DM de février à rendre le 25 février

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{(\ln(x)-1)x}{\ln(x+1)}$, notamment en créant un programme afin de chercher les zéros de la fonction.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par $g(x) = (x+1)\ln(x)\ln(x+1) - x\ln(x) + x$.

1. Donner le domaine de définition des fonctions ln et $x \mapsto \ln(1+x)$. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Pour u, v et w des fonctions, montrer que $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.
3. Calculer la dérivée de g et montrer que g' se met sous la forme $g'(x) = \ln(x+1)\varphi(x)$.
4. Montrer que sur $\mathcal{D}_g$, g' et φ sont de même signe.
5. Calculer la dérivée de φ.
6. Donner le tableau de signe de φ' et le tableau de variation de φ. (on ne demande pas les limites)
7. Montrer que φ est minimal en un point x_0 à trouver et que $\varphi(x_0) = 2$. En déduire le signe de φ.
8. En déduire le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g.
9. Montrer que $g(x) = x\ln(x)(\ln(1+x) - 1) + \ln(x)\ln(x+1) + x$ pour tout $x \in \mathcal{D}_g$.

   Calculer la limite de g en $+\infty$.
10. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. Montrer que $g(x) = (x+1)x\ln(x)\frac{\ln(x+1)}{x} - x\ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathcal{D}_g$.

    Montrer alors que g est prolongeable par continuité et donner la formule de son prolongement par continuité $\tilde{g}$.
12. En déduire le signe de g
13. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.
14. Montrer que $\tilde{g}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble à préciser.

Partie B : Étude de la fonction principale

Reprenons l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{(\ln(x)-1)x}{\ln(x+1)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)}$. Puis donner l'ensemble de définition de f.

   Par la suite, nous nous placerons dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La fonction f admet elle un prolongement par continuité en 0 ?
5. Donner le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
7. En déduire la limite de f en $+\infty$.
8. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.
9. En déduire qu'il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Quelle est sa valeur ?

Partie C : Méthode par dichotomie

Le but de cette partie est d'écrire un programme Scilab permettant de trouver une valeur approchée du réel x_0 trouvé à la question précédente. Pour ce faire, nous allons élaborer un algorithme de recherche par dichotomie.

1. Avant de s'attaquer l'algorithme, commencez par écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur de rentrer un réel x et qui renvoie la valeur $f(x)$.
2. Écrire un programme permettant de tracer la fonction f sur $]0;3[$.

   Revenons à l'algorithme de recherche par dichotomie.
3. Donner un réel a tel que $f(a) < 0$. Donnez un réel b tel que $f(b) > 0$. (Il y a plusieurs réponses possibles)
4. Montrer que $a < b$, puis que $a < x_0 < b$.

   On cherche donc x_0 dans l'intervalle $]a;b[$.

   L'idée de la recherche par dichotomie est de réduire l'intervalle de recherche au fur et à mesure.
5. Quel est le réel qui est au milieu de l'intervalle $]a;b[$? Appelons ce réel m.
6. Écrivez un programme Scilab qui calcule $f(m)$ (en assignant les valeurs aux variables a et b). Quel est le signe de $f(m)$?
7. En déduire si $x_0 < m$ ou $m < x_0$.

   Finalement, si $x_0 < m$, on remplace b par m et on recherche x_0 dans $]a;m[$. Si au contraire $m < x_0$, on remplace a par m et on recherche x_0 dans $]m;b[$.

   On reprend alors la procédure avec ces nouveaux a et b.
8. Montrer que, pour α et β réels, α et β sont de même signe si et seulement si $\alpha\beta > 0$.
9. En déduire une condition signifiant que l'image de a et l'image de m sont de même signe. Si cette condition est vérifiée, doit on poser $a = m$ ou $b = m$? Et si elle n'est pas vérifiée ?
10. Donner un programme Scilab qui calcule $f(m)$ pour des valeurs données de a et b et qui modifie a en m si $f(m)$ et $f(a)$ sont de même signe et b en m sinon. Vous pourrez pour ce faire utiliser une structure conditionnelle de type `if` ... `then` ... `else`

    L'idée de l'algorithme est de réitérer ce programme jusqu'à ce que la taille de l'intervalle $]a;b[$ soit suffisamment petite.
11. Pour ce faire, quelle type de boucle doit on utiliser et quelle est alors la condition si l'on souhaite une précision de 10^{-6} sur la valeur de x_0 ?
12. Utilisez les questions précédentes pour écrire un algorithme de recherche par dichotomie permettant de trouver la valeur de x_0 à 10^{-6} près.
13. Utilisez un compteur pour adapter l'algorithme précédent. En prenant $a = 1$ et $b = 3$, en combien d'itération de la boucle l'algorithme trouve-t-il la valeur recherchée ?

Partie D : Méthode de Newton

Pour finir, nous allons voir une dernière méthode de recherche du zéro d'une fonction : la méthode de Newton. Il s'agit d'une méthode généralement bien plus rapide que la méthode par dichotomie dont nous discuterons plus précisément après les vacances. Nous allons ici seulement discuter de la programmation de cette méthode par Scilab.

1. Reprendre la formule de la partie B et écrire une commande Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un réel x et qui calcule $f'(x)$ pour une valeur donnée de x.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) \neq 0$.
3. Écrire une commande Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un réel x et qui calcule la valeur de $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ pour une valeur donnée de x.
4. Posons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = 3$ et $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$.

   Écrire un programme permettant de calculer le terme $n = 20$ de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vous pourrez utiliser une boucle `for`.
5. Donner une commande Scilab donnant la condition : la valeur absolue de $f(y)$ est plus grande que 10^{-6}.
6. Écrire un programme Scilab calculant les termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $f(y_n)$ soit plus inférieur à 10^{-6} en valeur absolue.
7. Comparez les deux résultats obtenus à e, que remarquez vous ?
8. Utiliser un compteur pour compter le nombre d'itérations que mets l'algorithme à trouver la valeur recherchée. La comparer à la valeur trouver avec la méthode par dichotomie.