# DST 4 (13 Mars 2020)

**Durée : 4h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document :* ***l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**EXERCICE 1.** Cet exercice reprend des exercices d'application du cours vu en TD. Quelques valeurs ont cependant été légèrement modifiées.

**A)** On dispose d'un jeu de 52 cartes, constitué de quatre couleurs (carreau, cœur, pique et trèfle) et des cartes allant de 2 à 10 puis valet, dame, roi et as. On appelle main 5 cartes extraites du paquet.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains donnant exactement trois rois ?
3. Combien y a-t-il de mains où toutes les cartes sont des cœurs ?

**B)** Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme dans le cas où elles convergent.

**1/** $\sum\limits_{n\geqslant 0} 4^n$ **2/** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^n}$ **3/** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-5)^n}{n!}$

**4/** $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ln(n+1)-\ln(n))$ **5/** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}$ **6/** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n(n+1)}{2^n}$

**C)** Calculer les limites suivantes

**1/** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^{-x}}$ **2/** $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ **3/** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

**4/** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3-2}$ **5/** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-x+1}{3x^2-5x+3}$ **6/** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-3x^2+2)e^x$

**EXERCICE 2.**

**A)** Définissons la fonction $f$ par la formule $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Rédiger un programme Scilab permettant de tracer la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;2]$.
3. Montrer que $f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.
4. Donner les variations de $f$.
5. $f$ est elle prolongeable par continuité en $-1$ ?
6. Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.
7. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$.

**B)** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit les fonctions $f_n$ pour tout $x>0$ par : $f_n(x)=x^n\ln(x)$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner les variations de $f_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on appellera par la suite $x_n$.
4. Quelle est la valeur de $x_0$ ?

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 1$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_n) = x_n$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

7. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite finie $\ell$.

8. Montrer que $\ell = 1$.

**EXERCICE 3.** Prenons une urne constituée de 3 boules vertes, 2 boules rouges et 4 boules bleues. Effectuons une infinité de tirages avec remise dans cette urne.

Posons les événements $V_i$ : "On tire une boule verte au $i$-ème tirage" et l'événement $V$ : "On ne tire que des boules vertes".

1. Quelle est la probabilité de $V_i$ ?

2. Exprimer l'événement $V$ en fonction des événements $V_i$.

3. Quelle est la probabilité de l'événement $V$ ?

**EXERCICE 4.** Soit $q \in ]0;1[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s(n,0) = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Calculer $s(n,0)$ et sa limite vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s(n,1) = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)q^k$.

   *a*) Rédiger un programme Scilab demandant un entier $n$ à l'utilisateur et renvoyant la valeur de $s(n,1)$.
   *b*) Déterminer la limite de la suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   *c*) Exprimer $(1-q)s(n,1)$ à l'aide de $s(n,0)$ et en déduire la limite de $s(n,1)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   *d*) Retrouver le résultat présentant en utilisant une série bien choisie.

3. Plus généralement, pour tout couple $(n,r)$ de nombres entiers naturels, on pose :

$$s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} q^k$$

   *a*) On suppose que $n,r \geqslant 1$. Montrer que :

$$(1-q)s(n,r) = s(n,r-1) - \binom{r+n}{r} q^{n+1}$$

   *b*) Déterminer les limites des suites de termes généraux $n^r q^n$ et $\binom{r+n}{r} q^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   *c*) En déduire, par récurrence, que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $s(n,r)$ tend vers $s(r) = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.