Correction du TD 5 : Probabilités finies

I Appliquer le cours

La correction de ces exercices est rédigée exactement pour vous aider à voir la rédaction que l'on attend de vous pour ces exercices.

EXERCICE 1.

$A =$'toutes les boules tirées sont rouges'
$=$'la première boule tirée est rouge et ... et la n^e boule tirée est rouge'
$= \bigcap_{i=1}^{n} R_i$.

Donc $A = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$.

$B =$'toutes les boules tirées sont noires'
$=$'la première boule tirée n'est pas rouge et ... et la n^e boule tirée n'est pas rouge'
$= \bigcap_{i=1}^{n} \bar{R}_i$.

Donc $B = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{R}_i$.

$C =$'la dernière boule tirée est noire'
$=$'la n^e boule tirée n'est pas rouge'
$= \bar{R}_n$.

Donc $C = \bar{R}_n$.

$D =$'Les deux premières boules tirées ne sont pas de la même couleur'
$=$'la première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée n'est pas rouge ou la première boule tirée n'est pas rouge et la deuxième boule tirée est rouge'
$= (R_1 \cap \bar{R}_2) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2)$.

Donc $D = (R_1 \cap \bar{R}_2) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2)$.

$E =$'On a tiré une alternance de boules rouges et noires'
$=$'la première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée n'est pas rouge et la troisième boule tirée est rouge et ... ou la première boule tirée n'est pas rouge et la deuxième boule tirée est rouge et la troisième boule tirée n'est pas rouge et ... '
$= (R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3 \cap \dots) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3 \cap \dots)$.

Donc $E = (R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3 \cap \dots) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3 \cap \dots)$.

$F =$'On a obtenu une boule noire pour la première fois au n^e tirage'
$=$'la première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée est rouge et ... et la $(n-1)^e$ boule tirée est rouge et la n^e boule tirée n'est pas rouge'
$= \left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \right) \cap \bar{R}_n$.

Donc $F = \left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \right) \cap \bar{R}_n$.

$G =$'On a tiré exactement une boule rouge'
$=$'la première boule tirée est rouge et les autres boules tirées ne sont pas rouge ou la deuxième boule tirée est rouge et les autres boules tirées ne sont pas rouge ou ... ou la n^e boule tirée est rouge et les autres boules tirées ne sont pas rouge'
$= \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} \bar{R}_j \cap R_i \right)$.

Donc $G = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} \bar{R}_j \cap R_i \right)$.

$H =$'Le tirage d'une boule noire n'est jamais suivi du tirage d'une boule rouge'
$=$'dès qu'une boule noire est tirée, on ne tire plus que des boules noires'
$=$'la première boule tirée n'est pas rouge et toutes les suivantes ne sont pas rouges ou la première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée n'est pas rouge et toutes les boules qui suivent ne sont pas rouges ou ... ou toutes les boules tirées sont rouges'
$= \bigcup_{i=0}^{n} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{i} R_j \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{n} \bar{R}_k \right) \right).$

Donc $H = \bigcup_{i=0}^{n} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{i} R_j \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{n} \bar{R}_k \right) \right).$

EXERCICE 2.

$\bar{A}$: 'toutes les boules tirées sont noires'

$\bar{B}$: 'toutes les boules tirées sont rouges'

$\bar{C}$: 'la dernière boule tirée est rouge'

$\bar{D}$: 'les deux premières boules tirées sont de la même couleur'

$\bar{G}$: 'on a tiré aucune boule rouge ou au moins deux boules rouges'

$\bar{H}$: 'on a tiré au moins une boule rouge après avoir tiré une boule noire'

EXERCICE 3.

1. $\Omega = \{1; 2; \dots; 10\}$
2. $A = \{4; 8\}$ donc $\mathbb{P}(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$.

   $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ donc $\mathbb{P}(B) = \frac{card\ B}{card\ \Omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.

   $C = \{1; 10\}$ donc $\mathbb{P}(C) = \frac{card\ C}{card\ \Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}$.
3. (a) Seul 4 est un multiple de 4 inférieur ou égal à 5, donc $A \cap B = \{4\}$.

   1 et 10 ne sont pas des multiples de 4 donc $A \cap C = \emptyset$.

   La négation d''inférieur ou égal' est 'strictement supérieur', donc $\bar{B} = \{6; 7; 8; 9; 10\}$.

