Correction du TD 6 : Convergence d'une suite réelle

I Appliquer le cours

La correction de ces exercices est rédigée entièrement pour vous aider à voir la rédaction que l'on attend de vous pour ces exercices.

EXERCICE 1.

1. On cherche la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n} - n^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

   Par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, (notez qu'avant de faire le calcul, je pose un n dans $\mathbb{N}$ pour pouvoir l'utiliser comme je veux par la suite et ne pas avoir à écrire des $\forall$ à chaque ligne)

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{n^3+n+1}{2n^2+1} \\
&= \frac{n^3\left(\frac{n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{n^3}{n^2}\frac{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{n^3}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} \\
&= n\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

   Or, pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n^2}\right) = 2$

   Par opération sur les limites, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
w_n &= 3^n - (-2)^n \\
&= 3^n\left(\frac{3^n}{3^n} - \frac{(-2)^n}{3^n}\right) \\
&= 3^n\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) \\
&= 3^n\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

   Or, pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1$.

   De plus pour $1 < q$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

   Par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

4. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, par opération sur les limites, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{n^2+n}{3^n+1} \\
&= \frac{n^2\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)}{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right)} \\
&= \frac{n^2}{3^n}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}} \\
&= \frac{n^2}{3^n}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3^n}}
\end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et, pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ et, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{3^n} = 1$.

   Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3^n}} = 1$.

   De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$.

   Par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n} \\
&= \frac{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}-\frac{(-2)^n}{3^n}\right)}{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}+\frac{(-2)^n}{3^n}\right)} \\
&= \frac{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}-\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)} \\
&= \frac{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)} \\
&= \frac{3^n}{3^n}\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n} \\
&= \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}
\end{aligned}$$

   Or, pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

   Par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$.
   Par opération sur les limites, on conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

7. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme $\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
y_n &= \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \\
&= (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}) \times \frac{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}) \times (\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2+n+1})^2 - (\sqrt{n^2-n+1})^2}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2(\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2})}} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}} \\
&= \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}
\end{aligned}
$$

Or, pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{2}{1+1} = 1$.

9. Pour $q < -1$, la suite $(q^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de limite, donc la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} \times \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{(n+\sqrt{n^2+1})^2} \\
&= \frac{n^2-(\sqrt{n^2+1})^2}{(n+\sqrt{n^2+1})^2} \\
&= \frac{n^2-(n^2+1)}{(n+\sqrt{n^2+1})^2} \\
&= \frac{n^2-n^2-1}{(n+\sqrt{n^2+1})^2} \\
&= \frac{-1}{(n+\sqrt{n^2+1})^2}
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt{n^2+1} = +\infty$, donc $(\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt{n^2+1})^2 = +\infty$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1}{3^{-k}} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1}{\frac{1}{3^k}} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \times 3^k \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} (2 \times 3)^k \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} 6^k \\
&= \frac{1}{3^n} \; \frac{6^{n+1}-1}{6-1} \\
&= \frac{1}{3^n} \; \frac{6^{n+1}-1}{5} \\
&= \left(\frac{6 \times 2^n}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n}\right)
\end{aligned}$$

Or, pour $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et, pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6 \times 2^n}{5} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{1 \times \cdots \times n}{n \times \cdots \times n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \leqslant n$, $\frac{k}{n} \leqslant 1$. En appliquant cette inégalité à $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\dots$, $\frac{n}{n}$, on trouve $\gamma_n \leqslant \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, $\gamma_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = 0$.

EXERCICE 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{, pour } j = k+1 \\
&= \frac{1}{n+n+2} + \frac{1}{n+n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n+2 > 2n+1$, donc $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n+1}$, d'où $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où $u_{n+1} > u_n$.

Finalement la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

2. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante, par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ admet une limite finie (si elle est majorée) ou infinie (si elle n'est pas majorée).

EXERCICE 3.

1. Pour montrer que les suites sont adjacentes, il faut montrer que l'une est croissante, que l'autre est décroissante et que leur différence tend vers 0.

Commençons par regarder la monotonie des deux suites.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\
&= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\
&= \frac{n \times n}{n(n+1)} - \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2}{n(n+1)} - \frac{n^2-1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$ et donc $\frac{1}{n(n+1)} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n+1 > n$, d'où $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

Finalement , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n < 0$, d'où $v_{n+1} < v_n$.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.

Il reste à regarder la limite de la suite $(|u_n - v_n|)_{n\geqslant 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &= \left|\frac{n-1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right| \\ &= \left|\frac{n}{n} - \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n^2}\right| \\ &= \left|1 - \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n^2}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$.

Finalement, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent et ont même limite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

   $u_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2} > 1$.

   On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1 < v_n$.

3. La réponse à cette question est une astuce classique.

   Notons ℓ la limite commune des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

   En passant à la limite dans la relation précédente, on trouve $\ell \leqslant 1 \leqslant \ell$. D'où $\ell = 1$.

   Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite 1.

