DM de février

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction logarithme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $1+x>0$ si et seulement si $x>-1$, donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1;+\infty[$.

   g est définie si $\ln(x)$ et $\ln(1+x)$ sont définies, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$

2. Soient u, v et w des fonctions dérivables,
   $(uvw)' = (u \times vw)' = u' \times vw + u \times (vw)' = u'vw + u(v'w+vw') = u'vw + uv'w + uvw'$.

3. Soit $x>0$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \ln(x)\ln(x+1) + \frac{x+1}{x}\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1}\ln(x) - \left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) + 1 \\
&= \ln(x)\ln(x+1) + \frac{x+1}{x}\ln(x+1) + \ln(x) - \ln(x) - 1 + 1 \\
&= \ln(x)\ln(x+1) + \frac{x+1}{x}\ln(x+1) \\
&= \ln(x+1)\left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right) \\
&= \ln(x+1)\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

   On trouve alors $\varphi(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$, pour tout $x>0$.

4. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $x>0$, donc $1+x>1$, et alors $\ln(x+1)>0$ par croissance de ln.

   Finalement, sur $\mathcal{D}_g$, g' et φ sont de même signe.

5. Soit $x>0$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

6. Un carré est toujours positif, donc $x^2>0$ pour tout $x>0$.

   $\varphi'(x)$ est donc du signe de $x-1$.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$		$+$
φ	$\searrow$		$\nearrow$

7. φ est donc minimale en $x_0 = 1$ et $\varphi(1) = \ln(1) + 1 + \frac{1}{1} = 0+1+1 = 2$.

   Donc $\varphi(1) = 2 > 0$ et il s'agit du minimum de φ, donc φ est strictement positive sur $\mathcal{D}_g$.

8. Puisque g' et φ sont du même signe, on trouve :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$\nearrow$	

9. Soit $x>0$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x+1)\ln(x)\ln(x+1) - x\ln(x) + x \\
&= x\ln(x)\ln(x+1) + \ln(x)\ln(x+1) - x\ln(x) + x \\
&= x\ln(x)(\ln(x+1) - 1) + \ln(x)\ln(x+1) + x
\end{aligned}$$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

   De plus, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-1=+\infty$.

Finalement, par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

10. La fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, or pour $x>0$, $x+1>0$, par composition de fonctions continues, $x\mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

    Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto x+1$ sont des polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

    Par opération sur les fonctions continues, g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Soit $x>0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)\ln(x)\frac{x}{x}\ln(x+1)-x\ln(x)+x \\ &= (x+1)x\ln(x)\frac{\ln(x+1)}{x}-x\ln(x)+x \end{aligned}$$

    Or, par croissance comparée, $\lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0$ et, de plus, $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

    Par opération sur les limites, $\lim_{x\to0^+} g(x)=(0+1)\times0\times1-0+0=0$.

    Donc g est prolongeable par continuité et on peut définir ce prolongement par continuité $\tilde{g}$ par :

$$\begin{cases} \tilde{g}(x)=g(x) & \text{si } x>0 \\ \tilde{g}(0)=0 \end{cases}$$

12. g étant croissante et ayant pour limite 0 en 0, g est toujours positive.

13. g est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la bijection, g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]\lim_{x\to0^+} g(x);\lim_{x\to+\infty} g(x)[=]0;+\infty[$, d'après les questions précédentes.

14. $\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car g y est continue, et $\tilde{g}$ est continue en 0 car $\lim_{x\to0^+}\tilde{g}(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)=0=\tilde{g}(0)$.

    De plus, $\tilde{g}$ est strictement croissante car g l'est.

    D'après le théorème de la bijection, $\tilde{g}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[\lim_{x\to0^+}\tilde{g}(x);\lim_{x\to+\infty}\tilde{g}(x)[=[0;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction principale

1. $x\mapsto\ln(x+1)$ est définie sur $]-1;+\infty[$ d'après la première question de la partie A. De plus, elle ne s'annule qu'en 0.

   Donc $x\mapsto\frac{1}{\ln(x+1)}$ est définie sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

   ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{x}{x}+(\ln(x)-1)\times1\right)\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(\ln(x)-1)}{(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{(1+(\ln(x)-1))\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(\ln(x)-1)}{(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{\ln(x)\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(\ln(x)-1)}{(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{(x+1)\ln(x)\ln(x+1)-x(\ln(x)-1)}{(x+1)(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{(x+1)\ln(x)\ln(x+1)-x\ln(x)+x}{(x+1)(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)(\ln(x+1))^2} \end{aligned}$$

3. On a montré précédemment que $x\mapsto\ln(x+1)$ était continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus, cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par opération sur les fonctions continues, $x\mapsto\frac{1}{\ln(x+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par opération sur les fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x+1)} = \frac{1}{1} = 1$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) - 1 = -\infty$.

   Finalement, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

5. Pour tout $x > 0$, on a $1 + x > 0$. De plus un carré est toujours positif, donc $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ et, d'après ce qui précède, g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Finalement, on trouve le tableau suivant :

	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

6. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned}\ln(x+1) &= \ln\left(x\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

7. La limite de f en $+\infty$ est une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

   Factorisons par le terme prédominant au numérateur ($x\ln(x)$) et au dénominateur ($\ln(x)$).

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(\ln(x)-1)x}{\ln(x+1)}\\ &= \frac{(\ln(x)-1)x}{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{x\ln(x)\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)}\\ &= \frac{x\ln(x)\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)}\\ &= \frac{x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}\end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$.

   Par opération sur les limites, on trouve alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]\lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$, d'après ce qui précède.

9. f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, le réel $0 \in \mathbb{R}$ admet donc un unique antécédent par f, que l'on appelle x_0.

