Correction DST4

EXERCICE 1.

A)

1. Une main de 5 cartes est une combinaison de 5 cartes parmi les 52 cartes du paquet.

   Il y a donc $\binom{52}{5}$ mains possibles.

2. Il y a 4 rois dans le paquet, il y a donc $\binom{4}{3}$ façons de choisir 3 rois parmi les 4.

   Il reste alors 2 cartes à choisir parmi les 48 qui ne sont pas des rois. Il y a $\binom{48}{2}$ façons de les choisir.

   Au final, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2}$ mains contenant exactement trois rois.

3. Il y a en tout 13 cartes de cœur. Il y a donc $\binom{13}{5}$ mains ne contenant que des cartes de cœur.

B) 1/ Il s'agit d'une série géométrique, puisque $4 > 1$, elle est divergente.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{3^n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3^n} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3^{n-1}}\end{aligned}$$

Or la série géométrique dérivée $\sum\limits_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si $|q| < 1$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n}{3^n}$ converge et sa somme est

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.

Donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{(-5)^n}{n!}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{n!} = e^{-5}$.

4/ La somme $\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$ est une somme télescopique.

On trouve alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, par composition de limites, on trouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1)$.

Finalement, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$ diverge.

5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{n-1}{n!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \\ &= -\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}$ converge donc et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 0$.

6/ Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+2k}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{2^k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

Or les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^{n-1}}$ sont des séries géométriques dérivées et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, elles sont donc convergentes.

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n(n+1)}{2^n}$ converge et sa somme est :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} &= \frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ &= 4+4 \\ &= 8\end{aligned}$$

C)1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{2x+2}{e^{-x}} = (2x+2)e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+2 = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^{-x}} = +\infty$.

2/ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2 + \frac{1}{x} = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par composition sur les limites, on trouve $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

3/ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = 1$.

4/ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2 = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3-2} = +\infty$.

5/ Les fonctions $x \mapsto x^3 - x + 1$ et $x \mapsto 3x^2 - 5x + 3$ sont des polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Regardons quand $3x^2 - 5x + 3$ s'annule, pour ce faire, considérons son discriminant Δ.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 3 = 25 - 36 = -11 < 0$

Le polynôme $3x^2 - 5x + 3$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^3-x+1}{3x^2-5x+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^3-x+1}{3x^2-5x+3} &= \frac{3^3-3+1}{3\times 3^2 - 5\times 3 + 3}\\ &= \frac{27-3+1}{27-15+3}\\ &= \frac{25}{15}\\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

6/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^3 - 3x^2 + 2)e^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 2e^x$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, donc, par opération sur les limites,

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)e^x = 0$

EXERCICE 2. A)

1. La fonction f est définie lorsque $x + 1 > 0$, donc pour $x > -1$.

   Finalement $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

2.
```
clf
x=[1 :00.1 :2]
y=(x+ones(x)).^2.*log(x+ones(x))
plot2d(x,y)
```

3. $x \mapsto x + 1$ est un polynôme et donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $x + 1 > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par composition de fonctions continues, $x \mapsto \ln(x + 1)$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.

   Par produit de fonctions continues, f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

4. $x \mapsto x + 1$ est un polynôme et donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $x + 1 > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par composition de fonctions dérivables, $x \mapsto \ln(x + 1)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

   Par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \times \frac{1}{x+1}\\ &= 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)\\ &= (x+1)(2\ln(x+1)+1)\end{aligned}$$

   Pour $x > -1$, $x + 1 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2\ln(1 + x) + 1$.

$$\begin{aligned}2\ln(1+x)+1 &> 0\\ 2\ln(1+x) &> -1\\ \ln(1+x) &> -\frac{1}{2}\\ 1+x &> e^{-\frac{1}{2}} \textit{ car la fonction exp est croissante}\\ x &> e^{-\frac{1}{2}} - 1\end{aligned}$$

On trouve donc le tableau de signe suivant :

	-1	$e^{-\frac{1}{2}}-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

5. Regardons la limite de f en -1.

   On a $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x=0$ et, pour $x>-1$, $1+x>0$.

   Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)=0$ par croissance comparée.

   Donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)^2\ln(x+1)=0$.

   La fonction f admet donc un prolongement par continuité en -1 et son prolongement par continuité vaut 0 en -1.

