TD 7 : Systèmes linéaires et composition de fonctions

I Appliquer le cours

EXERCICE 1 (Composition de fonctions).

1. Écrire la composition $f \circ g$ des fonctions f et g suivantes :

   $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto 2x^2+3$ $\quad$ $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto 2x^2-4x+3$ $\quad$ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto 5x^2+1$

   $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x+1$ $\quad$ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

2. Écrire les fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions :

   $x \mapsto e^{x^2}$ $\quad$ $x \mapsto 2\ln(x)+1$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{e^x}$

EXERCICE 2 (Bijection). Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x-2 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x-2} \end{pmatrix}$

Montrez que f et g sont des bijections et donner leur inverse.

EXERCICE 3 (Définitions). Considérons un système (S) de n équations à p inconnues.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, si elles sont vraies prouvez le, sinon donner un contre exemple :

1. Si le système (S) est homogène, il admet au moins une solution.
2. Si $p < n$, alors le système (S) n'admet aucune solution.
3. Si $p > n$, alors le système (S) admet au moins une solution.
4. Si on prend deux solutions du système (S), alors leur somme est solution du système (S).
5. Si le système est triangulaire, il admet au moins une solution.

EXERCICE 4 (Pivot de Gauss/Inversion de matrices). Résoudre le système suivant de deux façons différentes (par méthode du pivot de Gauss et en inversant la matrice) :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

EXERCICE 5 (Pivot de Gauss). Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 6 (Pivot de Gauss/Résolution directe). Quand c'est possible, inversez les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II Des exercices classiques

EXERCICE 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \qquad (S_6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 8. Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 9. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 7y & + & z & = & -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcccrcr} x & + & 2y & & & & + & t & = & 1 \\ & & & 3z & & & + & 3t & = & 0 \\ & & & & r & & + & 2t & = & -1 \end{array} \right.$$

EXERCICE 10. Résoudre les systèmes suivants en fonction des valeurs du paramètre m :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} mx & + & y & = & 1 \\ x & + & my & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = & m \end{array} \right.$$

EXERCICE 11. Inverser la matrice suivante en fonction du paramètre m, lorsque c'est possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & -1 \\ m & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

III Pour aller plus loin

EXERCICE 12. Résoudre les systèmes suivants en fonction des valeurs du paramètre m :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ (2m+1)x & + & 3y & + & (m+2)z & = & 3 \end{array} \right.$$

EXERCICE 13. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$.

Considérons n points dans le plan $\mathbb{R}^2$, on veut savoir s'il existe un polygone à n sommets dont les points donnés sont les milieux des côtés.

1. Ramener ce problème à l'étude d'un système linéaire.
2. Le résoudre pour $n = 3$.
3. Le résoudre pour $n = 4$.
4. Le résoudre pour n quelconque.

EXERCICE 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On considère le système linéaire défini par les équations :

$$\forall k \in \{1; \ldots; n\}, \quad \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell = 1 - x_k$$

Déterminer les solutions.