DM de mars à rendre le 10 mars

EXERCICE 1.

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   $1 + x > 0$ si et seulement si $x > -1$

   Donc, la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est définie sur $]-1; +\infty[$.

   La fonction f est définie pour $1 + x > 0$ et $1 + x \neq 0$, f est donc définie sur $]-1; +\infty[$.

2. $x \mapsto 1 + x$ est dérivable et strictement positif sur $]-1; +\infty[$, ln est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par composition de fonction dérivable, $x \mapsto \ln(1 + x)$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

   $x \mapsto 1 + x$ est dérivable et non nul sur $]-1; +\infty[$, par quotient de fonction dérivable, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$, et, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x} \times (1 + x) - 1 \times \ln(1 + x)}{(1 + x)^2} \\ &= \frac{1 - \ln(1 + x)}{(1 + x)^2} \end{aligned}$$

   Or un carré est toujours positif, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} 1 - \ln(1 + x) &\geqslant 0 \\ 1 &\geqslant \ln(1 + x) \\ e^1 &\geqslant e^{\ln(1+x)} \text{ car la fonction exponentielle est croissante} \\ e &\geqslant 1 + x \\ e - 1 &\geqslant x \end{aligned}$$

   Finalement, on trouve le tableau de signe et de variation suivant :

	-1	$e-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

3. $x \mapsto 1 + x$ est continue et strictement positif sur $]-1; +\infty[$, ln est continue sur $\mathbb{R}^*$, par composition de fonction continue, $x \mapsto \ln(1 + x)$ est continue sur $]-1; +\infty[$.

   $x \mapsto 1 + x$ est continue et non nul sur $]-1; +\infty[$, par quotient de fonction continue, f est continue sur $]-1; +\infty[$.

4. f est continue en 1, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{\ln(1+1)}{1+1} = \frac{1}{2}\ln(2)$.

5. Regardons la limite de f en -1.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to -1^+} 1 + x = 0$ et pour $x > -1$, $1 + x > 0$.

   Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Par composition sur les limites, $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$.

Or par opération sur les limites, $\lim\limits_{x \to -1^+} 1+x = 0$ et pour $x > -1$, $1+x > 0$.

Par quotient de limites, on trouve $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

La fonction f n'admet pas de prolongement par continuité en -1.

6. La limite de f est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$" en $+\infty$.

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

7. On remarque que $f(e-1) = \frac{\ln(1+e-1)}{1+e-1} = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$.

   Or f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$.

   Donc $\frac{1}{3}$ est compris entre $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, car $\frac{1}{e} \approx 0.36$.

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ dans $]-1;1[$.

   De plus, f est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   Donc $\frac{1}{3}$ est compris entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, car $\frac{1}{e} \approx 0.36$.

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ dans $]1;-\infty[$.

   Finalement, l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ admet deux solutions sur $\mathcal{D}_f$.

EXERCICE 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{n(n+1)}{4^n} = \frac{n(n-1)}{4^n} + 2\frac{n}{4^n} = \frac{1}{4^2} \times \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} + \frac{2}{4}\frac{n}{4^{n-1}} = \frac{1}{16} \times \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} + \frac{1}{2}\frac{n}{4^{n-1}}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n(n+1)}{4^n} = \frac{1}{16} \times \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{4^{n-1}} = \frac{1}{16} \times \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{n}{4^{n-1}}$

Or, les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n}{4^{n-1}}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}}$ convergent.

Par opération sur les séries, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n(n+1)}{4^n}$ converge et sa somme est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{4^n} &= \frac{1}{16} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}} \\
&= \frac{1}{16} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{16} \times \frac{2}{\frac{27}{64}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{9}{16}} \\
&= \frac{8}{27} + \frac{8}{9} \\
&= \frac{32}{27}
\end{aligned}$$