Correction TD 13 : Dérivation

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1.

La limite de $x\ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0\times\infty$" en 0.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Considérons le taux d'accroissement en 0, pour tout $x>0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\ln(x)-0}{x} = \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = 0$.
Le taux d'accroissement de f en 0 n'admet pas de limite finie en 0, f n'est donc pas dérivable en 0.

La fonction $x\mapsto x^2$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par produit de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en 0.

En 0, $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable.

Regardons le taux d'accroissement de f en 0, pour tout $x>0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}-0^2\times\sqrt{0}}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{x} = 0$.

Le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie 0 en 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}} = 0 = f(0)$ car $\frac{3}{4}>0$.

Donc f est continue en 0.

Considérons son taux d'accroissement en 0, pour tout $x>0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^{\frac{3}{4}}-f(0)}{x-0} = \frac{x^{\frac{3}{4}}-0}{x-0} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x} = x^{-\frac{1}{4}}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{4}} = +\infty$ car $-\frac{1}{4}<0$.

Le taux d'accroissement de f en 0 n'admet pas de limite finie en 0, f n'est donc pas dérivable en 0.

EXERCICE 2. Commençons par montrer que f est dérivable en 0.

Posons $u(x) = 1-x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons $v : y\mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$, $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, par opération sur les fonctions dérivables, v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $1-x>0 \Leftrightarrow 1>x$

La fonction u est donc strictement positive sur $]-\infty;1[$.

Par composition de fonctions dérivables, $v\circ u : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est dérivable sur $]-\infty;1[$ et non définie en dehors.

Elle est donc dérivable en 0 et admet un développement limité à l'ordre 1 en 0

$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$

La dérivée de v est $-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}$ pour $y>0$ et $u'(x) = -1$ pour tout $x\in]-\infty;1[$.

Par composition de fonctions dérivables, on a donc, pour tout $x<1$,

$$f'(x) = -\frac{-1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $f'(0) = \frac{1}{2(1-0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Finalement, on obtient le développement limité de f à l'ordre 1 en 0 suivant

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

Posons $u(x) = 1 + x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et un carré étant toujours positif, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

u est donc dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0. f admet donc un développement limité à l'ordre 1 en 0.

$f(0) = \ln(1 + 0^2) = \ln(1) = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

D'où, $f'(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$.

Finalement, on obtient le développement limité de f à l'ordre 1 en 0 suivant

$$f(x) = o(x)$$

Posons $u(x) = x^3 - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto x^4$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opération sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0. f admet donc un développement limité à l'ordre 1 en 0.

$f(0) = e^{0^3-2} + 0^4 = e^{-2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2e^{x^3-2} + 4x^3$.

D'où, $f'(0) = 3 \times 0^2e^{0^3-2} + 4 \times 0^3 = 0$.

Finalement, on obtient le développement limité de f à l'ordre 1 en 0 suivant

$$f(x) = e^{-2} + o(x)$$

EXERCICE 3.

Posons $u(x) = 1 + x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, u est strictement positive pour $x > -1$.

Donc $x \mapsto \ln(x + 1)$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

De plus, $x \mapsto 1 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par opération sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

Pour $x > -1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}\left(\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln(x+1) + 1\right) \end{aligned}$$

$4x + 1$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, il est également non nul pour $x \neq -\frac{1}{4}$.

Par quotient de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Pour tout $x \neq -\frac{1}{4}$, on a

$$g'(x) = \frac{4}{(4x+1)^2}$$

$-x$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de fonctions dérivables, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

x est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nul pour $x \neq 0$. Par quotient de fonctions dérivables, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

x^2 est une polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opération sur les fonctions dérivables, h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - e^{-x}$$

Posons $u(x) = 3x^3 - 1$, u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étudions le signe de u.

$$\begin{aligned} 3x^3 - 1 &\geqslant 0 \\ 3x^3 &\geqslant 1 \\ x^3 &\geqslant \frac{1}{3} \\ x &\geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ x &\geqslant 3^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante.

