Correction du DST 3

EXERCICE 1.

A. **a**/ Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 + n - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + 1 = +\infty$.

Il s'agit donc d'une forme indéterminée de la forme " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Factorisons le numérateur et le dénominateur par le terme prédominant.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{n^4+n-1}{3n^2+1} &= \frac{n^4\left(\frac{n^4}{n^4} + \frac{n}{n^4} + \frac{1}{n^4}\right)}{n^2\left(3\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{n^4}{n^2}\frac{\frac{n^4}{n^4} + \frac{n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{3\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\
&= n^2\frac{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{3 + \frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n^2} = 3$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^4+n-1}{3n^2+1} = +\infty$

b/ Pour $q < -1$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, donc $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Factorisons par le terme prédominant.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
4^n - (-2)^n &= 4^n\left(\frac{4^n}{4^n} - \frac{(-2)^n}{4^n}\right) \\
&= 4^n\left(1 - \left(\frac{-2}{4}\right)^n\right) \\
&= 4^n\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Or pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$.

Par opération sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = 1$.

Finalement, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - (-2)^n = +\infty$.

c/ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Par opération par les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - n^2 = -\infty$.

d/ Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme " $\frac{0}{0}$ "

Posons $g(y) = \frac{e^y-1}{y}$ pour $y \neq 0$ et $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

On a $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$.

On cherche la limite de g en $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, c'est une limite classique.

On a $\lim\limits_{y\to0} g(y) = \lim\limits_{y\to0} \frac{e^y-1}{y} = 1$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = 1$.

e/ Cherchons la limite de $x \mapsto \ln(-x)$.

Posons $g(y) = \ln(y)$ pour $y > 0$ et $f(x) = -x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

On cherche la limite de g en $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Finalement, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\ln(-x) = -\infty$.

f/ Pour le DST, vu que nous n'avions pas encore vu la continuité, vous aviez le droit de donner la réponse directement en remplaçant par 2, mais à partir de maintenant, vous devez rédiger la réponse de la façon suivante.

Les polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2x + 3 = 2^2 - 2\times 2 + 3 = 3$
et $\lim\limits_{x\to 2} 2x^3 - 5x - 3 = 2\times 2^3 - 5\times 2 - 3 = -5$.

Par opération sur les limites, on trouve $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{2x^3-5x-3} = -\frac{3}{5}$.

g/ C'est une forme indéterminée de la forme "$\infty \times 0$".

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

Posons $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > -1$ et $x \neq 0$ et $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

On cherche la limite de f en $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, c'est une limite classique.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

h/ Pour tout $x > 0$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-x^2\ln(x)}$.

Cherchons la limite de $x^2\ln(x)$ en 0^+, il s'agit d'une forme indéterminée de la forme "$0\times\infty$".

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -x^2\ln(x) = 0$.

Or l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$.

Par composition de limite, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2} = 1$.

i/ Pour $q < -1$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Ainsi $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

j/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} 3^k 2^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} (3\times 2)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} 6^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{6^{n+1}-1}{6-1} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{6^{n+1}-1}{5} \\
&= \frac{\frac{6^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{5} \\
&= \frac{6\left(\frac{6}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}}{5} \\
&= \frac{6\times 3^n - \frac{1}{2^n}}{5}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = +\infty$.

k/ Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$ et $u_n = n^2 + 3n + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 3n + 4 = +\infty$.

On cherche la limite de f en $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 0$.

ℓ/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$.

Posons $f(x) = 2\frac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > -1$ et $x \neq 0$ et $u_n = \frac{2}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On a bien $f(u_n) = 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$.

On cherche la limite de f en $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\frac{\ln(1+x)}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 2$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 2$.

La fonction exponentielle est continue en 2, donc $\lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2$.

Par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = 2$.

B. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= 1-\frac{1}{n+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\
&= \frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\\
&= \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= 1+\frac{1}{(n+1)^2}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}\\
&= \frac{n^2}{n^2(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\\
&= \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1}-u_n>0$ et $v_{n+1}-v_n<0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

De plus, $u_n-v_n=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$.

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes.

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent donc vers une même limite $\ell\in\mathbb{R}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}>0$ et $\frac{1}{n^2}>0$.

   Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n<1<v_n$.

3. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$\ell\leqslant 1\leqslant \ell$$

   Donc $\ell=1$.

EXERCICE 2.

```
n=input("entrer un entier n")
U=1
for i=1 : n
    U=U^2+exp(-U)
end
disp(U)
```

EXERCICE 3.

1. Il y avait une coquille dans cette question, on ne demandait que de montrer si les matrices A et B sont inversibles.

   Les matrices A et B sont triangulaires supérieures. Elles sont donc inversibles si et seulement leurs coefficients diagonaux sont non nuls.

   Il y a un zéro sur la diagonale de A, donc A n'est pas inversible.

   Il n'y a pas de zéro sur la diagonale de B, elle est donc inversible.

2. [-1,2 ;-2,3]

3. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si $ad - bc \neq 0$ et son inverse est alors

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La matrice C est donc inversible car $-1 \times 3 - 2 \times (-2) = 1 \neq 0$ et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Pour inverser la matrice M, utilisons un système linéaire que nous résoudrons par pivot de Gauss.

