TD 16 : Convexité

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Opérations sur les fonctions C^∞)**.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2e^{3x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 (Caractérisation des fonctions convexes)**.** Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto x^2e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (Caractérisation des fonctions convexes)**.** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe C^2.
3. Montrer que f est concave.

4.* Montrer, pour tout x, $y \in D$, que

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 4. Déterminer pour quelles valeurs de a, $b \in \mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 + b & sinon \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ce cas, la fonction f est elle de classe C^2 ?

EXERCICE 5. En utilisant la convexité d'une certaine fonction, montrer l'inégalité suivante, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$:

$$exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}$$

EXERCICE 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Dresser le tableau de variation de f (limites incluses).
2. Étudier la convexité de f.
3. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de f et l'équation de la tangente en ce(s) point(s).

EXERCICE 7. Posons la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. Donner l'intervalle sur lequel f est de classe C^2.
3. Donner le tableau de variation de f et donner ses limites aux bornes de son intervalle de définition.
4. Étudier la convexité de f.
5. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de f.

EXERCICE 8. Montrer l'inégalité suivante par convexité, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$,

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$$

EXERCICE 9 (Ecrinome 2015)**.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ xe^{-x} & si\ x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Est elle continue en 0 ? Est elle dérivable en 0 ?
2. Donner le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$. (on précisera la limite de g en $+\infty$.)
3. Étudier la convexité de g sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 10 (EM Lyon 2016)**.** On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & si\ t \neq 0 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$, et calculer, pour tout $t > 0$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau de variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
   (a) Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
   (b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
   (c) Tracer l'allure de C.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

EXERCICE 12. Soient p, $q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que, pour tout a, $b > 0$, on a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$$