Donc, par composition de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $]3^{-\frac{1}{3}}; +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 3^{-\frac{1}{3}}$, on a $u'(x) = 9x^2$ et donc

$$\varphi'(x) = \frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3 - 1}}$$

Cela dépasse le cadre des exercices d'application, ce qui va suivre est même assez délicat, mais pour être complet, il reste à regarder la dérivabilité de φ en $3^{-\frac{1}{3}}$, en effet, la fonction y est définie, mais on ne sait pas si elle y est dérivable.

$3^{-\frac{1}{3}}$ est une racine de $3x^3 - 1$. On peut donc factoriser $3x^3 - 1$ par $x - 3^{-\frac{1}{3}}$.

Posons $3x^3 - 1 = (ax^2 + bx + c)(x - 3^{-\frac{1}{3}}) = ax^3 + (b - a \times 3^{-\frac{1}{3}})x^2 + (c - b \times 3^{-\frac{1}{3}})x - c \times 3^{-\frac{1}{3}}$.

Par identification, on trouve $a = 3$, $c = 3^{\frac{1}{3}}$ et $b = 3^{\frac{2}{3}}$.

On peut maintenant calculer le taux d'accroissement de φ en $3^{-\frac{1}{3}}$. Pour tout $x > 3^{-\frac{1}{3}}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3x^3 - 1} - 0}{x - 3^{-\frac{1}{3}}} &= \frac{\sqrt{(x - 3^{-\frac{1}{3}})(3x^2 + 3^{\frac{2}{3}}x + 3^{\frac{1}{3}})}}{x - 3^{-\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3x^2 + 3^{\frac{2}{3}}x + 3^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt{x - 3^{-\frac{1}{3}}}} \end{aligned}$$

Il reste alors à calculer la limite de ce taux d'accroissement pour $x \to 3^{-\frac{1}{3}\ +}$, je vous laisse ce calcul, mais vous trouverez $+\infty$. La fonction n'est pas dérivable en $3^{-\frac{1}{3}}$.

La fonction x est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit de fonctions dérivables, $x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x + 1$ est une polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en -1.

Finalement, u est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

On a alors, pour tout $x \neq -1$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+x+1)e^x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Posons $u(x) = -x^2$, u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition de fonctions dérivables, $v = e^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Posons $u(x) = \frac{1}{x}$, x est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0. Par quotient de fonctions dérivables, u est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Par composition de fonctions dérivables, $w = e^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout $x \neq 0$,

$$w'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Posons $u(x) = 2 + \sqrt{x}$ pour tout $x \geqslant 0$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par opération sur les fonctions dérivables, u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, une racine est toujours positive donc $2 + \sqrt{x} \geqslant 2 > 0$. u est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, $\psi = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors, pour tout $x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc

$$\psi'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}$$

Il reste à regarder la dérivabilité de ψ en 0, là encore c'est une question délicate même si le calcul est plus simple que dans le cas précédent.

Considérons son taux d'accroissement en 0, soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x-0} &= \frac{\ln(2+\sqrt{x}) - \ln(2)}{x} \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{x} \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Or, par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Par composition de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Par produit de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = +\infty$.

La fonction ψ n'est donc pas dérivable en 0.

EXERCICE 4.

f est un polynôme donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 6x^2 + 8x - 3$.

Cherchons le signe de cette dérivée, pour cela, considérons son discriminant.

$\Delta = 8^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 136 > 0$

Le polynôme a donc deux racines $x_+ = \frac{-8+\sqrt{136}}{2\times 3} = \frac{-8+\sqrt{4\times 34}}{2\times 3} = \frac{-4+\sqrt{34}}{3}$ et $x_- = \frac{-4-\sqrt{34}}{3}$.

On trouve donc le tableau de signe suivant

	$-\infty$	x_-		x_+	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f admet donc un maximum local en x_- et un minimum local en x_+.

Regardons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, Il s'agit de formes indéterminées du type $\infty - \infty$.

Factorisons par le terme prédominant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + 4x^2 - 3x + 7 \\
&= 2x^3 \left(\frac{2x^3}{2x^3} + \frac{4x^2}{2x^3} - \frac{3x}{2x^3} + \frac{7}{2x^3}\right) \\
&= 2x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{7}{2x^3}\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{7}{2x^3} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f n'admet donc pas de maximum global.

De même, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction f n'admet donc pas de minimum global.

