Correction TD 12 : Séries numériques

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1. Je vous laisse retrouver les séries auxquelles sont associés les algorithmes suivants.

1.

```
n=888
S=1/2
for k=2 :n
    S=S+1/(k+k^2)
end
disp(S)
```

```
n=888
S=1
for k=1 :n
    S=S+((-1)^k)/(2^k)
end
disp(S)
```

```
n=888
S=0
for k=0 :n
    S=S+k+1
end
disp(S)
```

```
n=888
S=0
for k=0 :n
    S=S+((k+1)^2)/(3^n)
end
disp(S)
```

EXERCICE 2.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $n^2 + n > n^2$.

   Par passage à l'inverse, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+n^2} < \frac{1}{n^2}$.

   En sommant l'inégalité de 1 à n, on trouve :

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   Pour $n \geqslant 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} = \frac{1}{n+1+(n+1)^2}$, or $\frac{1}{n+1+(n+1)^2} > 0$.

   Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$ est croissante.

   La dernière question est plus délicate et vous verrez ce genre de raisonnements en cours l'an prochain, il vous serait profitable de travailler sur la suite de la correction.

   Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est croissante et converge (voir le cours).

   On trouve donc que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   Ainsi, d'après ce qui précède, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$ est donc croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$ converge vers une limite finie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2}$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, $n > \sqrt{n}$.

   Par passage à l'inverse, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   En sommant l'inégalité de 1 à n, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ (voir le cours).

Par comparaison avec une suite qui diverge vers $+\infty$ (voir le chapitre 6), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

EXERCICE 3. Commençons à remarquer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$.

Étudions la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ est donc une série géométrique qui est donc convergente car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ de somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente.

EXERCICE 4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}n+1=+\infty$.

La suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)$ est divergente.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}2=2$, la suite étant constante.

La suite $(2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}2$ est divergente.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}n+7=+\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$. Par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+7)^2=+\infty$.

La suite $((n+7)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}((n+7)^2)$ est divergente.

EXERCICE 5. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{e^k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^k$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{-n}$ est une série géométrique et $\left|\frac{1}{e}\right|<1$, elle est donc convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-n}=\frac{1}{1-e}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e-3)^n$ est une série géométrique, or $2<e<3$, donc $-1<e-3<0$ et finalement $|e-3|<1$. La série est donc convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e-3)^n=\frac{1}{1-(e-3)}=\frac{1}{1-e+3}=\frac{1}{4-e}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}2^n$ est une série géométrique et $|2|>1$, elle est donc divergente.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{k}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée et $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, la série est donc convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$.

Finalement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n}{2^n}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\times 4=2$.

Pour tout $n\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)^2}{3^n} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n^2+2n+1}{3^n}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)+3n+1}{3^n}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)}{3^n}+\sum_{k=0}^{n}\frac{3n}{3^n}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{3^{n-1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n}\\
&= \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{3^{n-1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n} \qquad = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3^{n-1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n}
\end{aligned}$$

De plus, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{n}{3^{n-1}}$ sont des séries géométriques dérivées et $\left|\frac{1}{3}\right|<1$, elles sont donc convergentes et leur somme sont $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{2}{\frac{8}{27}}=\frac{27}{4}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}$ est une série géométrique et $\left|\frac{1}{3}\right|<1$, la série est donc convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$.

Finalement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)^2}{3^n}$ converge et sa somme est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n} &= \frac{1}{9}\times\frac{27}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\\
&= \frac{3}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Pour tout $n\geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n}ke^k=\sum\limits_{k=1}^{n}ke^k=e\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{k-1}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}ne^{n-1}$ est une série géométrique dérivée et $|e|>1$, elle est donc divergente.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}ne^{n}$ est donc divergente.

EXERCICE 6. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\frac{1}{1!}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-1
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. De plus,

Par opération sur les limites, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)!}$ est convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=e^1-1=e-1$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{7^n}{n!}$ est convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{7^n}{n!}=e^7$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

Par opération sur les limites, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{n!}$ est convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}=e^1+e^1=2e$.

EXERCICE 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n)$.
2. Par télescopage, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ et $\lim\inf\ln(x)=+\infty$.

   Par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$.

   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\ln(n+1)-\ln(n))$ est divergente.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 8.

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n!}$, il s'agit d'une série exponentielle, mais on ne commence pas à $n=0$.

On aboutit à $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\frac{2e-3}{2}$.

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n}{4^{n+1}}$, il faut se ramener à la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n}{4^{n-1}}$ qui est une série géométrique dérivée en la multipliant par un réel.

On aboutit à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{4^{n+1}}=\frac{1}{9}$.

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{3^n n}{n!}$, il faut commencer par remarquer que le terme $n=0$ est nul, on peut donc commencer la somme à $n=1$. Il faut alors simplifier la fraction $\frac{n}{n!}$ et effectuer un changement d'indice. Vous pouvez alors vous ramener à une série exponentielle.

