TD 6 : Convergence d'une suite réelle

I Appliquer le cours

EXERCICE 1 (Limites classiques, opérations sur les limites et croissance comparée).

Déterminez la nature et les limites éventuelles des suites suivantes définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} - n^3$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{n^3+n+1}{2n^2+1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 3^n - (-2)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{n^2+n}{3^n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{(\ln n)^4}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = (-3)^n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = \frac{n!}{n^n}$

EXERCICE 2 (Monotonie et théorème de la limite monotone).

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
2. Que peut on en déduire sur l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

EXERCICE 3 (Suites adjacentes et théorème d'encadrement).

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{n-1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que pouvez vous en déduire sur la nature des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et leurs éventuelles limites ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1 < v_n$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite 1.

EXERCICE 4 (Monotonie et Scilab).

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2^n}{n}$ $b_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n(b_n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1}$

1. Étudier la monotonie de chacune de ces suites.
2. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer une valeur pour n et affiche alors a_n.
3. Même question pour b_n et c_n.

II Des exercices classiques

EXERCICE 5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

1. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer une valeur pour n et affiche alors u_n.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

EXERCICE 6 (Moyenne de Césaro)**.**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \frac{u_n+v_n}{2}$.
4. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ.

EXERCICE 7. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \tfrac{u_n}{2} + \tfrac{(u_n)^2}{4}$$

1. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer une valeur pour n et affiche alors u_n.
2. Montrer que pour tout entier naturels, $0 < u_n \leqslant 1$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et donner un encadrement de sa limite.

EXERCICE 8. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1\,;\ u_1 = -10 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

EXERCICE 9. On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$u_0 = 2,\ v_0 = 12 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \tfrac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \tfrac{u_n+2v_n}{3}.$$

1. Posons la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et préciser sa raison et son terme général.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et de $(v_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers un même réel.

EXERCICE 10 (Approximation décimale d'un réel)**.**
Soit x un réel. On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ déterminées pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \tfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \text{ et } v_n = \tfrac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et convergent vers x.

EXERCICE 11 (Somme harmonique)**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Vérifier que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer par récurrence que $H_{2^k} \geqslant \frac{k}{2}$.
3. Montrer alors que $(H_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée.
4. Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

III Pour aller plus loin

EXERCICE 12. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles.

1. On suppose que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n+v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers respectivement ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner la limite.
2. On suppose que les suites $(u_n+v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n-v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et donner leur limites.

EXERCICE 13. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites telles que

$$0\leqslant u_n\leqslant 1\,;\,0\leqslant v_n\leqslant 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_nv_n=1$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et donner leur limite.

EXERCICE 14. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels non nuls vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}\tfrac{u_{n+1}}{u_n}=0$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

EXERCICE 15 (Critère spécial des séries alternées)**.**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs et de limite nulle. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}u_k$$

Posons, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\alpha_p=S_{2p}$ et $\beta_p=S_{2p+1}$.

1. Montrer que les suites $(\alpha_p)_{p\geqslant 0}$ et $(\beta_p)_{p\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

EXERCICE 16 (Moyenne arithmético-géométrique)**.**

1. pour tous a et b réels, montrer que $2\sqrt{ab}\leqslant a+b$
2. On considère les suites de réels positifs $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par
$$u_0=a,\ v_0=b \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n},\ v_{n+1}=\tfrac{u_n+v_n}{2}.$$
Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant v_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ont même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.
5. Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a\in\mathbb{R}_+$.
6. Exprimer $M(\lambda a,\lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}_+$.