TD 10 : Continuité

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

ATTENTION. Étant donné que le chapitre sur les limites commence à dater, je vais être plus succinct dans l'utilisation de la composition de limite dans cette correction que dans le TD 8, pour vous donner un modèle de rédaction plus compact. Si besoin n'hésitez pas à reprendre ce chapitre si la rédaction des calculs de limites vous semble trop rapide.

EXERCICE 1 (Fonctions usuelles, opérations sur les fonctions)**.**

1. $x \mapsto x^2 + 2$ est un polynôme et donc continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 2 \geqslant 0$. L'image de $x \mapsto x^2 + 2$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

   Par composition des fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. $x \mapsto -x^2$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

   Donc $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ et $]0; +\infty[$.

   Or la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

   Par composition de fonction, g est continue sur $\mathbb{R}_-$ et $]0; +\infty[$.

   Calculons les limites de g en 0 par valeurs supérieures et inférieures.

   $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$.

   Par opération de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

   $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$ et pour tout $x < 0$, $x^2 > 0$.

   Par opération de limites, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

   Finalement $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$, donc g est continue en 0.

   g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x$ sont des polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

   $x \mapsto x$ ne s'annule qu'en 0, donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-$.

   L'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, par composition de fonctions, $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et sur $\mathbb{R}_-$.

   Regardons la limite de h en 0 par valeurs supérieures et inférieures.

   Par continuité de $x \mapsto x + 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$.

   De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

   Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

   Finalement, f est continue à droite en 0.

   $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.

Donc h n'est pas continue en 0.

Finalement, h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

4. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont des polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

   Donc φ est continue sur $\mathbb{R}_-$ et $]0;+\infty[$.

   Regardons la continuité en 0.

   $\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^-} -x^2 = -0^2 = 0$

   $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$

   Finalement, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) = \lim_{x\to 0^-} \varphi(x)$.

   Donc φ est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 (Prolongement par continuité)**.**

1. On a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

   Donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. La limite de g en 0 est un forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

   Factorisons par le terme prédominant, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)} \\ &= \frac{x}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

   Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha > 0$.

   Par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

   Par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

   Finalement, g est prolongeable par continuité en 0.

3. Par définition de la valeur absolue, pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{x}{x} = 1$ et pour tout $x < 0$, $h(x) = \frac{x}{-x} = -1$.

   Donc $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$.

   Finalement, h n'est pas prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 3 (Monotonie d'une fonction, Théorème de la bijection)**.**

1. Commençons par remarquer que, pour tout $x \neq 0$, $1 + x^2 \geqslant 1$ car un carré est toujours positif. Donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   Afin d'étudier la monotonie de f, calculons sa dérivée.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

   Or $1 + x^2 \geqslant 1$, donc $f'(x)$ est du signe de x pour tout x réel.

   On trouve donc les tableaux de signe et de variation suivant :

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\searrow$

2. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   $x \mapsto 1+x^2$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ puisque qu'il est supérieur à 1.

   Par opération sur les fonctions continues, f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$.

   De plus, d'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(0)]$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   De plus, $f(0) = 1$.

   Finalement, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0;1[$.

EXERCICE 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
f est continue sur $\mathbb{R}$ et $y=0$ est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet au moins une solution, *ie* f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5 (Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection)**.**
Commençons par remarquer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Regardons ensuite les variations de f sur $\mathbb{R}$, pour ce faire, calculons sa dérivée.

$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$

On trouve ainsi les tableaux de signes et de variation suivants :

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Regardons la continuité de f.

$x \mapsto 1-x^2$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont des polynômes donc continus sur $\mathbb{R}$.

De plus, $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ comme nous l'avons montré précédemment.

Par quotient de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour finir, regardons les limites de f.

f étant continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

Pour ce qui est des limites en $+\infty$ et en $-\infty$, il s'agit de formes indéterminées du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Factorisons par le terme prédominant.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1}
\end{aligned}$$

Or, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Par opération sur les limites, on trouve alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Finalement, f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\frac{1}{2}$ est compris entre $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
D'après le théorème de la bijection (ou le corollaire du théorème aux valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement une solution dans $]0;+\infty[$.

