

Complément du chapitre 5 : Formule de Bayes

I Complément de cours

Proposition 1 (Formule de Bayes).

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

remarque.

EXERCICE 1.

Un patient vient de passer un test de dépistage pour une affection qui touche une personne sur 1000 en France. Si le patient est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si le patient est sain, le test sera négatif dans 97% des cas.

Le test du patient est malheureusement positif. Quelle est la probabilité que le patient soit malade.

On note A l'événement : "le patient est malade", on note B l'événement : "le test est positif".

II Complément de TD

EXERCICE 2. Deux joueurs (J_1 et J_2) jouent à la bataille navale, chacun a un carton quadrillé dont les cases sont notées de A à J et de 1 à 10 et sur lequel sont schématisés en noir cinq bateaux de tailles différentes qui ne peuvent pas se toucher. À tour de rôle, les joueurs annoncent une case (par exemple $H6$). Le joueur adverse répond "touché" si la case désignée est noire et "à l'eau" sinon.

Voici le carton du joueur B :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									■	■
2										■
3				■	■					■
4										■
5		■				■				
6		■								
7		■				■		■	■	■
8										
9										
10										

1. Le joueur J_1 commence. Déterminer la probabilité de l'événement T : "c'est touché", puis la probabilité de l'événement E : "c'est à l'eau".
2. C'est maintenant le premier tour du joueur J_2 . Quelle est la probabilité de l'événement V : "il ne touche pas le porte avion du joueur A " ?
3. Au bout de 20 tour, le joueur J_1 a détruit le porte avion de son adversaire et a "raté" les autres coups. Quelle est la probabilité de l'événement G : "il touche un bateau du joueur B au tour suivant" ?

EXERCICE 3. On prend un jeu de 52 cartes (les cartes vont de 1 à 10 puis valet, dame, roi et ont quatre couleurs trèfle, pique, cœur et carreau).

Au blackjack, les cartes de 2 à 9 valent leur valeur nominale, les cartes 10, valet, dame et roi valent 10 points et l'as vaut 1 ou 11. Le but du jeu est de se rapprocher le plus possible de 21 points sachant que dès qu'un joueur a 22 points ou plus, il a perdu.

On note K l'événement "on pioche une carte carreau", C pour cœur, P pour pique, T pour trèfle et A_i l'événement "on pioche une carte de numéro i ", en associant au valet le numéro 11, la dame 12 et le roi 13.

- Écrire les événements suivants en fonction de K , C , P , T et des A_i :
 - "On pioche un 4 de carreau"
 - "On pioche un 10 de cœur ou un 7 de pique"
 - "On pioche une carte de valeur inférieure à 8 (as non compris)"
 - "On pioche une figure"
 - "On pioche une carte de valeur 10"
- Deux personnes jouent au blackjack, un croupier et un joueur. Le croupier sert une carte face visible au joueur et à lui même, puis une carte face cachée et il continue de servir le joueur tant que celui ci le souhaite. Si le joueur obtient un as en carte face visible, quelle est la probabilité qu'il atteigne 21 avec les deux cartes avec lesquelles il a commencé ?
- Si le joueur obtient un valet en carte face visible, quelle est la probabilité qu'il atteigne 21 avec les deux cartes avec lesquelles il a commencé ?
- Si le joueur obtient un as en carte face visible, quelle est la probabilité qu'il atteigne 21 avec trois cartes en tout ? (Cette question est complexe)
- Si le joueur a obtenu un valet, un trois et un cinq, que le croupier a un quatre en carte face visible, quelle est la probabilité que le joueur perde s'il redemande une carte ?
- Si lors de la partie précédente, une dame, deux rois, un six et un trois ont été joués. Que le croupier a un valet en carte face visible et que le joueur a un sept et un neuf, quelle est la probabilité qu'il perde s'il redemande une carte ?

EXERCICE 4. Une roulette est composée de 37 cases numérotées de 0 à 36. La moitié des cases sont rouges et une autre moitié noires, pour simplifier, non considérerons que les cases paires sont rouges et impaires noires, de plus, le zéro est une case particulière qui est verte.

Une bille est lancée sur la roulette et finit par s'arrêter sur une case numérotée. Le joueur peut choisir de parier sur le numéro ou sur la couleur de la case sur laquelle la bille va s'arrêter.

- Quelle est la probabilité que la bille s'arrête sur 0 ? Sur une case rouge ?
- Une personne décide de jouer n fois à la roulette et mise à chaque fois rouge. On note G_i l'événement : "Elle gagne au lancer i ." Écrire les événements suivants :
 - "Elle gagne le 3e lancer et perd de le 10e", en supposant que $n > 10$.
 - "Elle gagne de dernier lancer."
 - "Elle gagne tous les lancers."
 - "Elle perd tous les lancers."
 - "Elle gagne le lancer i ."
 - "Elle gagne au moins un lancer."
 - "Elle gagne exactement un lancer."
- Supposons cette fois $n = 3$, la personne joue trois fois de suite à la roulette en misant à chaque fois rouge. Quelles sont les 8 configurations en terme de victoire ou de défaite ? Quelles sont les probabilités de chacune de ces configurations ? À chaque tour, la joueuse mise un jeton, si elle gagne, elle récupère son jeton et en gagne un de plus, si elle perd, elle perd son jeton. Si elle veut gagner de l'argent, cette personne a-t-elle intérêt à jouer ou pas ?