   En réalité, on a $f(e) = 0$, en effet, $\ln(e) = 1$. Par unicité de x_0, on trouve $x_0 = e$.

Partie C : Méthode par dichotomie

1.

```
x=input("entrer un réel x")
res=((log(x)-1)∗ x)/log(x+1)
disp(res)
```

2.

```
clf
x=(0.01 :0.01 :2.99)
y=((log(x)-ones(x)).∗ x)./log(x+ones(x))
plot2d(x,y)
```

3. Par la suite nous prendrons $a = 1$, on a bien $f(a) = -\frac{1}{\ln(2)} < 0$.

   Nous prendrons également $b = 3$, $f(b) = 3 \times \frac{\ln(3)-1}{\ln(4)} > 0$ car $\ln(3) > 1$.

   Nous prendrons ces valeurs de a et b dans la suite de cette correction, il se peut cependant que vos réponses aux questions suivantes diffèrent de la correction si vous avez utilisé d'autres chiffres.

4. On a bien $1 < 3$.

   De plus, $f(a) < f(x_0) < f(b)$ car $f(x_0) = 0$ donc, par croissance de f, on a $a < x_0 < b$.

5. $m = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = 2$.

6.

```
a=1
b=2
m=(a+b)/2
res=((log(m)-1)∗ m)/log(m+1)
disp(res)
```

   Le signe de $f(m)$ dépend de votre choix de a et b, dans notre cas, $f(2) < 0$.

7. On a $f(m) < f(x_0)$, par croissance de f, on a $m < x_0$.

8. Par la règle des signes, si α et β sont de même signe, alors $\alpha\beta > 0$ et s'ils sont de signe contraire, alors $\alpha\beta < 0$.

9. La condition "l'image de a et l'image de m sont de même signe" s'écrit d'après la question précédente $f(a)f(m) > 0$.

   Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, on doit poser $a = m$.

   Dans notre cas, $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, la condition est vérifiée.

10.

```
a=1
b=3
m=(a+b)/2
resm=((log(m)-1)∗ m)/log(m+1)
resa=((log(a)-1)∗ a)/log(a+1)
if resm∗resa>0 then
    a=m
    else
    b=m
end
```

11. On utilise une boucle `while` et la condition est `abs(b-a)>10^(-6)`.

12.

```
a=1
b=3
while abs(b-a)>10^(-6)
    m=(a+b)/2
    resm=((log(m)-1)* m)/log(m+1)
    resa=((log(a)-1)* a)/log(a+1)
    if resm*resa>0 then
        a=m
        else
        b=m
    end
end
disp(m)
```

13.

```
a=1
b=3
n=0
while abs(b-a)>10^(-6)
    n=n+1
    m=(a+b)/2
    resm=((log(m)-1)* m)/log(m+1)
    resa=((log(a)-1)* a)/log(a+1)
    if resm*resa>0 then
        a=m
        else
        b=m
    end
end
disp(m)
disp(n)
```

Pour nos choix de a et b, nous trouvons $n = 21$.

Partie D : Méthode de Newton

1.

```
x=input("entrer un réel x")
res=((x+1)*log(x)*log(x+1)-x*log(x)+x)/((x+1)*log(x+1)^2)
disp(res)
```

2. Par stricte croissance de g, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$, or on a également $x + 1 >$ et $\ln(x + 1) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

3.

```
x=input("entrer un réel x")
resfp=((x+1)*log(x)*log(x+1)-x*log(x)+x)/((x+1)*log(x+1)^2)
resf=((log(x)-1)* x)/log(x+1)
disp(x-resf/resfp)
```

4.

```
Y=3
for i=1 :20
    resfp=((Y+1)*log(Y)*log(Y+1)-Y*log(Y)+Y)/((Y+1)*log(Y+1)^2)
    resf=((log(Y)-1)* Y)/log(Y+1)
    Y=Y-resf/resfp
end
disp(Y)
```

5. `abs(resf)>10^(-6)`

6.

```
Y=3
resf=((log(Y)-1)∗ Y)/log(Y+1)
while abs(resf)>10^(-6)
    resfp=((Y+1)∗log(Y)∗log(Y+1)-Y∗log(Y)+Y)/((Y+1)∗log(Y+1)^2)
    Y=Y-resf/resfp
    resf=((log(Y)-1)∗ Y)/log(Y+1)
end
disp(Y)
```

7. On obtient quasiment les mêmes résultats, exact même à 10^{-6} près, nos algorithmes ont bien fonctionné !

   Si vous avez la curiosité de taper %e-Y dans Scilab, vous trouverez que la différence est de 10^{-8}, elle est donc bien meilleure. C'est tout à fait normal, dans le deuxième cas, le critère porte sur l'image de Y et non Y, on ne pouvait donc savoir a priori la précision que l'on allait obtenir, cela dépend de la fonction utilisée.

8.

```
Y=3
resf=((log(Y)-1)∗ Y)/log(Y+1)
n=0
while abs(resf)>10^(-6)
    resfp=((Y+1)∗log(Y)∗log(Y+1)-Y∗log(Y)+Y)/((Y+1)∗log(Y+1)^2)
    Y=Y-resf/resfp
    resf=((log(Y)-1)∗ Y)/log(Y+1)
    n=n+1
end
disp(Y)
disp(n)
```

   $n = 2$, la convergence est bien plus rapide. Assez généralement, la méthode de Newton converge très vite par rapport à la méthode par dichotomie. On a également développé des algorithme convergent encore plus rapidement que la méthode de Newton. Cependant, la méthode de Newton peut échouer dans certains cas, contrairement à la méthode par dichotomie qui elle, fonctionne en permanence. Une stratégie efficace est souvent de faire une première recherche avec dichotomie avec une faible précision, puis d'affiner le résultat avec une méthode plus efficace, mais plus délicate.