De même, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et $\frac{1}{2}$ est compris entre $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
D'après le théorème de la bijection (ou le corollaire du théorème aux valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement une solution dans $]-\infty;0]$.

Donc, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6.
Commençons par montrer que f est bien définie sur l'intervalle considéré, pour ce faire, regardons le signe de $x \mapsto x - x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - x^2 = x(1-x)$, il s'agit d'un polynôme du second degré s'annulant en 0 et 1 et dont le coefficient devant le terme en x^2 est négatif.

$x - x^2$ est donc positif entre ses racines donc entre 0 et 1 et a fortiori entre $\frac{1}{2}$ et 1.

f est donc bien définie sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Regardons les variations de f, pour ce faire, dérivons la fonction f.

$\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Une racine carrée étant toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

On trouve donc les tableaux de signes et de variations suivant :

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	|	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	|	$\searrow$

f est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Regardons la continuité de f, $x \mapsto x - x^2$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a montré précédemment qu'il était positif sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$, or la racine carré est continue sur $\mathbb{R}_+$, par composition de fonction continue, la fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ sur $\left[f(1); f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Pour expliciter sa fonction réciproque, posons $y = f(x)$, pour $y \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x-x^2} \\
y^2 &= x - x^2 \\
y^2 &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} - y^2 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\
\sqrt{\frac{1}{4} - y^2} &= x - \frac{1}{2} \text{ car } y \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \\
\sqrt{\frac{1}{4} - y^2} + \frac{1}{2} &= x
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction réciproque de f est $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} + \frac{1}{2}$.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 7.

1. Séparez bien les cas $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

   Dans le cas $]-\infty;0[$, il faut utiliser les fonctions classique pour montrer que la fonction est continue. Attention à ne pas oublier de vérifier que le dénominateur est non nul.

   Dans le cas $]0;+\infty[$, il faut commencer par remarquer que pour tout $x>0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$. Vous pouvez alors passer par les fonctions classiques et les opérations sur les fonctions continues pour montrer que la fonction est continue.

2. Il faut ici calculer la limite à gauche et à droite en 0.

   À droite, il faudra utiliser une croissance comparée car il s'agit d'une forme indéterminée.

   À gauche, il faudra utiliser une limite classique, il s'agit là aussi d'une forme indéterminée.

   Vous trouverez alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, elles sont différentes, la fonction n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 8.
Cet exercice vous demandera d'avoir bien compris le théorème des valeurs intermédiaires pour le résoudre.

Posez ici $g(x) = f(x) - x$ et appliquez le théorème des valeurs intermédiaires pour $y = 0$.

EXERCICE 9.
Cet exercice est un peu plus délicat que le précédent mais présente de fortes ressemblances

Posez ici $h(x) = g(x) - f(x)$ et appliquez le théorème des valeurs intermédiaires pour $y = 0$.

EXERCICE 10.

1. Il s'agit d'une application directe d'une croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Montrez pour ce faire que $f'(x) = e^{-x}(1-x)$. Vous en déduirez le tableau de variations.

3. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant les fonctions classiques et les opérations sur les fonctions continues.

   Calculez $f(0)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(1)$ et $f(1)$.

   Utilisez le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à $[0;1]$ et $]1;+\infty[$ pour montrer qu'il y a une unique solution dans ces deux intervalles.

4. Vous devriez trouver $x = 0$ dans le cas $r = 0$ et $x = 1$ dans le cas $r = \frac{1}{e}$.

EXERCICE 11.
Partie A :

1. Vous devriez trouver que $g'(x) = 2e^x - 1$ et que $g'(x)$ est strictement positive si et seulement si $x > -\ln(2)$.

2. En $+\infty$, il faudra utiliser une croissance comparée. Vous devriez aboutir à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   Montrez que $g(-\ln(2)) < 0$.

   Appliquez le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty;-\ln(2)[$ et $]-ln(2);+\infty[$.

4. On cherche alors les deux solutions. Pour ce qui est de β, on sait qu'il s'agit de l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $]-ln(2);+\infty[$.

