Correction du DST2

EXERCICE 1.

1. a) $B = [1,2;2,2]$
   b) $inv(B)$
   c) $B\hat{}2 - 3 * B + 6 * eye(B)$
2. B est inversible si $ad - bc \neq 0$, ici, $ad - bc = 1 \times 2 - 2 \times (-2) = 2 + 4 = 6 \neq 0$. Donc B est inversible.

   L'inverse de la matrice est alors

$$B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-2) & 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ 1 \times (-2) + (-2) \times 2 & 2 \times (-2) + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc

$$\begin{aligned} B^2 - 3B &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times (-2) & 3 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3-3 & 6-6 \\ -6-(-6) & 0-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &= -6I_2 \end{aligned}$$

   b) On a alors $B\left(-\frac{1}{6}(B - 3I_2)\right) = \left(-\frac{1}{6}(B - 3I_2)\right)B = I_2$.

   Donc B est inversible d'inverse $B^{-1} = \left(-\frac{1}{6}(B - 3I_2)\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.

1. A) La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

   Donc $\forall x > 1$, $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

   B) La dérivée de e^u est $u'e^u$.

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2+2}$.

   C) La dérivée de u^α est $\alpha u' u^{\alpha-1}$.

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4 \times 2 \times (2x+1)^{4-1} = 8(2x+1)^3$.

   D) La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$.

   Donc $\forall x > -\frac{2}{3}$, $f'(x) = \frac{3}{3x+2}$.

   E) La dérivée de uv est $u'v + uv'$.

   Donc $\forall x > -1$, $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (1+x) \times \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)1 - 1 = \ln(x+1)$.

   F) La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $\forall x \neq -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \times e^x + xe^x)(x+1) - xe^x \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x + x^2e^x + e^x + xe^x - xe^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^x + xe^x + e^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}e^x \end{aligned}$$

2. a) $\forall x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{xe^x - e^x - e^x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{xe^x - 2e^x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-2}{(x-1)^2}e^x \end{aligned}$$

b)c) Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $x-2$.

	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

3. $\forall x \neq 2$, $g(x) = (x-2)^{-3}$

Donc $\forall x \neq 2$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3(x-2)^{-3-1} \\ &= -3(x-2)^{-4} \\ &= \frac{3}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^4 > 0$ *ie* $g'(x) < 0$.

	$-\infty$	2		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$	

4. A)

	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

B)

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

C)

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

D)

	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

E)

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

F) Le signe de f dépend du signe de $x^2 + x + 1$. Le discriminant de ce polynôme est $1 - 4 = -3$. Le discriminant est négatif, le polynôme est donc de signe constant qui est le signe du coefficient associé à x^2. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

EXERCICE 3. a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1^k}{2^k} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1^3}{2^3} - \frac{1^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= \left(\frac{2}{8} - \frac{2}{2^{n+1}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(2k^2+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k^2)+\sum_{k=0}^{n}1 \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}1 \\
&= \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)+n+1 \\
&= \frac{1}{3}(n^2+n)(2n+1)+n+1 \\
&= \frac{1}{3}(2n^3+n^2+2n^2+n)+n+1 \\
&= \frac{2}{3}n^3+\frac{2+1}{3}n^2+\frac{1}{3}n+n+1 \\
&= \frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{4}{3}n+1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{3} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{2}{3}n \\
&= \frac{1}{2\times 3}(n^2+n)+\frac{2}{3}n \\
&= \frac{1}{6}n^2+\frac{1}{6}n+\frac{4}{6}n \\
&= \frac{1}{6}n^2+\frac{4+1}{6}n \\
&= \frac{1}{6}n^2+\frac{5}{6}n
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \\
&= \ln(n+1)-\ln(1) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

C'est une somme télescopique.

EXERCICE 4.

1. Montrons le résultat par récurrence.

   Initialisation : Commençons par montrer le résultat pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 2$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Supposons maintenant que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ *ie* $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, montrons qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geqslant \frac{1}{2} \times 0 + 1 \geqslant 1$ car $u_n \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence.

   $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2} \times 2 + 1 \leqslant 1 + 1 \leqslant 2$ car $u_n \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence.

   On a donc montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

2. a) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique. Cherchons son point fixe ℓ.

   On a alors $\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$.

   Donc $\ell - \frac{1}{2}\ell = 1$.

   Donc $\frac{1}{2}\ell = 1$.

   D'où $\ell = 2$.

   Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Par définition de $(v_n)_{n\geqslant 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 2 = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 2$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \geqslant -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant -2$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \geqslant 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$.

   Finalement, on retrouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

EXERCICE 5.

1. a) Posons $Q = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Alors

$$\begin{aligned} QP &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1\times 4 + (-1)\times(-4) + 0\times 1 & 1\times 0 + (-1)\times 0 + 0\times 1 & 1\times 4 + (-1)\times 4 + 0\times 1 \\ (-2)\times 4 + 0\times(-4) + 8\times 1 & (-2)\times 0 + 0\times 0 + 8\times 1 & (-2)\times 4 + 0\times 4 + 8\times 1 \\ 1\times 4 + 1\times(-4) + 0\times 1 & 1\times 0 + 1\times 0 + 0\times 1 & 1\times 4 + 1\times 4 + 0\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

   De même $PQ = I_3$.

   Donc P est inversible d'inverse Q.

b)

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 20 \\ 12 & 0 & 20 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice D est bien diagonale, car elle ne possède des coefficients non nuls que sur sa diagonale.

d) Montrons le résultat par récurrence.

Initialisation : Commençons par montrer la propriété au rang $n = 0$: $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Pour toute matrice carrée B, B^0 est la matrice identitée.

Donc $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$.

On a donc montrer la propriété pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$ *ie* $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$A^{n+1} = A^nA$, or par hypothèse de récurrence : $A^n = PD^nP^{-1}$ et d'après la question c : $A = PDP^{-1}$

On a donc $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$, or $PP^{-1} = I_3$.

Donc $A^{n+1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

On a donc montré la propriété au rang $n+1$: $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

e)

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente, on a alors

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ -4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ (-3)^n & 1 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ -4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ (-3)^n & 1 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4(-3)^n + 4\times 5^n & -4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ -4(-3)^n + 4\times 5^n & 4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2 + 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 4v_n \\ 4u_n + v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 4v_n \\ 4u_n + v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrons la propriété par récurrence.

Initialisation : Commençons par la montrer pour $n = 0$: $X_0 = A^0 X_0$. On a $A^0 = I_3$, donc on a bien $X_0 = A^0 X_0$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$. Montrons qu'elle est vraie pour le rang suivant $n + 1$: $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

D'après la relation montrée à la question a, $X_{n+1} = AX_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

On a donc montré la propriété au rang $n + 1$.

Finalement, on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c) $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) En utilisant la question 1.e, 2.b et 2.c, on trouve

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4(-3)^n + 4 \times 5^n & -4(-3)^n + 4 \times 5^n & 0 \\ -4(-3)^n + 4 \times 5^n & 4(-3)^n + 4 \times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2 + 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8(-3)^n + 32 \times 5^n \\ 32 \times 5^n - 8(-3)^n \\ 2(-3)^n + 8 \times 5^n - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n + 4 \times 5^n \\ 4 \times 5^n - (-3)^n \\ \frac{1}{4}(-3)^n + 5^n - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= (-3)^n + 4 \times 5^n \\ v_n &= 4 \times 5^n - (-3)^n \\ w_n &= \frac{1}{4}(-3)^n + 5^n - \frac{1}{4} \end{aligned}$$