TD 12 : Séries numériques

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Définition).

1. Choisir 4 séries (celles que vous souhaitez parmi les exercices d'application) et rédiger un programme Scilab permettant de renvoyer la valeur de la 888-ième somme partielle
2. Choisir ensuite 4 séries convergentes dont vous avez calculé la somme (celles que vous souhaitez parmi les exercices d'application) et rédiger un programme Scilab permettant de renvoyez la valeur de l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à 10^{-6} près.
3. Tester vos programmes sur Scilab.

EXERCICE 2 (Nature d'une série et Chapitre 6).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+n^2} < \frac{1}{n^2}$.

   En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$ est croissante

   En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n+n^2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 3 (Convergence absolue).

Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2^n}$ converge

EXERCICE 4 (Séries polynomiales, opérations sur les séries). Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme dans le cas où elles convergent.

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2 \qquad \sum_{n\geqslant 0}(n+7)^2$$

EXERCICE 5 (Séries géométriques et dérivées, opération sur les séries). Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme dans le cas où elles convergent.

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}(e-3)^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)^2}{3^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} ne^n$$

EXERCICE 6 (Exponentielle, opération sur les séries). Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme dans le cas où elles convergent.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{7^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$$

EXERCICE 7 (Télescopage).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.
2. Déterminer la nature et la somme en cas de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(\ln(n+1) - \ln(n))$.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 8. Encore quelques séries, mais cette fois, c'est à vous de trouver la méthode à utiliser pour déterminer la nature et, en cas de convergence, calculer la somme des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{4^{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n n}{n!}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n+1)}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} n(n-2)3^n \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-2}{n!}$$

EXERCICE 9.

1. Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ convergent.
2. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 10.

1. Trouvez des réels a et b tels que, pour tout $n\geqslant 2$, $\frac{1}{n(n-1)}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n}$.

   En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$.
2. Trouvez des réels a, b et c tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}$.

   En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Trouvez des réels a et b tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n}$.

   En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+2)}$.

EXERCICE 11. Le but de cet exercice va être de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

On pose $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles de cette série. On considérera les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (suite constituée des termes pairs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$) et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (suite des termes impairs).

1. Cette série converge-t-elle absolument ?
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En admettant que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite.

   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus complexes et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus délicates que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 12 (Inégalité triangulaire)**.** Soit un série de terme général u_n absolument convergente.

Montrez l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$$

EXERCICE 13.

1. Trouvez des réels a, b, c et d tels que, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2}$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
3. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.
4. Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

EXERCICE 14.

1. Donner l'ensemble de définition et étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$
3. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
4. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

EXERCICE 15 (Critère spécial des séries alternées)**.**

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose S_n la n-ième somme partielle de la série de terme général $(-1)^{n+1}u_n$.

Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_p = S_{2p}$ et $\beta_p = S_{2p+1}$.

1. Montrer que les suites $(\alpha_p)_{p \geqslant 0}$ et $(\beta_p)_{p \geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la série de terme général $(-1)^{n+1}u_n$ converge.