   (b) $A \cap B = \{4\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

   $A \cap C = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$.

   $\bar{B} = \{6; 7; 8; 9; 10\}$ donc $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
4. (a) $A \cup B =$'on obtient un nombre inférieur ou égal à 5 ou 8'

   $B \cup C =$'on obtient un nombre inférieur ou égal à 5 ou 10'

   $\bar{C} =$'on obtient un nombre différent de 1 et de 10'

   (b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

   $\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{3}{5}$.

   (c) A et C sont incompatibles car $A \cap C = \emptyset$. Donc $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(A \cup C) = \frac{2}{5}$.

   (d) $\bar{C} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ donc $\mathbb{P}(\bar{C}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.
   On trouve donc $\mathbb{P}(\bar{C}) = \frac{4}{5}$.

II Des exercices à bien maîtriser

Vous trouverez pour ces exercices le détail de la procédure à suivre pour résoudre ces exercices ainsi que le résultat final. Il ne s'agit cependant pas d'une correction précise ; en cas de problème, n'hésitez pas à venir me voir pour en discuter.

EXERCICE 4. On note R_i ='on pioche une boule rouge au i^e tour', B_i ='on pioche une boule blanche au i^e tour' et N_i ='on pioche une boule noire au i^e tour'.

1. (a) Écrire l'événement A comme une intersection d'événements R_i.

   Les tirages étant effectués avec remise, les événements R_i sont mutuellement indépendant.

   En déduire que $\mathbb{P}(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^4$

   (b) Les tirages étant effectués sans remise, les événements R_i ne sont pas mutuellement indépendants.

   Il faut donc utiliser la formule des probabilités composées (proposition 11).

2. (a) Écrire B comme une intersection d'événements R_i et $\bar{R}_j$. Il faut faire attention qu'obtenir exactement deux boules rouges signifie que les deux autres boules tirées ne sont pas rouges ET que rien n'oblige à ce que les deux boules rouges soient tirées en premier.

   Vous devez trouver à la fin B comme une union de 6 événements incompatibles.

   Les événements étant mutuellement indépendants, on trouve au final $\mathbb{P}(B) = 6\left(\frac{6}{25}\right)^2$.

   (b) En utilisant la formule des probabilités composées (proposition 11), on trouve $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{14}$.

3. (a) Écrire C comme une intersection d'événements dépendant de N_i.

   Vous devriez aboutir à $\mathbb{P}(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^4$.

   (b) En utilisant la formule des probabilités composées (proposition 11), vous devriez aboutir à $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$.

4. (a) Écrire D comme une union de B_i.

   Nous n'avons pas vu en cours la formule de Poincaré pour plus de 3 ensemble. La raison est qu'elle est peu pratique à utiliser.

   Cependant, vous pouvez utiliser la négation pour rendre le calcul plus facile. En effet, 'obtenir au moins une boule blanche' signifie 'ne pas obtenir une boule rouge ou noir à chaque tirage'.

   Exprimer l'événement 'obtenir une boule rouge ou noire à chaque tirage' comme une intersection d'événements.

   Prendre la négation de cet événement pour trouver D.

   Au bout du calcul, vous devriez trouver $\mathbb{P}(D) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4$.

   (b) En utilisant la même procédure, mais en utilisant la formule des probabilités composées (proposition 11), vous devriez aboutir à $\mathbb{P}(D) = \frac{13}{14}$.

5. (a) Cet événement est particulièrement difficile à décrire en termes d'éléments R_i, N_i et B_i mais constitue une excellente première approche du dénombrement que nous verrons dans quelques chapitres.

   Comme dans le cas de l'événement B, il vous faudra identifier les différentes configurations menant à la réalisation de E. Il y en a trois sortes de ces configurations :

   * On obtient deux boules blanches et deux rouges, en comptant l'ordre, il y a 6 configurations possibles.
   * On obtient une boule blanche, une boule rouge et deux boules noires, il y a 12 configurations possibles.
   * On obtient 4 boules noires, il y a une configuration possible.

   Il vous faudra alors calculer les probabilités de chacunes de ces configurations, remarquer quelles sont toutes incompatibles et seulement alors vous devriez aboutir au résultat $\mathbb{P}(E) = \frac{29}{125}$.