La fonction g est définie pour $x \neq -1$. Donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

$1 - x$ et $1 + x$ sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$. $1 + x$ est non nul sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

Par quotient de fonction dérivables, g est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

De plus, pour tout $x \neq -1$,

$$g'(x) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Or, un carré est toujours positif, donc $(1+x)^2 \geqslant 0$. Par la règle des signes, on trouve que $g'(x) < 0$ pour $x \neq -1$.
On trouve alors le tableau de signe suivant :

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

D'après le tableau de variations, g n'admet ni minima ni maxima locaux.

g n'admet pas d'extrema locaux et n'est pas définie aux bornes de son intervalle de définition, g n'admet donc pas d'extrema globaux.

Posons $u(x) = 1 + x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Un carré est toujours positif, donc $x^2 \geqslant 0$, d'où $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$.

h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

u est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Du plus, u est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Par composition de fonction dérivables, $h = \ln(u)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$, et donc

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Or $1 + x^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $h(x)$ est du signe de x.

Finalement, on trouve le tableau de signe suivant :

	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	|	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	|	$\nearrow$	

h admet donc un minimum local en 0 et $h(0) = \ln(1 + 0^2) = \ln(1) = 0$.

Calculons les limites de h aux bornes de son intervalle de définition, *ie* en $-\infty$ et $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^2) = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$.

De même, on trouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$.

La fonction h n'admet donc pas de maximum global.

De plus, h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc pour tout $x \leqslant 0$, $h(x) \geqslant h(0)$.

h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) \geqslant h(0)$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant h(0)$.

h admet donc un minimum global en 0.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 5. Cet exercice ressemble au précédent, mais les calculs sont plus délicats.

Il faut commencer à montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour trouver les extrema, il faut dériver f, avant de faire ça, vous pouvez montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculez la dérivée de f, vous devriez aboutir à $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x)^2}$.

Vous pouvez alors établir le tableau de signe de f' en regardant le signe de $1 - x^2$.

On obtient ainsi le tableau de variations de f et on peut alors montrer que la fonction f admet un minimum local en -1 et $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et un maximum local en 1 et $f(1) = \frac{1}{2}$.

Il faut alors calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

On aboutit à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

f est décroissante sur $]-\infty; -1[$, donc pour tout $x < -1$, $f(x) \geqslant f(-1)$.

f est croissante sur $]-1; 1[$, donc pour tout $-1 < x < 1$, $f(x) \geqslant f(-1)$.

f est décroissante sur $]1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc pour tout $x > 1$, $f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant -\frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(-1)$.

f admet un minimum global en -1.

Vous pouvez montrer (et je vous le laisse en exercice) de même que f admet un maximum global en 1.

Il faut commencer par regarder l'intervalle sur lequel la fonction g est définie. Pour ce faire, il faut que $1 + x \neq 0$ et $\frac{1-x}{1+x} > 0$.

Pour regarder le signe de $\frac{1-x}{1+x}$, vous pouvez vous reporter à l'exercice précédent. Vous aboutirez à $\mathcal{D}_g =]-1; 1[$.

Pour trouver les variations de g, vous pouvez là encore la dériver et vous devriez aboutir à la formule $g'(x) = -\frac{2}{(1-x)(1+x)}$. Vous pouvez alors montrer que g n'admet pas d'extrema ni locaux ni globaux.

h est un polynôme donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

En calculant la dérivée de h, vous trouverez un polynôme de degré 3. Pour étudier son signe, vous pouvez remarquer que 1 est racine de h' et donc factoriser h' par $x-1$. Vous trouverez alors un polynôme de degré 2 donc vous pouvez trouver le signe de h'.

Je vous laisse poursuivre pour trouver que la fonction h admet un maximum local en -1 et deux minimums locaux qui sont également globaux en -3 et 1.

EXERCICE 6. Il s'agit de la limite en 1 du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 1. Vous pouvez alors trouver cette limite en utilisant le fait que la fonction exponentielle est dérivable en 1 et que sa dérivée est elle même.

EXERCICE 7.

1. Il faut ici utiliser le théorème de la bijection.

   Pour ce faire, il faut montrer que la fonction f est continue, calculer sa dérivée pour montrer qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

   En calculant les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$, vous aboutirez au fait que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1; +\infty[$.

