TD 10 : Continuité

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Fonctions usuelles, opérations sur les fonctions).

1. La fonction f, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2}$, est elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction suivante est elle continue sur $\mathbb{R}$?
$$\begin{cases} \forall x \neq 0,\ g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
3. La fonction suivante est elle continue sur $\mathbb{R}$?
$$\begin{cases} \forall x \neq 0,\ h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ h(0) = 0 \end{cases}$$
4. La fonction suivante est elle continue sur $\mathbb{R}$?
$$\begin{cases} \forall x \geqslant 0, & \varphi(x) = x^2 \\ \forall x < 0, & \varphi(x) = -x^2 \end{cases}$$

EXERCICE 2 (Prolongement par continuité).

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

   f est elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$.

   g est elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \neq 0,\ h(x) = \frac{x}{|x|}$.

   h est elle prolongeable par continuité en 0 ?

EXERCICE 3 (Monotonie d'une fonction, Théorème de la bijection).
Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier sa monotonie.
2. Montrer que la fonction f restreinte à $\mathbb{R}_+$ est une bijection.

EXERCICE 4 (Théorème des valeurs intermédiaires).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Montrer que f s'annule.

EXERCICE 5 (Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection).
Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$?

EXERCICE 6 (Théorème de la bijection).
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-x^2}$ réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2},1\right]$ dans un intervalle à préciser. Déterminer ensuite l'expression de la fonction réciproque associée.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2. f est prolongeable par continuité en 0 ?

EXERCICE 8.
Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

EXERCICE 9. Soient f,g : $[a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant

$$(g(a) - f(a))\,(g(b) - f(b)) \leqslant 0$$

Montrer qu'il existe x dans $[a; b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau des variations de f.
3. Montrer que tout réel r de $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = r$ admet exactement deux solutions.
4. Résoudre l'équation $f(x) = r$ dans le cas où $r = 0$, puis dans le cas où $r = \frac{1}{e}$.

EXERCICE 11.
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Calculer l'expression de la dérivée de g sur $\mathbb{R}$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de g, en faisant apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède exactement deux solutions, qui seront notées α et β, avec $\alpha < \beta$.
4. Vérifier que $-2 < \alpha < -1$ et que $\beta = 0$.
5. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de signes de g.

Partie B : Étude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Déterminer les limites f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x g(x)$. En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$.
4. Justifier que $0 < f(\alpha) < \frac{1}{4}$. (on pourra étudier les variations de $x \mapsto x^2 + 2x$).

EXERCICE 12.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x = n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, a une seule solution que l'on notera u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus complexes et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 13.
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

EXERCICE 14 (d'après EDHEC)**.**
On considère que tout entier naturel non nul n la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée u_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.
5. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel non nul n et qui affiche en sortie les valeurs $f_n(0)$, $f_n(0.1)$, $f_n(0.2)$, $\ldots$, $f_n(0.9)$, $f_n(1)$.

EXERCICE 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

1. Écrire un programme Scilab demandant un réel positif x et affichant la valeur $f_n(x)$ pour tout n allant de 1 à 10.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $[1; +\infty[$. On notera u_n cette solution.
3. *a*) Que vaut $f_n(u_n)$?
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = \frac{1}{u_{n+1}}$.
   c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) \geqslant f_n(u_{n+1})$.
   d) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
5. *a*) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite finie ℓ telle que $\ell \neq 1$. Montrer qu'alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_n) = +\infty$.
   b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 16 (D'après HEC 2015)**.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \exp\left(-e^{-\lambda x}\right)$.

1. Montrer que F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

   On suppose dans toute la suite que $\lambda = 1$.
2. Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.
3. On considère le programme Scilab suivant :

   x=linspace(-2,2,400) ; y=(exp(-exp(-x)) ; plot(x,y) , plot(y,x)

   a) Le réel 0 fait il partie des nombres renvoyés par le commande x=linspace(-2,2,400) ?
   b) Quel sera le résultat de l'exécution du programme ?

EXERCICE 17. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
2. En déduire que f est constante.