TD 16 : Convexité

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1. La fonction x^2 et $3x$ sont des polynômes donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, par composition de fonctions de classes C^∞, $x \mapsto e^{3x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par produit de fonctions de classe C^∞, $x \mapsto x^2e^{3x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par calcul direct, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x} = (3x^2 + 2x)e^{3x}$$

$$f''(x) = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$$

Pour obtenir une formule générale, on va utiliser la formule vue en cours, que vous pouvez démontrer par récurrence en reprenant la démonstration vue en cours :

$$\left(e^{3x}\right)^{(n)} = 3^n e^{3x}$$

Par la formule de Leibniz, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \left(e^{3x}\right)^{(n_k)} \\
&= \binom{n}{0} x^2 3^n e^{3x} + \binom{n}{1} \times 2x \times 3^{n-1}e^{3x} + \binom{n}{2} \times 2 \times 3^{n-2}e^{3x} \\
&= \left(3^n x^2 + 2n3^{n-1}x + n(n-1)3^{n-2}\right) e^{3x} \\
&= 3^{n-2}\left(9x^2 + 6nx + n(n-1)\right) e^{3x}
\end{aligned}$$

EXERCICE 2. x^2 est un polynôme donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Par opération sur des fonctions de classe C^∞, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Calculons la dérivée seconde de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = x^2e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x)e^x$$

$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

Regardons le signe de f'', l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc f'' est du signe de x^2+4x+2, calculons son discriminant.

$$\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$$

Les racines du polynôme sont donc

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Le polynôme est négatif entre x_- et x_+ et positif en dehors.

f'' est du signe du polynôme, donc f est concave sur $[x_-; x_+]$ et convexe en dehors.

EXERCICE 3.

1. f est définie pour tout x tel que $x > 0$ et $\ln(x) > 0$.

   Donc $D =]1; +\infty[$.

2. ln est de classe C^∞ donc C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $]1; +\infty[$ et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

   Par composition de fonction de classe C^2, f est de classe C^2 sur D.

3. Calculons la dérivée seconde de f.

   Pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

   $f''(x) = -\frac{\ln(x)+\frac{x}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$

   Un carré est toujours positif, donc $(x\ln(x))^2 \geqslant 0$.

   Pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$, donc $\ln(x) + 1 > 0$.

   Par règle des signes, f'' est strictement négative sur D, donc f est concave.

4. Cette question est plus délicate que les autres, il s'agit d'une inégalité de convexité.

   Puisque f est concave sur D, f est au dessus de ses cordes.

   Ainsi, pour tout x,$y > 1$,

$$\begin{aligned}\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) &\geqslant \frac{1}{2}\left(\ln(\ln(x)) + \ln(\ln(y))\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln(x)\ln(y))\\ &= \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)\end{aligned}$$

   Or le logarithme est croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent, ou simplement plus technique que les exercices d'application. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices.

EXERCICE 4. Commencez par montrer que f est de classe C^∞ sur $]0; 2[$ et sur $]2; +\infty[$, pour toute valeur de a et de b.

Calculez $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la limite à gauche et la limite à droite sont égales. Vous trouverez ainsi $a\sqrt{2} = 4 + b$.

Calculez $f'_d(2)$ et $f'_g(2)$ en utilisant limite en 2 de f' calculée à gauche et à droite en 2. f est dérivable en 2 et alors elle sera C^1 si et seulement si $f'_d(2) = f'_g(2)$. Vous trouverez ainsi $\frac{a}{2\sqrt{2}} = 4$.

En utilisant les deux égalités, vous aboutirez à $a = 8\sqrt{2}$ et $b = 12$.

Pour savoir si f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, calculez f'' sur $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$ et sa limite en 2. En l'occurrence elles sont différentes donc f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 5. Il s'agit d'une inégalité de convexité, utilisez le fait que exp est convexe.

EXERCICE 6.

