Correction TD 14 : Intégrales

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Calcul de primitive)**.**

Cherchons séparément une primitive de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto t^3$.

$t \mapsto e^t$ est une primitive de $t \mapsto e^t$.

$t \mapsto \frac{1}{4}t^4$ est une primitive de $t \mapsto t^3$.

Donc $t \mapsto e^t + \frac{1}{4}t^4$ est une primitive de $t \mapsto e^t + t^3$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$.

Cherchons indépendamment les limites de $t \mapsto \frac{1}{2}t$ et $t \mapsto \frac{1}{2}$.

$t \mapsto \frac{1}{4}t^2$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{2}t$.

$t \mapsto \frac{1}{2}t$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{2}$.

$t \mapsto \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$.

Cherchons indépendamment les primitives de $t \mapsto t^2$, $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t\sqrt{t}$.

$t \mapsto \frac{1}{3}t^3$ est une primitive de $t \mapsto t^2$.

$t \mapsto t$ est une primitive de $t \mapsto 1$.

Pour tout $t \geqslant 0$, $t\sqrt{t} = t \times t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{3}{2}}$.

Donc $t \mapsto \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$ est une primitive de $t \mapsto t\sqrt{t}$.

Finalement $t \mapsto \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$ est une primitive de $t \mapsto t^2 + 1 + t\sqrt{t}$.

Pour tout $t > 0$, $\frac{\ln(t)}{t} = \frac{1}{t} \times \ln(t)$.

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est une primitive de ln, on reconnait une forme $u'u$ pour $u = \ln$.

Donc $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(t))^2$ est une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$

Pour tout $t > 0$ et $t \neq 1$, $\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{1}{t}\frac{1}{\ln(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$.

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est une primitive de ln, on reconnait une forme $\frac{u'}{u}$ pour $u = \ln$.

Donc $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$.

Pour tout $t \neq -1$, $\frac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$.

Pour $u(t) = 1 + t$, on a $u'(t) = 1$, on reconnait donc une forme $u'u^{-2}$.

Donc $t \mapsto -\frac{1}{1+t}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$.

Pour $u(t) = t^2$, on a $u'(t) = 2t$, on reconnait donc une forme $u'e^u$.

Donc $t \mapsto \frac{1}{2}e^{t^2}$ est une primitive de $t \mapsto te^{t^2}$.

Pour $u(t) = \sqrt{t}$, on a $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, on reconnait donc une forme $u'e^u$.

Donc $t \mapsto 2e^{\sqrt{t}}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$.

Pour $u(t)=t^2$, on a $u'(t)=2t$, on reconnait donc une forme $\frac{u'}{u}$.
Donc $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.