   (b) Par la même procédure, vous devriez aboutir à la réponse $\mathbb{P}(E) = \frac{78}{315}$.

EXERCICE 5. Les tirages étant effectués avec remise, les événements R_i sont mutuellement indépendants.

En utilisant la définition de la mutuelle indépendance (définition 9), vous devriez trouver $\mathbb{P}(A) = \left(\frac{3}{8}\right)^n$.

De même, $\mathbb{P}(B) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

$\mathbb{P}(C) = \frac{5}{8}$

Utilisez le fait que D est union d'événements incompatibles et le fait que R_1 et R_2 sont indépendants pour montrer que $\mathbb{P}(D) = \frac{15}{32}$.

En utilisant le fait que E est union d'événements incompatibles et le fait que les événements R_i sont mutuellement indépendants vous devriez trouver que

$$\mathbb{P}(E) = \begin{cases} \frac{2\times 15^{\frac{n}{2}}}{8^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2\times 15^{\frac{n-1}{2}}}{8^{n-1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par mutuelle indépendance, vous devriez trouver $\mathbb{P}(F) = \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} \times \frac{5}{8}$.

Les événements constituant G étant incompatibles et en utilisant la mutuelle indépendance, on aboutit à $\mathbb{P}(G) = n\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \times \frac{3}{8}$.

De même, on aboutit à $\mathbb{P}(H) = \left(\frac{5}{8}\right)^n \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}\right) \times \frac{5}{2}$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont destinés à ceux ayant déjà acquis une maîtrise certaines du cours, le but est donc que vous passiez du temps à réfléchir à la réponse. Je vais vous indiquer à la suite quelques indices pour vous aider à arriver à la solution et le résultat final, et pour le reste, c'est à vous de jouer !

EXERCICE 6.

1. Attention, il faut ici bien lire l'énoncé, on ne vous dit pas avant l'obtention de Pile, on a obtenu k Face. La plus grosse difficulté de l'exercice consiste à exprimer l'événements R_k avec des événements plus élémentaires.

   $\mathbb{P}(R_0) = \frac{4}{9}$; $\mathbb{P}(R_1) = \frac{8}{27}$; $\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{27}$.
2. Il faut ici trouver une expression générale de R_k. Pour ce faire, il vaut mieux définir l'événement P_i ='on a obtenu pile au i^e lancer et exprimer R_k en fonction de ces événements P_i.

EXERCICE 7. Encore une fois, la plus grosse difficulté de cet exercice est de réussir à exprimer l'événement A_n en fonction d'événements plus simple dont on connait les probabilités.

1. $\mathbb{P}(A_3) = p(1-p)$
2. $\mathbb{P}(A_4) = (1-p+p^2)p(1-p)$
3. $\mathbb{P}(A_5) = (1-2p+2p^2)p(1-p)$
4. Dans ce genre de cas, la première chose à faire est d'essayer de trouver à partir des cas n petits de trouver une formule pour les $\mathbb{P}(A_n)$ et de la démontrer ensuite par récurrence. Cette question a fait l'objet d'un sujet d'examen à lui seul, si vous réussissez à en trouver la solution simplement à partir des petites valeurs de n, vous avez le droit à mon plus profond respect.

EXERCICE 8. Commencez par poser comme vous devez commencer à en avoir l'habitude par poser V_i ='on obtient une boule verte au i^e tirage', R_i ='on obtient une boule rouge au i^e tirage' et N_i ='on obtient une boule noire au i^e tirage'. Il faudra alors exprimer les événements A et $B_{i,j}$ en fonction de ces événements. Là encore, pour $B_{i,j}$, la principale difficulté est de réussir à exprimer l'événement en fonction de ces événements dont on connait la probabilité.

Un autre élément dont vous aurez besoin, mais ça doit devenir maintenant un réflexe, est que, le tirage étant avec remise, les événements attachés à des tirages différents sont mutuellements indépendants.

Pour vous aider dans la résolution, je n'ai pas simplifié les fractions, bien sûr, dans votre réponse, vous devez terminer avec des fractions réduites au maximum.

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{2\times 3^4 \times 5^2}{8^7}$
2. $\mathbb{P}(B_{i,j}) = \left(\frac{3}{8}\right)^{j-1} \frac{3}{8} \left(\frac{6}{8}\right)^{i-j-1} \frac{2}{8}$