6. On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1=+\infty$ par opération sur les limites.

   Donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, par composition sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ et f est strictement décroissante sur $]0;e^{-\frac{1}{2}}-1[$, donc $f(x)<0$ sur donc $]0;e^{-\frac{1}{2}}-1[$ donc l'équation $f(x)=1$ n'admet pas de solution sur $]0;e^{-\frac{1}{2}}-1[$.

   De plus, $f(e^{-\frac{1}{2}}-1)=(e^{-\frac{1}{2}})^2\ln(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2}e^{-1}$

   f est continue sur $\mathcal{D}_f$ et strictement croissante sur $[e^{-\frac{1}{2}}-1,+\infty[$, de plus 1 est compris entre $f(e^{-\frac{1}{2}}-1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x)=1$ sur $[e^{-\frac{1}{2}}-1,+\infty[$ et donc sur $\mathcal{D}_f$.

B) Il peut être bon de préciser que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, $x\mapsto x^n$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

   De plus, la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par produit de fonctions continues, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, pour tout $x>0$, est

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(x)+x^n\times\frac{1}{x}\\ &= nx^{n-1}\ln(x)+x^{n-1}\\ &= x^{n-1}(n\ln(x)+1)\end{aligned}$$

   Pour tout $x>0$, on a $x^n>0$, donc $f_n'(x)$ est du signe de $n\ln(x)+1$.

$$\begin{aligned} n\ln(x)+1&>0\\ n\ln(x)&>-1\\ \ln(x)&>-\frac{1}{n}\\ x&>e^{-\frac{1}{n}} \textit{ car la fonction exp est croissante}\end{aligned}$$

   On trouve donc le tableau de signe suivant :

	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$		$+$
$f_n(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

3. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$.

   Or la fonction f_n est décroissante et donc négative sur $]0; e^{-\frac{1}{n}}[$.

   L'équation $f_n(x) = 1$ n'admet donc pas de solution sur $]0; e^{-\frac{1}{n}}[$.

   De plus $f(e^{-\frac{1}{n}}) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{e^{-1}}{n} < 0$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Finalement, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ et 1 est compris entre $f(e^{-\frac{1}{n}})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 1$ sur $[e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout $x > 0$, $f_0(x) = \ln(x)$. Donc $x_0 = e$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(1) = 1^n\ln(1) = 1 \times 0 = 0 < f_n(x_n)$.

   Or, f_n est strictement croissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$.

   Donc $1 \leqslant x_n$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1}\ln(x_n) \\ &= x_n \times x_n^n \ln(x_n) \\ &= x_n \times f_n(x_n) \\ &= x_n \ car\ f_n(x_n) = 1 \end{aligned}$$

   Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1 \leqslant x_n$.

   Donc $f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n)$.

   Or, f_{n+1} est strictement croissante sur $[e^{-\frac{1}{n+1}}; +\infty[$, $x_n \in [e^{-\frac{1}{n+1}}; +\infty[$ et $x_{n+1} \in [e^{-\frac{1}{n+1}}; +\infty[$.

   Donc $x_{n+1} \leqslant x_n$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante.

7. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite finie ℓ.

8. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 1$, par passage à la limite, on a $\ell \geqslant 1$.

   Si $\ell \neq 1$, on a $\ell > 1$, alors il existe ℓ' dans le segment $]1; \ell[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \ell'$.

   Puisque $\ell' > 1$, on a $x_n^n > \ell'^n$.

   Or, puisque $\ell' > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell'^n = +\infty$.

   Par comparaison avec une suite divergente vers $+\infty$, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = +\infty$.

   Puisque ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln(\ell)$.

   Or $\ell > 1$, donc $\ln(\ell) > 0$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n\ln(x_n) = +\infty$.

   Or $f_n(x_n) = 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^n\ln(x_n) = 1$.

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n\ln(x_n) = 1$.

C'est absurde.

Donc $\ell = 1$.

EXERCICE 3.

1. Chaque boule a la même probabilité d'être piochée.

   On trouve ainsi que $\mathbb{P}(V_i) = \frac{3}{3+2+4} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2. L'événement V signifie qu'on ne tire pas de boule verte au 1-er tirage
   et qu'on ne tire pas de boule verte au 2-e tirage
   et qu'on ne tire pas de boule verte au 3-e tirage
   ...
   Ainsi $V = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}$.