EXERCICE 2 (Calcul d'intégrale par calcul de primitive)**.**

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{t}\ dt &= [\ln(t)]_1^3\\ &= \ln(3)-\ln(1)\\ &= \ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(t^3-2t^2+4\right)\ dt &= \int_0^1 t^3\ dt - 2\int_0^1 t^2\ dt + 4\int_0^1\ dt\\ &= \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 + 4\,[1]_0^1\\ &= \frac{1}{4}1^4-\frac{1}{4}0^4-2\left(\frac{1}{3}1^3-\frac{1}{3}0^3\right)+4(1-0)\\ &= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+4\\ &= \frac{3}{12}-\frac{8}{12}+\frac{48}{12}\\ &= \frac{43}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(e^{3t}-t^2+e^{-t}\right)\ dt &= \int_0^2 e^{3t}\ dt - \int_0^2 t^2\ dt + \int_0^2 e^{-t}\ dt\\ &= \left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_0^2 - \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 + \left[-e^{-t}\right]_0^2\\ &= \frac{1}{3}e^6-\frac{1}{3}e^0-\left(\frac{1}{3}2^3-\frac{1}{3}0^3\right)+\left(-e^{-2}\right)-\left(-e^{-0}\right)\\ &= \frac{1}{3}e^6-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+1-e^{-2}\\ &= \frac{1}{3}e^6-\frac{1}{e^2}-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2t-3}\ dt &= \int_0^1 e^{2t}\times e^{-3}\ dt\\ &= e^{-3}\int_0^1 e^{2t}\ dt\\ &= e^{-3}\times\frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2t}\ dt\\ &= \frac{1}{2e^3}\left[e^{2t}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2e^3}\left(e^2-e^0\right)\\ &= \frac{1}{2e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 t^2\sqrt{t}\ dt &= \int_0^2 t^{\frac{5}{2}}\ dt\\ &= \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^2\\ &= \frac{2}{7}2^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{7}0^{\frac{7}{2}}\\ &= \frac{16}{7}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_e^5 \frac{1}{t\ln(t)}\ dt &= \int_e^5 \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ dt\\ &= [\ln(\ln(t))]_e^5\\ &= \ln(\ln(5)) - \ln(\ln(e))\\ &= \ln(\ln(5)) - \ln(1)\\ &= \ln(\ln(5))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{t}{(1+t^2)^2}\ dt &= \frac{1}{2}\int_{-1}^2 2t(1+t^2)^{-2}\ dt\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_{-1}^2\\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+2^2} - \left(-\frac{1}{1+(-1)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} te^{-t^2}\ dt &= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} -2te^{-t^2}\ dt\\ &= -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_{-2}^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^{-4}\right)\\ &= \frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\ln(t)}{t}\ dt &= \int_1^3 \frac{1}{t}\times\ln(t)\ dt\\ &= \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^3\\ &= \frac{1}{2}(\ln(3))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2\\ &= \frac{1}{2}(\ln(3))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt\\ &= -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2\sqrt{1-0^2}\right)\\ &= 1-\sqrt{\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (2t^2-3)^2\ dt &= \int_0^1 \left(4t^4-12t^2+9\right)\ dt \\
&= 4\int_0^1 t^4\ dt - 12\int_0^1 t^2\ dt + 9\int_0^1\ dt \\
&= 4\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 - 12\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 + 9\,[t]_0^1 \\
&= \frac{4}{5} - \frac{12}{3} + 9 \\
&= \frac{29}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^t(2e^t-3)^2\ dt &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 2e^t(2e^t-3)^2\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(2e^t-3)^3\right] \\
&= \frac{1}{6}(2e^1-3)^3 - \frac{1}{6}(2e^{-1}-3)^3 \\
&= \frac{1}{6}(2e-3)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{e}-3\right)^3
\end{aligned}$$

EXERCICE 3 (Intégration par partie)**.**

Posons $u(t)=\ln(t)$ et alors $v'(t)=t$.

Ainsi $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v(t)=\frac{1}{2}t^2$.

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 t\ln(t)\ dt &= \left[\ln(t)\times\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\times\frac{1}{2}t^2\ dt \\
&= \frac{1}{2}\times 2^2\times\ln(2) - \frac{1}{2}\times 1^2\ln(1) - \frac{1}{2}\int_1^2 t\ dt \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{4}(4-1) \\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Posons $u(t)=t$ et alors $v'(t)=e^t$.

Ainsi $u'(t)=1$ et $v(t)=e^t$.

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 te^t\ dt &= \left[te^t\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t\ dt \\
&= e + \frac{1}{e} - \left[e^t\right]_{-1}^1 \\
&= e + \frac{1}{e} - \left(e - \frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Posons $u(t)=\ln(t)$ et alors $v'(t)=t^2-1$.

Ainsi $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v(t)=\frac{1}{3}t^3-t$.

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_2^4 (t^2-1)\ln(t)\ dt &= \left[\ln(t)\Big(\frac{1}{3}t^3-t\Big)\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{t}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\ dt \\
&= \left(\frac{1}{3}\times 4^3-4\right)\ln(4) - \left(\frac{1}{3}\times 2^3-2\right)\ln(2) - \int_2^4 \left(\frac{1}{3}t^2-1\right)\ dt \\
&= \left(\frac{64}{3}-4\right)\ln(4) - \left(\frac{8}{3}-2\right)\ln(2) - \frac{1}{3}\int_2^4 t^2\ dt + \int_2^4\ dt \\
&= \left(\frac{64}{3}-\frac{12}{3}\right)\ln(4) - \left(\frac{8}{3}-\frac{6}{3}\right)\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_2^4 + [1]_2^4 \\
&= \frac{52}{3}\ln(4) - \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right) + (4-2) \\
&= \frac{104}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\times\frac{56}{3} + 2 \\
&= 34\ln(2) - \frac{38}{9}
\end{aligned}$$

Posons $u(t) = t^2-3t+2$ et alors $v'(t) = e^t$.

Ainsi $u'(t) = 2t-3$ et $v(t) = e^t$.

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (t^2-3t+2)e^t\ dt &= \left[(t^2-3t+2)e^t\right]_1^2 - \int_1^2 (2t-3)e^t\ dt \\
&= (4-6+2)e^2 - (1-3+2)e^1 - \int_1^2 (2t-3)e^t\ dt \\
&= -\int_1^2 (2t-3)e^t\ dt
\end{aligned}$$

Posons $u(t) = 2t-3$ et alors $v'(t) = e^t$.

