de la tangente au graphe de g en $x = \frac{1}{2}$ est

$$\begin{aligned} y &= g\left(\frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= F\left(\frac{1}{2}\times2\right) - F(1) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{2\times\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\ &= F(1) - F(1)\left(x - \frac{1}{2}\right)2e^1 \\ &= 2e\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= e(2x-1) \end{aligned}$$

g est continue et strictement croissante sur D.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est compris entre $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_n tel que $g(u_n) = n$.

On a $g(u_0) = 0$, donc $F(2u_0) = F(1)$.

$2u_0 = 1$ *ie* $u_0 = \frac{1}{2}$ convient.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_{n+1}) - g(u_n) = n + 1 - n = 1 \geqslant 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_{n+1}) \geqslant g(u_n)$.

Or la fonction g est croissante.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers une limite finie ℓ ou diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Par continuité de g, on a alors $\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell)$.

Or $g(u_n) = n$ donc $\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$.

C'est absurde.

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.