3. D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right)$.

   Les tirages sont effectués avec remise, les événements $\overline{V_i}$ sont donc mutuellement indépendants.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{V_i}\right)$ car les événements $\overline{V_i}$ sont donc mutuellement indépendants.

   Puisque $\mathbb{P}(V_i) = \frac{1}{3}$, on trouve que $\mathbb{P}(\overline{V_i}) = \frac{2}{3}$.

   Finalement, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   Or $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

   Finalement, on trouve que $\mathbb{P}(V) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right) 0$.

EXERCICE 4.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s(n,0) = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Il s'agit de la somme partielle de la série géométrique. Cette série est convergente puisque $|q| < 1$ et sa somme est

   $$\lim_{n \to +\infty} s(n,0) = \frac{1}{1-q}$$

2. a)

```
n=input("Entrer un entier n")
S=0
for k=0 :n
    S=S+(k+1)*q^k
end
disp(S)
```

   b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\infty \times 0$".

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \times q^n = n \times \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$.

   Or, puisque $0 < q < 1$, on a $\frac{1}{q} > 1$

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$.

   Par croissance comparée, on trouve donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = 0$.

   Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} nq^n = 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(1-q)s(n,1) &= (1-q)\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(1-q)\times(k+1)q^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}((k+1)q^k-(k+1)q^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k-\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}kq^k+\sum_{k=0}^{n}q^k-\sum_{k=1}^{n+1}kq^k \\
&= 0\times q^0-(n+1)q^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}q^k \\
&= 0-(n+1)q^{n+1}+s(n,0) \\
&= -(n+1)q^{n+1}+s(n,0)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,0) = \frac{1}{1-q}$ d'après les questions précédentes.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-q)s(n,1) = \frac{1}{1-q}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,1) = \frac{1}{(1-q)^2}$

d) $s(n,1)$ est la somme partielle d'une série géométrique dérivée, elle converge car $|q| < 1$ et on retrouve le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,1) = \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. a) Soient n, $r \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(1-q)s(n,r) &= (1-q)\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r}q^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r}q^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r}q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r}q^k-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{r+k-1}{r}q^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{r+k}{r}q^k-\sum_{k=1}^{n}\binom{r+k-1}{r}q^k-\binom{r+n}{r}q^{n+1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{r+k}{r}-\binom{r+k-1}{r}\right)q^k-\binom{r+n}{r}q^{n+1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{r-1+k}{r-1}q^k-\binom{r+n}{r}q^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{r-1+k}{r-1}q^k-\binom{r+n}{r}q^{n+1} \\
&= s(n,r-1)-\binom{r+n}{r}q^{n+1}
\end{aligned}$$

b) Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r q^n = 0$.

Plus généralement, pour tout $\alpha \leqslant r$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha q^n = 0$.

Pour tout n, $r \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} r+n \\ r \end{pmatrix} q^n = \frac{(n+r)\times(n+r-1)\times\cdots\times(n+1)}{r!}$.

Or, $(n+r)\times(n+r-1)\times\cdots\times(n+1)$ est un polynôme de degré r, par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+r)\times(n+r-1)\times\cdots\times(n+1)q^n = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} r+n \\ r \end{pmatrix} q^n = 0$.

c) Montrons la propriété par récurrence sur r.

<u>Initialisation :</u> Pour $r=0$, d'après la question 1., la suite $s(n,0)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,0) = \frac{1}{1-q)}$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que $s(n,r)$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,r) = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

D'après la question 4.*a*., $(1-q)s(n,r+1) = s(n,r) - \begin{pmatrix} r+1+n \\ r+1 \end{pmatrix} q^{n+1}$.

Or, d'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} r+1+n \\ r+1 \end{pmatrix} q^{n+1} = 0$ et, par hypothèse de récurrence, $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,r) = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

Par opération sur les limites, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-q)s(n,r+1) = \frac{1}{1-q)^{r+1}}$.

Finalement, par opération sur les limites, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} s(n,r+1) = \frac{1}{(1-q)^{r+2}}$.

<u>Conclusion :</u> On a donc montré par récurrence que la suite $s(n,r)$ converge et que sa limite est $s(r) = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.