Ainsi $u'(t) = 2$ et alors $v(t) = e^t$.

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (t^2-3t+2)e^t\ dt &= -\left(\left[(2t-3)e^t\right]_1^2 - \int_1^2 2e^t\ dt\right) \\
&= -\left((2\times 2-3)e^2 - (2\times 1-3)e^1 - 2\int_1^2 e^t\ dt\right) \\
&= -e^2 - e + 2\left[e^t\right]_1^2 \\
&= -e^2 - e + 2e^2 - 2e \\
&= e^2 - 3e
\end{aligned}$$

EXERCICE 4 (Changement de variables)**.**

Le changement de variable est $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.

1. Par la formule $dx = \varphi'(t)\ dt$, on trouve que $dx = -\frac{1}{t^2}\ dt$.
2. $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = t$
3. $$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4\ dt &= \left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \times \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \times \left(-\frac{-1}{t^2}\right)\ dt \\
&= -\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \times \frac{-1}{t^2}\ dt \\
&= -(1+x)^4\ dx
\end{aligned}$$

4. $\varphi(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $\varphi(2) = \frac{1}{2}$

Rédaction :
Effectuons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, on a alors $dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \, dt &= \int_1^{\frac{1}{2}} -(1+x)^4 \, dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1+x)^4 \, dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(1+x)^5\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{5}\left(2^5 - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right)\end{aligned}$$

Le changement de variable est $\varphi(t) = 1 + t$.

1. Par la formule $dx = \varphi'(t)\, dt$, on trouve que $dx = dt$.
2. $x = 1 + t \Leftrightarrow x - 1 = t$
3. $$\frac{t^2}{t+1}\, dt = \frac{(x-1)^2}{x}\, dx$$
4. $\varphi(0) = 0 + 1 = 1$ et $\varphi(1) = 1 + 1 = 2$

Rédaction : Effectuons le changement de variable $x = t + 1$, on a alors $dx = dt$.

On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}\, dt &= \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\, dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\, dx \\ &= \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int_1^2 x\, dx - 2\int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - 2\,[x]_1^2 + [\ln(x)]_1^2 \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} - 2(2-1) + \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le changement de variable est $\varphi(t) = \ln(t)$.

1. Par la formule $dx = \varphi'(t)\, dt$, on trouve que $dx = \frac{1}{t}\, dt$.
2. $x = \ln(t) \Leftrightarrow e^x = t$
3. $$\begin{aligned}(\ln(t))^2\, dt &= (\ln(t))^2\, \frac{t}{t}dt \\ &= t(\ln(t))^2\, \frac{1}{t}dt \\ &= e^x x^2\, dx\end{aligned}$$

4. $\varphi(1) = \ln(1) = 0$ et $\varphi(e) = \ln(e) = 1$

Rédaction : Effectuons le changement de variable $x = \ln(t)$, on a alors $dx = \frac{1}{t}dt$.
On trouve donc

$$\int_1^e (\ln(t))^2 \ dt = \int_0^1 x^2 e^x \ dx$$

Posons $u(x) = x^2$ et alors $v'(x) = e^x$.
Ainsi $u'(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$.
Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln(t))^2 \ dt &= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \ dx \\ &= 1^2 \times e^1 - 0^2 e^0 - 2\int_0^1 xe^x \ dx \\ &= e - 2\int_0^1 xe^x \ dx\end{aligned}$$

Posons $u(x) = x$ et alors $v'(x) = e^x$.
Ainsi $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.
Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln(t))^2 \ dt &= e - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \ dx\right) \\ &= e - 2\left(1 \times e^1 - 0 \times e^0 - \left[e^x\right]_0^1\right) \\ &= e - 2e + 2\left(e^1 - e^0\right) \\ &= -e + 2e - 2 \\ &= e - 2\end{aligned}$$

Le changement de variable est $\varphi(t) = \ln(t)$.

