TD 13 : Dérivation

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Dérivabilité en un point)**.** Dire si les fonctions suivantes sont continues en 0, dérivables en 0 et si oui, donnez leur dérivée en 0.

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x) \\ f(0) = 0 \end{cases} \qquad \forall x \geqslant 0,\ f(x) = x^2\sqrt{x} \qquad \begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = x^{\frac{3}{4}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2 (Développement limité à l'ordre 1)**.** Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad f(x) = \ln(1+x^2) \qquad f(x) = e^{x^3-2} + x^4$$

EXERCICE 3 (Fonctions usuelles, opérations sur les fonctions)**.** Donnez les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont dérivables et donner leur dérivée.

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{4} \qquad g(x) = \frac{1}{4x+1} \qquad h(x) = x^2 - \frac{1}{x} + e^{-x} \qquad \varphi(x) = \sqrt{3x^3-1}$$

$$u(x) = \frac{xe^x}{x+1} \qquad v(x) = e^{-x^2} \qquad w(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad \psi(x) = \ln\left(2+\sqrt{x}\right)$$

EXERCICE 4 (Variations d'une fonction, extrema locaux)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, donner les ensembles de définition et trouver les extrema locaux des fonctions suivantes, dire s'il s'agit de maxima ou de minima et s'il sont seulement locaux ou également globaux.

$$f(x) = 2x^3+4x^2-3x+7 \qquad g(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad h(x) = \ln(1+x^2)$$

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 5 (Variations d'une fonction, extrema locaux)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, donner les ensembles de définition et trouver les extrema locaux des fonctions suivantes, dire s'il s'agit de maxima ou de minima et s'il sont seulement locaux ou également globaux.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad h(x) = x^4+4x^3-2x^2-12x+2$$

EXERCICE 6. Déterminer la limite de $\frac{e^x-e}{x-1}$ quand $x \to 1$.

EXERCICE 7. Considérons la fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^{\frac{1}{3}}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que f induit une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur I.

EXERCICE 8.

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} \forall x \neq 0,\ f(x) = e^{\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
Donner l'intervalle sur lequel la fonction f est continue, celui sur lequel elle est dérivable et sur cet intervalle calculer f'.

2. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\begin{cases} \forall x > 0,\ g(x) = \frac{x}{\ln(x)} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
Donner l'intervalle sur lequel la fonction g est continue, celui sur lequel elle est dérivable et sur cet intervalle calculer g'.

3. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\begin{cases} \forall x > 0,\ h(x) = x^2 \ln(x) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$
Donner l'intervalle sur lequel la fonction h est continue, celui sur lequel elle est dérivable et sur cet intervalle calculer h'.

EXERCICE 9 (Technique)**.** Donnez les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont dérivables et donner leur dérivée.

$$\alpha(x) = xe^{x^2+1} \qquad \beta(x) = \frac{x^2+3}{x-1} \qquad \gamma(x) = \ln(|x|) \qquad \delta(x) = \ln(x+\sqrt{x+1})$$

$$a(x) = x^{x^3-x} \qquad b(x) = \frac{\ln(e^x-2)}{x+2} \qquad c(x) = \frac{3^x + \ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{e^x-3}}$$

EXERCICE 10. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner l'ensemble sur lequel f est continue.
3. Donner l'ensemble D sur lequel f est dérivable.
4. Montrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = u(x)f(x)$ avec $u(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1}$.
5. Montrer que u est dérivable sur D et calculer u'.
6. Dresser le tableau de variations de u.
7. En déduire le signe de u sur D.
8. En déduire les variations de f.
9. f est elle prolongeable par continuité en 0 ?
10. Ce prolongement est il dérivable à gauche en 0 ?

EXERCICE 11. Soit f définie par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0;1]$.

5. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \geqslant 0,\ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

7. En déduire la limite de la suite (u_n).

8. Écrire un programme Scilab qui détermine un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est dérivable sur $[0;1]$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n!}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n(1) - g_n(0)| \leqslant \frac{1}{n!}$.

4. Posons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{u_n}{e} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n!}$.

5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 13. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes représentatives des fonctions f_λ sont parallèles.

2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes (qu'elles se coupent au même point).

EXERCICE 14. Soit $f :]-1;0[\cup]0;1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{|x|}{x}\ln(1 - |x|)$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $]-1;0[\cup]0;1[$, calculer sa dérivée.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.

3. Montrer que f est dérivable en 0.

EXERCICE 15 (Suite récurrente)**.** Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = ln(x) + 2$.
On donne les valeurs approchées à 10^{-1} près suivantes : $\ln(3) \approx 1.1$ et $\ln(4) \approx 1.4$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = x$ dans le segment $[3;4]$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [3;4]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$.

3. Définissons la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3;4]$.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.

e) Écrire un programme Scilab renvoyant en sortie une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

EXERCICE 16. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tous } x,\, y \in \mathbb{R}.$$