2. Pour ce qui est de la dérivabilité de la fonction f^{-1}, je vous laisse reprendre le passage du cours à utiliser. Vous devez montrer que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Attention, on ne demande pas dans cet exercice de calculer la valeur de la dérivée de f^{-1}.

EXERCICE 8.

1. Vous pouvez commencer par montrer que la fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

   Pour ce qui est de la continuité en 0, il va falloir regarder la limite de la fonction f en 0.

   Je vous laisse le calcul de limite, mais vous devriez aboutir à $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ mais $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La fonction n'est donc pas continue en 0.

   Vous pouvez ensuite montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et que sa dérivée sur cet intervalle est $-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

   La fonction n'est cependant pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.
   ATTENTION. Ne mélangez pas la proposition. Une fonction dérivable est continue. Une fonction qui n'est pas continue n'est pas dérivable.

   Par contre, une fonction continue n'est pas forcément dérivable et une fonction qui n'est pas dérivable peut être continue.

2. Vous pouvez de nouveau commencer par montrer que g est continue sur $]0; +\infty[$.

   Il reste alors à montrer que g est continue en 0 en calculant sa limite. Il s'agit simplement d'une opération sur les limites et vous aboutirez au fait que la fonction g est continue en 0.

   Vous pouvez alors montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est alors $\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$.

   Pour ce qui est de la dérivabilité de g en 0, il faut calculer la limite du taux d'accroissement de g en 0. Vous pouvez alors montrer que $g'(0) = 0$.

3. Il s'agit de la même procédure que précédemment, je vous laisse le faire en autonomie.

   Vous devriez aboutir au fait que h est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, que $h'(x) = x(2\ln(x) + 1)$ pour $x > 0$ et $h'(0) = 0$.

EXERCICE 9. Le principal, si ce n'est le seul, intérêt de cet exercice est que vous fassiez les calcul. Notamment les dernières fonctions sont bien plus complexes à dériver que ce que vous pourrez avoir en concours. Cependant, vous pouvez considérer que si vous arrivez à calculer leur dérivée, les fonctions que vous aurez à dériver en concours ne devraient pas vous poser de gros soucis.

Je ne vous donnerai donc que les solutions sans le détail du calcul.

α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha'(x) = (1+2x^2)e^{x^2+1}$.

β est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et, pour tout $x \neq 1$, $\beta'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

γ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \neq 0$, $\gamma'(x) = \frac{1}{x}$ (ce n'est pas une erreur s'il n'y a pas de valeur absolue).

δ est dérivable sur $]\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2};+\infty[$ et, pour tout $x > \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\delta'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+\sqrt{x+1}}$.

a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $a'(x) = \left[(3x^2-1)\ln(x) + x^2 - 1\right] x^{x^3-x}$.

b est dérivable sur $]\ln(2);+\infty[$ et, pour tout $x > \ln(2)$, $b'(x) = \frac{\frac{e^x}{e^x-2}(x+2) - \ln(e^x-2)}{(x+2)^2}$

c est dérivable sur $]\ln(3);+\infty[$ et, pour tout $x > \ln(3)$, $c'(x) = \frac{\left(\ln(3)3^x + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right)\sqrt{e^x-3} - (3^x + \ln(1+\sqrt{x}))\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-3}}}{e^x-3}$

EXERCICE 10. Il s'agit d'un exercice de style particulièrement classique, je vous conseille de bien le travailler.

1. f est définie pour $x - 1 \neq 0$ et $\frac{x}{x-1} > 0$.

   Vous devriez aboutir à $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

2. La procédure est très classique, je vous laisse travailler dessus pour montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

3. Là encore, je vous laisse montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

4. Il faut dériver la fonction avec les formules habituelles, il n'y a pas de difficulté particulière à part la lourdeur du calcul.

5. Il faut donc d'abord montrer que u est dérivable sur D, pour ce faire, il faut montrer que sur D, $x-1 \neq 0$ et $\frac{x}{x-1} > 0$ puis utiliser les propositions d'opération et de composition des fonctions dérivables.

   En dérivant, vous aboutirez à $u'(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$.