1. Par la formule $dx = \varphi'(t) \ dt$, on trouve que $dx = \frac{1}{t} \ dt$.

2. $x = \ln(t) \Leftrightarrow e^x = t$

3. $$\begin{aligned}\frac{1}{t(1+\ln(t))} \ dt &= \frac{1}{t(1+\ln(t))} \ \frac{t}{t}dt \\ &= \frac{t}{t(1+\ln(t))} \ \frac{1}{t}dt \\ &= \frac{1}{1+\ln(t)} \ \frac{1}{t}dt \\ &= \frac{1}{1+x} \ dx\end{aligned}$$

4. $\varphi(1) = \ln(1) = 0$ et $\varphi(e) = \ln(e) = 1$

Rédaction : Effectuons le changement de variable $x = \ln(t)$, on a alors $dx = \frac{1}{t}dt$.
On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} \ dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \ dx \\ &= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

EXERCICE 5 (Somme de Riemann)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)}}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)}}\end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ entre 0 et 1.

La suite converge donc et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$.

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{2n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Il s'agit d'une somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction $x \mapsto xe^{\frac{x^2}{2}}$ entre 0 et 1.

La suite converge donc et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{2n^2}} = \int_0^1 xe^{\frac{x^2}{2}}\ dx$.

Or $\int_0^1 xe^{\frac{x^2}{2}}\ dx = \left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{e}-1$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{2n^2}} = \sqrt{e}-1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Il s'agit d'une somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction $x \mapsto x^2$ entre 0 et 1.

La suite converge donc et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = \int_0^1 x^2\ dx$.

Or $\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

Il s'agit d'une somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et 1.

La suite converge donc et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx$.

Or $\int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Finalement $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3}$.

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 6.

$dx = 2tdt$

$\frac{t^3}{t^2+2}\ dt = \frac{1}{2}\frac{x}{x+2}\ dx$

N'oubliez pas de changer les bornes de l'intégrale.

Pour le calcul de l'intégrale, vous pouvez montrer et utiliser le fait que $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

Vous devriez aboutir à $\int_1^{10} \frac{t^3}{t^2+2}\ dt = 99 - 2\ln(34)$.

$dx = \frac{1}{1+t^2}\ dt$

$\frac{1}{t(t+1)} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\ dt = \frac{1}{x}\ln(x)\ dx$

N'oubliez pas de changer les bornes de l'intégrale.

Vous devriez être capable de calculer l'intégrale ainsi obtenue, ci besoin, reprenez les exercices d'application du cours.

Vous devriez aboutir à $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t(t+1)} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\ dt = \frac{1}{2}\left((\ln(2))^2 - (\ln(3))^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\ln(6)$

$dx = e^t\ dt$

$\frac{\ln\left(1+e^t\right)}{1-e^{-t}}\ dt = \frac{\ln(x)}{x}\ dx$

N'oubliez pas de changer les bornes de l'intégrale.

Vous devriez être capable de calculer l'intégrale ainsi obtenue, ci besoin, reprenez les exercices d'application du cours.

Vous devriez aboutir à $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+e^t\right)}{1-e^{-t}}\ dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\ln(2+e)$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ dt$

$x^2 = t$

$\frac{1}{1+\sqrt{t}}\ dt = \frac{2x}{1+x}\ dx$

N'oubliez pas de changer les bornes de l'intégrale.

Pour résoudre cette intégrale, il est préférable d'utiliser une astuce que je vous ai indiquée dans la première intégrale de cet exercice. Je vous laisse reprendre ce calcul pour trouver comment faire.

Vous devriez aboutir à $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\ dt = 2 - 2\ln(2)$.

EXERCICE 7.

1. Pour trouver les valeurs de a et b, je vous laisse reprendre l'exercice 10 du TD12, nous avons déjà vu comment résoudre cette question.

   Vous devriez aboutir à $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

   Vous pouvez alors calculer l'intégrale en la séparant en 2, vous devriez alors aboutir à $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
2. L'idée est d'utiliser la même procédure, commencez par chercher a et b tels que

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$$

   Vous trouverez $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{7}{2}$.

   Et finalement, vous devriez aboutir au résultat $-5\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{7}{2}\ln(5)$.

EXERCICE 8.

1. Posez le changement de variable $x = -t$.

   Faites attention à ne pas vous tromper en changeant les bornes, c'est une erreur classique que vous avez commise si vous trouvez un - devant l'intégrale.

2. Si une fonction est paire, alors $f(-x) = f(x)$.

   Séparez l'intégrale sur $[-a; a]$ entre $[-a; 0]$ et $[0; a]$.

   Vous pouvez conclure en utilisant la question précédente.

3. Si une fonction est impaire, alors $f(-x) = -f(x)$.

   Séparez l'intégrale sur $[-a; a]$ entre $[-a; 0]$ et $[0; a]$.

   Vous pouvez conclure en utilisant la question 1.

