TD 14 : Intégrales

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Calcul de primitive)**.** Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$t \mapsto e^t + t^3 \qquad t \mapsto \frac{t-1}{2} \qquad t \mapsto t^2 + 1 + t\sqrt{t}$$

$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \qquad t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)} \qquad t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$t \mapsto te^{t^2} \qquad t \mapsto \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \qquad t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$$

EXERCICE 2 (Calcul d'intégrale par calcul de primitive)**.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^3 \frac{1}{t}\ dt \qquad \int_0^1 (t^3 - 2t^2 + 4)\ dt \qquad \int_0^2 (e^{3t} - t^2 + e^{-t})\ dt$$

$$\int_0^1 e^{2t-3}\ dt \qquad \int_0^2 t^2\sqrt{t}\ dt \qquad \int_e^5 \frac{1}{t\ln(t)}\ dt$$

$$\int_{-1}^2 \frac{t}{(1+t^2)^2}\ dt \qquad \int_{-2}^{-1} te^{-t^2}\ dt \qquad \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t}\ dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \qquad \int_0^1 (2t^2-3)^2\ dt \qquad \int_{-1}^1 e^t(2e^t-3)^2\ dt$$

EXERCICE 3 (Intégration par partie)**.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 t\ln(t)\ dt \qquad \int_{-1}^1 te^t\ dt \qquad \int_2^4 (t^2-1)\ln(t)\ dt \qquad \int_1^2 (t^2-3t+2)e^t\ dt$$

EXERCICE 4 (Changement de variables)**.** Calculer les intégrales suivantes avec les changements de variables proposés :

$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4\ dt$, $x = \frac{1}{t}$ $\qquad \int_0^1 \frac{t^2}{t+1}\ dt$, $x = t+1$ $\qquad \int_1^e (\ln(t))^2\ dt$, $x = \ln(t)$ $\qquad \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))}\ dt$, $x = \ln(t)$

EXERCICE 5 (Somme de Riemann)**.** Calculer les limites des suites suivantes pour $n \to +\infty$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{2n^2}} \qquad \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \qquad \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 6. Calculer les intégrales suivantes avec les changements de variables proposés :

$\int_1^{10} \frac{t^3}{t^2+2}\ dt$, $x = t^2$ $\qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t(t+1)} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\ dt$, $x = \frac{t}{t+1}$ $\qquad \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\ dt$, $x = 1+e^t$ $\qquad \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\ dt$, $x = \sqrt{t}$

EXERCICE 7.

1. On considère la fonction f définie sur $]1;3[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$.

   Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in]1;3[$,
$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$$
   Calculer $\int_4^5 f(t)\ dt$.

2. En vous inspirant de la question précédente, calculer $\int_{-3}^{-2} \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\ dx$.

EXERCICE 8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_0^a f(-t)\ dt$.
2. En déduire que si f est une fonction paire : $\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$.
3. Montrer que si f est une fonction impaire : $\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$.

EXERCICE 9. On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\ dt \quad et \quad v_n = \int_0^n e^{-t^2}\ dt$$
Quelle est la monotonie de ces suites ?

EXERCICE 10. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.

EXERCICE 11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}$.
3. En déduire la nature et la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

   En déduire la limite de la série de terme général $\frac{1}{n!}$.

EXERCICE 12. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [k;k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
2. En déduire un encadrement de $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ dt$.
3. Conclure.

EXERCICE 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\ dx$.

1. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\ dx \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 14. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ dx$.

1. Calculer I_0.

2. Par intégration par parties, montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.

3. Calculer I_1 et I_2.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 15. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. a. Donner le tableau de variation de la fonction f.
   b. Ajouter la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et la valeur $f(0)$ dans le tableau de variation.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx$.
   a. Montrer que pour tout $x \in [n;n+1]$, on a : $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
   c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et préciser sa limite.
3. Soit F la fonction définie, pour tout $x \geqslant 0$, par : $F(x) = (\ln(x+3))^2$.
   a. Justifier que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et déterminer F'.
   b. En déduire la valeur de u_n. Comparer avec le résultat précédent.

EXERCICE 16. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8}\ dt$.
Montrer que g est prolongeable par continuité en 1 . Qu'elle est la valeur de ce prolongement en 1 ?

EXERCICE 17. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2}\ dt$.

1. Montrer que f est impaire à l'aide du changement de variable $u = -t$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2xf(x)$.