On aboutit à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n n}{n!}=3e^3$.

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n(n+1)}{2^n}$, il faut se ramener à des séries géométriques dérivées. Je vous invite à reprendre les exercices corrigés précédemment pour trouver les manipulations à effectuer pour calculer cette somme.

On aboutit à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=8$

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}n(n-2)3^n$, il faut là encore se ramener à des séries géométriques dérivées.

On finit par montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} n(n-2)3^n$ est divergente.

Pour la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!}$, commencez par trouver des réels a, b et c tels que $n^2-2 = an(n-1)+bn+c$. Vous pouvez alors séparer la fraction $\frac{n^2-2}{n!}$ en trois fractions, vous obtenez alors trois sommes que vous pouvez calculer à l'aide de la formule de la série exponentielle et de changements d'indice.

On aboutit à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 0$.

EXERCICE 9.

1. L'idée est de remarquer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ en ne prenant que les termes pour n impair.

   Commencez à regarder pour les termes n pairs, *ie* montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{(2n)^2}$ converge en remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{-1}{(2n)^2} = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{n^2}$ et en sachant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Montrer ensuite que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est la somme de la série de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{(2n)^2}$.

   Vous pouvez alors en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

   Pour ce qui est de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, il suffit de montrer qu'elle est absolument convergente.

2. Commencez par montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   Vous pouvez alors aboutir à la solution.

EXERCICE 10.

1. Commencer par mettre le membre de droite sur le même dénominateur, on trouve

   $$\frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} = \frac{an+b(n-1)}{n(n-1)}$$

   On a alors l'égalité voulue si et seulement si $1 = an + b(n-1)$.

   Regroupez les termes par puissance de n.

   Alors $(a+b)n - b = 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

   On identifie les termes de gauche et de droite en fonction de leur puissance de n, comme dans le cas des polynômes.

   On trouve $a+b=0$ et $-b=1$.

   Finalement $b=-1$ et $a=-b=1$.

   On aboutit à $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

   Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.

   Il s'agit d'une somme télescopique, donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

   La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et sa somme est $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

2. En mettant le terme de droite sur le même dénominateur et en identifiant les puissances de n, on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b=-1$ et $c = \frac{1}{2}$.

   Il faut passer par les sommes partielles, presque tous les termes disparaissent les uns avec les autres, vous pouvez alors montrer que la série est convergente et que sa sommes est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{n+2} + \frac{b}{n} = \frac{na+b(n+2)}{n(n+2)}$.

   On a l'égalité recherchée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $1 = na + b(n+2) = (a+b)n + 2b$.

   Par identification, on a $a + b = 0$ et $2b = 1$, donc $b = \frac{1}{2}$ et $a = -b = -\frac{1}{2}$.

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2(k+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{2\times 2} \\ &= -\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$.

   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+2)} = 0$ et $\frac{1}{2(n+1)} = 0$.

   Finalement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n(n+2)}$ converge et sa somme est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 11.

1. Vous pouvez admettre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, il suffit alors seulement de reprendre la définition de l'absolue convergence.

2. Je vous mets le calcul car il peut être déroutant de jouer ainsi avec les indices.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{2n+1-(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{2n+1-2n-2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

   Je vous laisse montrer alors que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   Vous devriez alors pouvoir montrer d'une façon particulièrement semblable que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Pour montrer que les suites sont adjacentes, il reste à montrer que la suite $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. Il faut utiliser la proposition associée aux suites adjacentes. En utilisant la propriété que l'on vous demande d'admettre, vous devriez aboutir à la réponse.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus complexes et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus délicates que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 12. Il faut montrer la propriété par récurrence sur les sommes partielles. Puis vous obtiendrez la réponse par passage à la limite dans l'inégalité.

EXERCICE 13.

1. Il s'agit d'une version plus calculatoire de ce que vous avez fait dans l'exercice 10.
2. On a répondu à cette question dans le cours.
3. Là encore cela ressemble beaucoup à l'exercice 10.
4. Vous devriez aboutir à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$

EXERCICE 14.

1. Il s'agit d'une étude de fonction classique.
2. Regarder le signe de la fonction grâce à l'étude de ses variations.
3. Vous pouvez regarder la correction de l'exercice 7.
4. Vous pouvez utiliser une comparaison avec une suite qui tend vers $+\infty$.

EXERCICE 15.

Il s'agit d'une démonstration plus générale de ce que vous avez fait à l'exercice 11. N'hésitez pas à en profiter pour essayer de montrer, en passant par la quantification vue au chapitre 8 que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite.

En cas de soucis n'hésitez pas à taper "critère spécial des séries alternées" sur internet, il y a même une page Wikipédia sur ce sujet.