EXERCICE 9.

Pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, commencez par considérer $u_{n+1} - u_n$.

Vous pouvez alors utiliser la linéarité de l'intégrale et le fait que $t^n - t^{n+1} = t^n(1-t)$.

Finalement, en calculant l'intégrale, vous devriez aboutir à $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ et donc au fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Pour la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, commencez par considérer $v_{n+1} - v_n$.

Vous pouvez alors utiliser la relation de Chasles. Attention cependant, vous ne pourrez pas calculer explicitement cette intégrale. Par contre, vous pouvez utiliser le fait que l'exponentielle est toujours positive.

Et vous pourrez finalement montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

EXERCICE 10.

1. I_0 se calcule directement.

   Pour calculer I_1, je vous conseille d'utiliser une intégration par parties.

2. Vous pouvez démontrer sur $[0; 1]$, puis intégrer entre 0 et 1 l'inégalité $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$.

   En calculant chacune des intégrales, vous devriez aboutir à la réponse.

3. Vous pouvez utiliser un théorème d'encadrement pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. Vous pouvez montrer cette égalité par intégration par parties.

   Cette question n'est généralement pas la fin de l'exercice, qui devrait se poursuivre par un calcul d'équivalent que vous verrez l'an prochain.

EXERCICE 11.

1. I_0 se calcule directement.

   Pour calculer I_1, je vous conseille d'utiliser une intégration par parties.

2. Vous pouvez démontrer sur $[0; 1]$, l'inégalité $0 \leqslant 1 - t \leqslant 1$ puis, par croissance sur $[0; 1]$ de $t \mapsto t^n$, l'inégalité $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$ et enfin intégrer cette inégalité entre 0 et 1.

   En calculant chacune des intégrales, vous devriez aboutir à la réponse.

3. Vous pouvez utiliser un théorème d'encadrement pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. Vous pouvez montrer cette égalité par intégration par parties.

5. En utilisant la relation de la question 4, vous pouvez montrer l'égalité par récurrence.

   En utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, vous devriez aboutir à la réponse.

EXERCICE 12.

1. Vous pouvez utiliser ici la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$.
2. Vous trouverez l'encadrement recherché en intégrant l'inégalité de la question précédente entre k et $k+1$.
3. En calculant l'intégrale du milieu de l'encadrement, vous devriez aboutir à l'inégalité recherchée.

EXERCICE 13.

1. Vous pouvez calculer I_n directement par primitivation. Si vous avez de la peine à faire ce calcul, je vous invite à reprendre les exercices d'application du cours.
2. Cette question est un peu délicate car elle demande de faire pas mal de choses en autonomie.

   Le plus efficace est de regarder les variations de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$.

   En calculant sa dérivée et en regardant son signe sur $[2;+\infty[$, vous pourrez montrer que la fonction est décroissante.

   Vous pouvez alors montrer que sur $[k:k+1]$, $\frac{1}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.

   En intégrant l'inégalité entre k et $k+1$ et en calculant l'intégrale de droite (qui ne dépend pas de x), vous devriez aboutir à la réponse.
3. En sommant l'inégalité sur k, vous aboutirez à $S_n \geqslant I_{n+1}$.

   En utilisant la relation de la question 1, vous pourrez montrer par comparaison avec une série divergeant vers $+\infty$ la réponse à la question.

EXERCICE 14.

1. Vous pouvez calculer directement I_0.
2. Par intégration par partie et par linéarité de l'intégrale, vous devriez aboutir à $I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$.

   Vous pouvez ensuite retrouver le résultat voulu.
3. En utilisant la relation de récurence, vous devriez trouver $I_1 = \frac{4}{15}$ et $I_2 = \frac{16}{105}$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 15. Cet exercice est assez classique et pas particulièrement difficile à part pour la toute dernière question.

1. Il s'agit d'une étude de fonction classique, en cas de soucis, je vous invite à reprendre ce que l'on a fait sur le sujet précédemment.
2. Il s'agit d'une étude de suite comme vous avez pu en faire dans les exercices 10 et 11 par exemple.
3. C'est là encore un calcul classique. Cependant la vraie difficulté de l'exercice est le calcul de la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie qui n'est pas évidente.

EXERCICE 16. Il s'agit d'un taux d'accroissement !

EXERCICE 17. Cet exercice n'est pas évident car la fonction ainsi définie est très particulière. Je vous laisse y réfléchir, vous reverrez cela dans un chapitre dédié à ce genre de fonctions.