DST 3 (17 Janvier 2020)

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : ***l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE 1. Cet exercice reprend des exercices d'application du cours vu en TD. Quelques valeurs ont cependant été légèrement modifiées.

A. Calculer les limites des suites et des fonctions au point demandé.

a/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^4+n-1}{3n^2+1}$ **b/** $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n-(-2)^n$ **c/** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}-n^2$ **d/** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

e/ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\ \ln(-x)$ **f/** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{2x^3-5x-3}$ **g/** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **h/** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

i/ $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ **j/** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} 3^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ **k/** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}}$ **ℓ/** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

B. Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1-\frac{1}{n} \text{ et } v_n = 1+\frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que pouvez vous en déduire sur la nature des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et leurs éventuelles limites ?
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n < 1 < v_n$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite 1.

EXERCICE 2. Donner un code Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui renvoie le terme u_n de la suite défini de la façon suivante :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + e^{-u_n}$$

EXERCICE 3.

1. Dire si les matrices A, B, C et D sont inversibles ou pas (on attend une preuve, on ne demande cependant pas nécessairement d'expliciter l'inverse si cela n'est pas nécessaire).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Écrire le code Scilab de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calculer l'inverse de la matrice C.
4. Inversez la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.

1. On définit la fonction $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction h.
   b. Calculer la dérivée de h

c. Calculer les limites de la fonction h aux bornes de son intervalle de définition. (Attention, on attend ici 3 limites).

2. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
On définit le fonction f par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Montrer que $f(x)$ est positive pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
c. En utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(1+ax) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}+a\right)$, calculer la limite de f en $+\infty$.
d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ se met sous la forme $\lambda \frac{\frac{\ln(1+ax)}{ax}}{\frac{\ln(1+bx)}{bx}}$, pour un réel λ à déterminer.
e. Calculer la limite de $f(x)$ pour x tend vers 0 par valeurs supérieurs.
f. Calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.

g. Montrer que f' et g sont de même signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
h. Calculer g' sur $\mathbb{R}_+^*$.
i. Quel est le signe de $\ln(1+bx) - \ln(1+ax)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$?
j. Tracer le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer ses limites en 0^+ et $+\infty$.
k. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
ℓ. Tracer le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
m. Comparer $f\left(\frac{1}{b}\right)$ et $f\left(\frac{1}{a}\right)$ et en déduire que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2$$

EXERCICE 5. On considère des molécules d'ADN de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ constituées des bases nucléiques suivantes : adénine (A), cytosine (C) et guanine (G). Dans la nature, il existe une quatrième base, la thymine, mais afin de simplifier l'étude nous ne considérerons que les bases A, C et G. Une telle molécule d'ADN peut alors être représentée par une suite de n lettres A, C et G.

On choisit aléatoirement parmi les bases A, C et G pour former une molécule d'ADN d'une taille donnée n. Cela revient donc à effectuer des tirages aléatoires avec remise parmi un ensemble de trois éléments : A, C et G.

On ne demandera pas d'expliciter les résultats numériques.

A. Considérons tout d'abord le cas particulier $n = 4$. Une molécule d'ADN de longueur 4 est alors une suite de lettre, par exemple $ACAG$.

1. Combien y a-t-il de molécules d'ADN de longueur 4 constituées uniquement des bases A, C et G ?
2. Quelle est la probabilité que la molécule d'ADN ne soit constituée que de base A ?
3. Quelle est la probabilité que la molécule d'ADN ne soit constituée que de bases A ou G ?
4. Quelle est la probabilité que la molécule d'ADN soit constituée d'au moins un A ?
5. Quelle est la probabilité que la molécule d'ADN contienne deux A et deux G (peu importe l'ordre) ?
6. Quelle est la probabilité que la molécule d'ADN contienne une alternance de base A et base C ?

B. Considérons cette fois le cas général n quelconque. On définit, pour $i \leqslant n$, les événements suivants :
$A_i =$"la $i-$ème base est une base A"
$C_i =$"la $i-$ème base est une base C"
$G_i =$"la $i-$ème base est une base G"

1. Pour tout $i \leqslant n$, exprimer l'événement A_i en fonction des événements C_i et G_i.
2. Donner la probabilité des événements A_i, C_i et G_i pour tout $i \leqslant n$.
3. *a.* Exprimer l'événement $A =$"la molécule d'ADN n'est constituée que de bases A" en fonction des événements A_i, C_i et G_i.
   b. Calculer la probabilité de l'événement A.
4. *a.* Exprimer l'événement $Alt =$"la molécule d'ADN est constituée d'une alternance de bases A et G" en fonction des événements A_i, C_i et G_i.
   b. Calculer la probabilité de l'événement Alt.
5. *a.* Exprimer l'événement $P =$"la molécule d'ADN commence par une base C" en fonction des événements A_i, C_i et G_i.
   b. Calculer la probabilité de l'événement P.
6. *a.* Exprimer l'événement $D =$"la molécule d'ADN n'est constituée que d'exactement deux bases C" en fonction des événements A_i, C_i et G_i.
   b. Calculer la probabilité de l'événement U.
7. *a.* Exprimer l'événement $Moy =$"la molécule d'ADN est constituée d'autant de bases A que de bases C" en fonction des événements A_i, C_i et G_i.
   b. Calculer la probabilité de l'événement Moy.