EXERCICE 4. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n2^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{(n+1)2^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{2^n(2n-(n+1))}{n(n+1)} \\ &= \frac{2^n(2n-n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 \geqslant 0$, $n > 0$, $n+1 > 0$ et $2^n > 0$, d'où $\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} \geqslant 0$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ d'où $a_{n+1} \geqslant a_n$.

Finalement, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= b_n(b_n+1) - b_n \\ &= b_n^2 + b_n - b_n) \\ &= b_n^2 \end{aligned}$$

Pour tout $n > 0$, $b_n^2 \geqslant 0$, donc $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$ et $b_{n+1} \geqslant b_n$.

La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2+1} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^2+1} > 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} - c_n \geqslant 0$.

La suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2.
```
n=input("Entrer un entier n")
A=2^n/n
disp(A)
```

3.
```
n=input("Entrer un entier n")
B=0
for k = 1 :n
    B=B*(B+1)
end
disp(B)
```

```
n=input("Entrer un entier n")
C=sum(1./([1 :n].^2+1))
disp(C)
```

II Des exercices classiques

Vous trouverez pour ces exercices le détail de la procédure à suivre pour résoudre ces exercices ainsi que le résultat final. Il ne s'agit cependant pas d'une correction précise ; en cas de problème, n'hésitez pas à venir me voir pour en discuter.

EXERCICE 5.

1. Je vous laisse vous inspirer de l'exercice précédent et du TP2 pour répondre à cette question. Prenez garde au fait qu'il s'agit là de définir une suite par récurrence et non pas directement, il faut donc utiliser une boucle for.

2. Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour montrer que cette différence est positive, en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

3. La démonstration se fait par récurrence, faites bien attention à respecter la rédaction que l'on vous a donné dans l'indispensable 4.

   Commencez par vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$: $u_0 \geqslant 0$.

   Il faut ensuite montrer l'hérédité, supposez que la propriété est vraie pour un n : $u_n \geqslant n^2$ (hypothèse de récurrence). On veut alors montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$: $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

   Commencez par écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour utilisez l'hypothèse de récurrence pour minorer u_{n+1} par $n^2 + 2n + 3$. Vous utiliserez l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour montrer $n^2 + 2n + 3 > (n+1)^2$.

   Conclure.

4. Donnez la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2$. Utilisez l'inégalité de la question précédente pour utiliser un théorème d'encadrement. Vous montrerez ainsi que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 6. Cet exercice est plus complexe que le précédent.

1. Calculer la différence $v_{n+1} - v_n$, aboutir à

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)}$$

   Montrer que cette différence est positive en utilisant le fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ en utilisant la croissance de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   Grâce à cette inégalité, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$.

   En utilisant cette inégalité et la croissance de v_n, utilisez le théorème de limite monotone pour conclure que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge (on ne vous demande pas de trouver la limite pour l'instant).

3. Écrivez v_{2n}, séparez la fraction en deux fractions, l'une avec les termes u_k pour $k \leqslant n$ et l'autre pour les termes u_k pour $k > n$.

   Le premier est égal à $\frac{v_n}{2}$. Pour le deuxième, utilisez la croissance de u_n pour montrer qu'il est plus petit que $\frac{nu_n}{2n}$.

   En simplifiant le second terme, vous trouverez la solution.

4. Posez ℓ' la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ qui existe d'après la question 2.
   Déduire de la relation de la question 3 que $\ell' \geqslant \ell$.
   Déduire de la relation $v_n \leqslant \ell$ que $\ell' \leqslant \ell$.
   Conclure.

EXERCICE 7.

1. Il faut là encore utiliser une boucle for pour répondre à cette question. Si vous ne savez pas comment répondre à cette question, reprenez le TP2.

2. La démonstration se fait par récurrence, faites bien attention à respecter la rédaction que l'on vous a donné dans l'indispensable 4.

   Commencez par l'initialisation, montrer la propriété pour $n = 0$: $0 < u_0 \leqslant 1$.

   Passez ensuite à l'hérédité, supposez que la propriété est vraie pour un n fixé : $0 < u_n \leqslant 1$ (hypothèse de récurrence). Montrez la propriété pour le rang suivant $n+1$: $0 < u_{n+1} \leqslant 1$.

   Encadrez les termes $\frac{u_n}{2}$ et $\frac{u_n^2}{4}$ grâce à l'hypothèse de récurrence.

   En sommant les encadrements et en utilisant la formule de u_{n+1}, vous trouverez $0 < u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}$ et donc $0 < u_{n+1} \leqslant 1$.

   Conclure

3. Calculez $u_{n+1} - u_n$, montrez que cette différence est égale à $\frac{u_n}{2}\left(\frac{u_n}{2} - 1\right)$.

   Grâce à l'inégalité de la question 2, montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante, en utilisant l'inégalité de la question 2, utilisez le théorème de limite monotone pour conclure (attention on demande ici seulement de montrer que la suite converge et pas sa limite).

   Passez ensuite à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 2 pour répondre à la question. Attention, en passant à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

EXERCICE 8. 1. Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2, si vous ne vous rappelez plus de la façon de procéder, n'hésitez pas à reprendre le chapitre sur les suites réelles.