1. Pour établir le tableau de variation de f, il faut regarder le signe de la dérivée.

   f est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Pour la limite en $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée, pour la résoudre, factorisez par le terme prédominant au numérateur et au dénominateur et passez à la limite.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Pour la limite en $-\infty$, il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, le calcul se fait directement.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

2. Pour ce faire, le plus simple est de calculer f'', vous devriez aboutir à

$$f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

En étudiant le signe de f'', vous devriez aboutir au résultat que f est convexe sur $\mathbb{R}_i^*$ et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Il y a un point d'inflexion en $x = 0$, l'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = \frac{1}{2}x$.

EXERCICE 7.

1. f est définie pour tout x tel que $1 - x^2 \geqslant 0$.

   Vous trouverez donc $D = [-1; 1]$.

2. f est de classe C^2 sur $]-1; 1[$.

3. Le plus efficace pour établir le tableau de variation de f est de calculer sa dérivée.

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

   f' est du signe de $1 - 2x^2$.

   f est décroissante sur $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

   Les limites en -1 et 1 se calculent directement car f est continue en ces points.

   $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0$

4. Le plus efficace est de calculer la dérivée seconde de f sur $]-1; 1[$.

$$f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

   Sur $]-1; 1[$, $2x^2 - 3 < 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $-x$.

   Donc f est convexe sur $]-1; 0[$ et concave sur $]0; 1[$.

5. f possède un unique point d'inflexion en $x = 0$.

EXERCICE 8. Montrez que la fonction $f(x) = x^{n+1}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Montrez que la tangente de f en 1 est $y = (n+1)x - n$.

L'inégalité recherchée est alors une inégalité de convexité.

EXERCICE 9.

1. Pour savoir si g est continue, il faut regarder la limite en 0 à gauche et à droite. Dans les deux cas, par calcul direct, g est continue en 0 et $g(0) = 0$.

   Pour savoir si g est dérivable en 0, il faut calculer $g'_d(0)$ et $g'_g(0)$. On trouve $g'_d(0) = 1$ et $g'_g(0) = 0$. Donc g n'est pas dérivable en 0.

2. Encore une fois, le plus efficace est de calculer la dérivée de g.

   On aboutit au résultat que g est constante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

   Pour calculer la limite en $-\infty$, g est constante donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

   Pour calculer la limite en $+\infty$, il faut utiliser une croissance comparée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. Le plus efficace est de calculer la dérivée seconde de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On aboutit alors à g convexe sur $[0;2]$ et concave sur $[2;+\infty[$.

EXERCICE 10.

1. Commencez par montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opération sur les fonctions continues.

   Montrez que sa limite à droite en 0 est 0 par croissance comparée pour montrer que f est continue en 0.

2. Vous pouvez montrer que f est C^2 par opération sur les fonctions C^2.

   On aboutit, pour $t > 0$, à

$$f'(t) = 2t - \ln(t) - 1$$

$$f''(t) = 2 - \frac{1}{t}$$

3. Il est difficile de regarder directement le signe de f'.

   Par contre, on peut regarder le signe de f'' et en déduire les variations de f' qui est décroissante que $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ et croissante $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

   f' admet donc un minimum en $\frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La limite de f en $+\infty$ est une forme indéterminée. En factorisant par le terme prédominant et en utilisant une croissance comparée, on aboutit à $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4.
   (a) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, donc f admet une tangente verticale en O.

   (b) f'' change de signe en $\frac{1}{2}$, il y a donc un point d'inflexion I de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; f''\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right)$.

   (c) Cette question n'a été que très peu abordée en cours, je vous laisse y réfléchir.

   N'hésitez pas à utiliser Scilab pour comparer votre schéma avec la vraie courbe de la fonction.

5. Le plus efficace ici est d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus difficiles et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 11. Montrez que $f(x) = \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrez par inégalité de convexité que $f\left(\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)$.

Vous pouvez alors conclure.

EXERCICE 12. Montrez, en utilisant la convexité d'une fonction, que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p}e^{\alpha} + \frac{1}{q}e^{\beta} \geqslant e^{\frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta}$.

En choisissant des valeurs judicieuses de α et β, trouvez l'inégalité recherchée.