6. Vous trouverez que u est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

7. On en déduit en calculant la limite de u en $-\infty$ que u est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et en calculant la limite de u en $+\infty$, on en déduit que u est strictement négative sur $]1;+\infty[$.

8. Vous pouvez alors en déduire le signe de f' et ses variations.

9. Il faut ici que vous calculiez la limite de f en 0. Vous aboutirez à $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, la limite étant finie, f est prolongeable par continuité en 0 et la valeur de son prolongement par continuité en 0 est 1.

10. Pour trouver la réponse à cette question, vous pouvez calculer le taux de la variation de f en 0 et calculer sa limite pour $x \to 0^-$.

EXERCICE 11. Il s'agit là aussi d'un exercice de type concours particulièrement classique.

1. Vous pouvez tout d'abord poser la fonction $u(x) = 1 + e^{-x}$, montrer que cette fonction est continue et strictement positive et en déduire par composition de fonctions continues que f est continue.

2. Vous pouvez montrer que u est dérivable et rappeler qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, vous pouvez en déduire, par composition de fonctions dérivables, que f est dérivable et $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

3. Par opération sur les fonctions continues, vous pouvez montrer que f' est continue.

4. Vous pouvez penser au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, cependant, vous ne pouvez pas l'appliquer directement à la fonction f pour conclure.

   Commencez par poser $g(x) = f(x) - x$. Vous pourrez alors utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'équation $g(x) = 0$.

   Il faut alors montrer que g est continue, montrer qu'elle est strictement monotone (plus particulièrement strictement décroissante) en calculant sa dérivée et regarder son signe. Il vous restera alors à calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$ et montrer que 0 est compris entre les deux limites.

   Vous pouvez alors conclure en utilisant le théorème.

5. Toutes la difficulté est de trouver les valeurs des différentes constantes. Pour utiliser l'inégalité des accroissements finis, il faut montrer que $|f'(x)| < \frac{1}{2}$.

   Je vous laisse trouver les valeurs des autres constantes.

6. Il s'agit simplement d'utiliser l'inégalité précédente à $x = u_n$ et ensuite de démontrer l'inégalité par récurrence avec l'inégalité que vous avez obtenu.

7. De l'inégalité précédente, vous pouvez montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - \alpha) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

8. Je vous laisse reprendre la fiche Scilab sur la boucle `while` pour trouver la réponse à cette question.

EXERCICE 12. Cet exercice est un peu plus délicat, il reprend des raisonnements assez classique.

1. Le nombre de termes du polynôme dépend de n, mais cela reste un polynôme. Vous pouvez ainsi montrer que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;1]$ comme produit de fonctions dérivables.

   Par le calcul, vous devriez aboutir à $g_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

2. En utilisant le fait que x est compris entre 0 et 1, vous aboutirez à l'inégalité recherchée en majorant $e^{-x}x^n$ par 1.

3. Vous pouvez alors utiliser l'inégalité des accroissements finis, je vous laisse trouver les valeurs des différentes constantes à utiliser.

4. Il faut ici utiliser l'inégalité précédente en montrant que $\frac{u_n}{e} = g_n(1)$ et $1 = g_n(0)$.

5. Par encadrement de limites, vous pouvez montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e} - 1\right) = 0$. Vous pouvez alors conclure.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 13.

1. Il faut ici calculer $f'(0)$ et l'équation de la tangente en 0. Pour qu'elles soient parallèles, il faut que le coefficient ne dépende pas de λ.

2. Il faut calculer $f'(1)$ et l'équation de la tangente en 1. Pour qu'elles soient concourantes, il faut une valeur de x qui ne dépend pas de x tel que y ne dépend pas de y.

EXERCICE 14. Il s'agit d'un exercice classique, la seule réelle difficulté est la présence de la valeur absolue.

Il vous faudra généralement séparer les cas $x > 0$ et $x < 0$ et traiter le cas de la dérivation en 0 à part en considérant la limite du taux de variation en 0.

EXERCICE 15. Cet exercice ressemble à plusieurs exercices vus précédemment, je vous laisse les reprendre pour trouver la solution à cet exercice.

EXERCICE 16. Cet exercice est particulièrement délicat. La fonction f est dérivable, que se passe-t-il si l'on dérive l'égalité par rapport à x ?