   Commencez par considérer l'équation caractéristique et montrez que ses solutions sont $\frac{1}{2}$ et 3.

   Cherchez ensuite les constantes λ et μ telles que $u_n = \lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = -10$.

   Vous aboutirez à $\lambda = 4$ et $\mu = -4$.

2. Utiliser les limites classiques et les opérations sur les limites vues en cours pour montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $-\infty$.

EXERCICE 9. 1. Exprimer w_{n+1} en fonction des autres suites essayez de retrouver le terme w_n au cours du calcul.

   En déduire alors que la suite est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de terme général 10.

2. Commencez par montrer que $u_n < v_n$. Vous pouvez le faire de deux façons, soit par récurrence, soit directement en utilisant l'expression de w_n.

   Calculez ensuite $u_{n+1} - u_n$ et montrer grâce à l'inégalité précédente que $u_{n+1} - u_n > 0$ et qu'alors $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante.

   Montrez de même que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

3. Il faut montrer que les deux suites sont adjacentes. Il faut montrer qu'une suite est croissante, l'autre décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

   Il reste à montrer que la différence tend vers 0, hors cette différence est w_n. Utilisez les limites classiques pour montrer que la suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0.

   Conclure.

EXERCICE 10. La plus grosse difficulté de cet exercice est de manipuler la partie entière, ce qui peut être un peu délicat lorsqu'on en a peu l'habitude, mais c'est un excellent exercice pour vous former à la manipulation de cette fonction !

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, posez n et calculer $u_{n+1}-u_n$. Pour ce faire, posez, $x = a\times 10^{-n} + b\times 10^{-(n+1)} + c\times 10^{-(n+1)}$, avec $a,b\in\mathbb{N}$, $b<10$ et $c<1$ et réécrivez la valeur de u_{n+1} et u_n en fonction de a et b.

Vous devriez aboutir à $u_{n+1}-u_n = \frac{b}{10^{n+1}}$. Vous pouvez alors montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Montrez de même que $v_{n+1}-v_n = \frac{b-9}{10^{n+1}}$ et en déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Il reste à montrer un troisième point pour montrer que ces suites sont adjacentes, je vous laisse trouver lequel.

Réunissez ce que vous avez démontré pour l'instant pour montrer que les suites sont adjacentes. Utilisez le théorème sur les suites adjacentes pour montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite que vous appellerez ℓ.

Montrer l'inégalité $u_n \leqslant x \leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En passant à la limite dans cette inégalité, montrez que $\ell = x$.

EXERCICE 11.

1. Montrez $H_{2n} - H_n \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$ en utilisant $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ pour $k \leqslant 2n$.

   Calculez cette somme en faisant attention au fait que ses termes ne dépendent pas de k, vous aboutirez à l'inégalité voulue.

2. La question précédente vous donne la relation $H_{2n} \geqslant H_n + \frac{1}{2}$.

   Commencez par montrer la propriété à l'étape $n=0$ en montrant que $H_1 = 1$.

   Il faut ensuite montrer l'hérédité, supposez la propriété vraie pour un n, montrez qu'elle est vraie pour l'étape suivante $n+1$: $H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{2}$. Utilisez pour ça la relation donnée au début de cette question et le fait que $2^{n+1} = 2\times 2^n$.

3. Pour répondre à cette question, faîtes une démonstration par l'absurde. Supposez que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par un réel A.

   Trouvez un k tel que $H_{2^k} > A$.

   Conclure

4. Montrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Utilisez alors un théorème de limite monotone pour montrer que H_n tend vers $+\infty$.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont destinés à ceux ayant déjà acquis une maîtrise certaine du cours, le but est donc que vous passiez du temps à réfléchir à la réponse. Je vais vous indiquer à la suite quelques indices pour vous aider à arriver à la solution et le résultat final, et pour le reste, c'est à vous de jouer !

EXERCICE 12. La principale difficulté de cette exercice est qu'il ne se base pas sur un exemple mais sur un calcul théorique.

EXERCICE 13. Pour résoudre cet exercice, il faut utiliser un théorème d'encadrement pour montrer que les suites tendent vers 1.

EXERCICE 14. Commencez par majorer le quotient $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

En déduire une majoration de $|u_n|$ par une suite qui converge vers 0.

EXERCICE 15.

1. $(\alpha_p)_{p\geqslant 0}$ est croissante et $(\beta_p)_{p\geqslant 0}$ est décroissante.

2. Cette question est assez complexe étant donné que la définition exacte de la convergence n'est pas au programme. Je vous conseille plutôt de reprendre le schéma que l'on a vu ensemble et de visualiser pourquoi si les deux suites convergent alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

EXERCICE 16.

1. Cette question est assez classique, il est important de connaître la résolution.

4. Pour ce genre de question, il faut généralement montrer que les suites sont adjacentes, cependant, dans ce cas, c'est assez délicat. Préférez démontrer d'abord la monotonie de chaque suite, puis la convergence, puis que les deux limites sont égales.

5-6. Ici, vous pouvez exprimer directement les suites. Il s'agit de manipuler des limites de suites ce qui est souvent plus délicat que de manipuler les suites.