Soient a, b et c des réels quelconques,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ x & & & - & 2z & = & b \\ & & 3y & - & z & = & c \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & 2y & + & z & = & b+a \\ & & 3y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ & & 3y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & -b \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ & & 3y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & -b \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ & & & - & \frac{5}{2}z & = & -\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{2}{5} L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & -b \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ & & & & z & = & \frac{3}{5}a + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & -\frac{6}{5}a - \frac{11}{5}b + \frac{4}{5}c \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ & & & & z & = & \frac{3}{5}a + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & -\frac{6}{5}a - \frac{11}{5}b + \frac{4}{5}c \\ & & y & & & = & \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c \\ & & & & z & = & \frac{3}{5}a + \frac{3}{5}b - \frac{2}{5}c \end{array}\right.$$

Finalement $M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & -11 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.

1. *a.* Pour que h soit défini, on doit avoir $x \neq 0$ pour que $x \mapsto x$ soit défini et $x > -1$ pour que $1 + x > 0$ et que $\ln(1+x)$ soit bien définie.

   Finalement $\mathcal{D}_h =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

   b. Soit $x \in \mathcal{D}_h$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

   c. On a $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en -1.

   De plus, $\lim_{x \to -1} 1 + x = 0$ et $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, par composition de fonction, $\lim_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim_{x \to -1} h(x) = +\infty$.

   On a $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$, c'est une limite du cours.

   Pour tout $x > 0$, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \frac{1+x}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x=+\infty$.

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$.

Par composition sur les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}=0$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

2. *a.* f est définie si $\ln(1+ax)$ et $\ln(1+bx)$ sont définis, donc si $1+ax>0$ et $1+bx>0$, finalement si $x>-\frac{1}{a}$ et si $x>-\frac{1}{b}$.

   Puisque $a<b$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ et donc $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$.

   Donc f est définie sur $\left]-\frac{1}{b};+\infty\right[$.

   b. Si $x>0$, $1+ax>1$ et $1+bx>1$.

   Par croissance du logarithme, $\ln(1+ax)>0$ et $\ln(1+bx)>0$.

   Donc f est positive pour $x>0$.

   c. Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}+a\right)}{\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}+b\right)}\\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(x)}\times\frac{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+a\right)}{\ln(x)}}{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+b\right)}{\ln(x)}}\\
&= \frac{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+a\right)}{\ln(x)}}{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+b\right)}{\ln(x)}}
\end{aligned}$$

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+a=a$.

   Or $a>0$, par continuité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim x\to a\ln(x)=\ln(a)$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+a\right)=\ln(a)$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+a\right)}{\ln(x)}=0$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+a\right)}{\ln(x)}=1$.

   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+b\right)}{\ln(x)}=1$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

   d. Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\ln(1+ax)}{ax}}{\frac{\ln(1+bx)}{bx}} &= \frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{bx}{\ln(1+bx)}\\
&= \frac{\ln(1+ax)}{a}\times\frac{b}{\ln(1+bx)}\\
&= \frac{a}{b}\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}\\
&= \frac{a}{b}f(x)
\end{aligned}$$

   Finalement $f(x)=\lambda\frac{\frac{\ln(1+ax)}{ax}}{\frac{\ln(1+bx)}{bx}}$ pour $\lambda=\frac{b}{a}$.

e. Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$.

De même, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+bx)}{bx} = 1$.

Par opération sur les limites, on trouve donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

f. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a\frac{\ln(1+bx)}{1+ax} - b\frac{\ln(1+ax)}{1+bx}}{(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \end{aligned}$$

g. Pour tout $x > 0$, $1 + ax > 0$, $1 + bx > 0$ et $(\ln(1+bx))^2 > 0$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

h. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= ab\ln(1+bx) + ab - (ba\ln(1+ax) + ab) \\ &= ab(\ln(1-bx) - \ln(1+ax)) \end{aligned}$$

i. Soit $x > 0$,

On a $a < b$ donc $ax < bx$ car $x > 0$.

Donc $1 + ax < 1 + bx$ et par croissance du logarithme, $\ln(1+ax) < \ln(1+bx)$.

Finalement $\ln(1+bx) - \ln(1+ax) > 0$.

j. $ab > 0$, donc pour tout $x > 0$, $g'(x) > 0$. On trouve alors le tableau de signe suivant :

	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

k. La fonction g est croissante donc pour tout $x > 0$, $g(x) \geqslant \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Finalement g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

ℓ.

	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

m. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{a}\right)$ car f est croissante.

Donc $\frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(1+\frac{b}{b}\right)} \leqslant \frac{\ln\left(1+\frac{a}{a}\right)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$.

Donc $\frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$.

Finalement $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2$.

EXERCICE 5. Étant donné le nombre très faible de personnes ayant tenté cet exercice, je vous donne juste les résultats, je vous laisse réfléchir à la démonstration. Nous pourrons en rediscuter par la suite si vous le souhaitez.

A. 1. 3^4

2. $\frac{1}{3^4}$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

4. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^4$
5. $\frac{2}{3^3}$
6. $\frac{2}{3^4}$

B. 1. $A_i = \overline{C_i \cup G_i}$

2. $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(G_i) = \mathbb{P}(C_i) = \frac{1}{3}$
3. *a.* $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

   b. $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3^n}$
4. *a.* $Alt = (A_1 \cap G_2 \cap A_3 \cap G_4 \cap \dots) \cup (G_1 \cap A_2 \cap G_3 \cap A_4 \cap \dots)$

   b. $\mathbb{P}(Alt) = \frac{2}{3^n}$
5. *a.* $P = C_1$

   b. $\mathbb{P}(P) = \frac{1}{3}$
6. *a.* $D = \bigcup_{i \neq j} \left[\left(\bigcap_{k \neq i, k \neq j} \overline{C_k} \right) \cap C_i \cap C_j \right]$

   b. $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{18} n(n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$
7. Cette question est particulièrement délicate.