   Pour montrer que $\beta = 0$, il faut donc montrer que $g(0) = 0$ et $0 \in]-ln(2);+\infty[$. Puisque β est unique, on trouve alors $\beta = 0$.

   Pour l'encadrement de α, il faut calculer $g(-2)$ et $g(-1)$ et montrer que $g(-1) < g(\alpha) < g(-2)$.

   En utilisant la décroissance de g sur $]-\infty;-\ln(2)[$, vous pouvez conclure.

5. On sait que g s'annule en α et β, il faut utiliser le tableau de variation de g pour dire quand $g(x)$ est positif et quand il est négatif.

Partie B :

1. En $-\infty$, on trouve une forme indéterminée du type "$0 \times \infty$" dans le terme xe^x que l'on peut résoudre par croissance comparée. Vous aboutirez à $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   En $+\infty$, on trouve une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$". Il faut ici factoriser par le terme prédominé : e^{2x} et ensuite utiliser la croissance comparée sur le terme xe^{-x} pour aboutir à $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Je vous laisse faire cette question. Vous avez tout à votre disposition pour trouver la solution.

3. Montrez que $g(\alpha) = 0$ entraîne que $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$.

   En utilisant le fait que $e^{2\alpha} = (e^\alpha)^2$, vous pouvez aboutir à la réponse.

4. Il faut commencer par étudier les variations de $x \mapsto x^2 + 2x$. Pour cela, vous pouvez regarder la dérivée de la fonction, regarder son signe puis les variations de la fonction.

   Vous trouverez alors que $x \mapsto x^2 + 2x$ est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$.

   En utilisant l'inégalité $-2 < \alpha < -1$, vous trouvez par décroissance de la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$, $-1 < \alpha^2 + 2\alpha < 0$.

   En utilisant l'égalité de la question précédente, vous trouverez l'inégalité recherchée.

EXERCICE 12.

1. Considérez la fonction $f : x \mapsto e^x + x$.

   Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Montrez que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. (par exemple en calculant sa dérivée.

   Montrez que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $f(0) = 1$.

   Vous pouvez maintenant utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour tout $y = n$ pour prouver l'existence d'un unique u_n.

2. Montrer que $f(u_{n+1}) > f(u_n)$.

   En utilisant la croissance de f, vous pourrez montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.

3. En utilisant le théorème de la limite monotone pour les suites, vous savez que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ pour ℓ finie.

   Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, par continuité de f, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell) = e^\ell + \ell$.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n$, donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$.

   C'est impossible, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus complexes et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 13. Commencez par montrer que f est continue sur tous les intervalles $]n; n+1[$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Ensuite étudier la continuité de la fonction en chaque point n en regardant la limite à gauche et la limite à droite.

EXERCICE 14. Cet exercice ressemble beaucoup à l'exercice 12 n'essayez de le faire qu'après avoir fait l'exercice précédent.

1. Il s'agit d'un cas d'application classique du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

2. Encore une fois, une question classique, regarder $f_n(0)$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et utiliser les variations de f_n.

3. Utilisez le théorème d'encadrement.

4. Utilisez le fait que $nu_n = 1 - u_n^5$.

5. Je vous laisse regarder les fiches Scilab, vous pouvez utiliser un tableau ou une boucle for.

EXERCICE 15.

1. Je vous laisse regarder les fiches Scilab, vous pouvez utiliser un tableau ou une boucle for.
2. Encore une fois, il s'agit d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
3. Il s'agit de jouer avec la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. N'oubliez pas que $f_n(u_{n+1}) = 1$.
4. Utilisez le théorème de la limite monotone.
5. Utilisez la continuité de f pour arriver à la contradiction. Cela ressemble fortement à ce qui a été fait dans l'exercice 12.

EXERCICE 16.

1. Il faut utiliser le théorème de la bijection.
2. $G(y) = -\ln(-\ln(y))$.
3. Je vous laisse vous reporter au TP sur le tracer de graphes.

EXERCICE 17.

1. Utilisez une récurrence.
2. Utilisez la continuité de f.