Correction du TD 7 : Systèmes linéaires et composition de foncti

I Appliquer le cours

La correction de ces exercices est rédigée entièrement pour vous aider à voir la rédaction que l'on attend de vous pour ces exercices.

EXERCICE 1.

1. $f \circ g(x) = f(2x^2+3) = e^{2x^2+3}$

   $f \circ g(x) = f(2x^2-4x+3) = \ln(2x^2-4x+3)$

   $f \circ g(x) = f(5x^2+1) = \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}}$

   $f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$

   $f \circ g(x) = f(2x+1) = (2x+1)^2$

   $f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$

2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, $f \circ g(x) = e^{x^2}$

   $f(x) = 2x+1$, $g(x) = \ln(x)$, $f \circ g(x) = 2\ln(x)+1$

   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 3x^2+4$, $f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$
   ou
   $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{3x^2+4}$, $f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$
   ou
   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$, $g(x) = x^2$, $f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$
   ou
   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$, $g(x) = x$, $f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$
   ou
   $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$, $f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}}$

   $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$, $f \circ g(x) = \sqrt{e^x}$

EXERCICE 2. Soit $y \in \mathbb{R}$,

Montrons qu'il existe un unique x tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 3x-2 = y \\ &\Leftrightarrow 3x-2+2 = y+2 \\ &\Leftrightarrow 3x = y+2 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{3}x = \frac{y+2}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} \end{aligned}$$

On peut remonter les calculs, f est donc une bijection d'inverse

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{y+2}{3} \end{pmatrix}$$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$,

Montrons qu'il existe un unique x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $g(x) = y$.

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = y \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{y} \text{ on peut passer a l'inverse car } y \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{y} \text{ on peut remonter le calcul car } x \neq 2 \\
&\Leftrightarrow x - 2 + 2 = \frac{1}{y} + 2 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 2
\end{aligned}$$

On peut remonter les calculs pour $x \neq 2$, g est donc une bijection d'inverse

$$g^{-1} = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y \mapsto \frac{1}{y} + 2 \end{array} \right)$$

EXERCICE 3.

1. Vrai, si (S) est homogène, le vecteur $(0,0,\dots,0)$ est solution du système.
2. Faux, le système $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$ est constitué de $p = 1$ inconnue et de $n = 3$ équations et admet une solution $x = 0$.
3. Faux, le système $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right.$ est constitué de $p = 3$ inconnues et de $n = 2$ équations et n'admet aucun solution.
4. Faux, si on regarde le système constitué par l'équation $x + 2y = 1$, les couples $(1{,}0)$ et $(0{,}\frac{1}{2}$ mais $1 + 2\frac{1}{2} = 1 + 1 = 2 \neq 1$, le couple $(1{,}\frac{1}{2})$ n'est pas solution.
5. Faux, le système $\left\{ \begin{array}{ccccc} y & + & z & = & 2 \\ y & + & z & = & 3 \\ & & z & = & 1 \end{array} \right.$ n'admet pas de solution et est pourtant un système triangulaire.

EXERCICE 4.
Pivot de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{2}{2}x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & \frac{1}{2}y & & = & \frac{1}{2} \\ 3x & + & 7y & -3(x + \frac{1}{2}y) & = & -2 - 3 \times \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & \frac{1}{2}y & & = & \frac{1}{2} \\ 3x & + & 7y & -3x - \frac{3}{2}y & = & -\frac{4}{2} - \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{14}{2}y \quad -\frac{3}{2}y & = & \frac{-4-3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{14-3}{2}y & = & \frac{-7}{2} \end{array} \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{11}{2}y & = & \frac{-7}{2} \end{array}\right. \\
&\underset{L_2 \leftarrow \frac{2}{11}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{2}{11}\frac{11}{2}y & = & \frac{2}{11}\times\frac{(-7)}{2} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{2\times 11}{11\times 2}y & = & \frac{2\times(-7)}{11\times 2} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & y & = & \frac{(-7)}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ & & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrrcl} x & + & \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{(-7)}{11} \\ & & y & & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{1}{2}-\frac{(-7)}{2\times 11} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{11}{22}+\frac{7}{22} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{11+7}{22} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{18}{22} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{2\times 9}{2\times 11} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & \frac{9}{11} \\ & y & = & -\frac{7}{11} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc $\left\{\left(\frac{9}{11};-\frac{7}{11}\right)\right\}$.

Inversion de matrices Le système s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système suivant, il faut inverser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

$2\times 7 - 1\times 3 = 14-3 = 11 \neq 0$, la matrice est donc inversible.

L'inverse de la matrice s'écrit alors

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution du système est alors

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\times\frac{7}{11} - 2\times\frac{-1}{11} \\ 1\times\frac{-3}{11} - 2\times\frac{2}{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{11}+\frac{2}{11} \\ \frac{-3}{11}-\frac{4}{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7+2}{11} \\ \frac{-3-4}{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{-7}{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc $\left\{\left(\frac{9}{11};-\frac{7}{11}\right)\right\}$.

EXERCICE 5.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ x-y=0\\ x+4y+z=0\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ x-y-(x+y-z)=0-0\\ x+4y+z-(x+y-z)=0-0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ x-y-x-y+z=0\\ x+4y+z-x-y+z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ -2y+z=0\\ 3y+2z=0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow\left(-\frac{1}{2}\right)L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ -\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2y+\left(-\frac{1}{2}\right)z=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0\\ 3y+2z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ \frac{2}{2}y-\frac{1}{2}z=0\\ 3y+2z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ 3y+2z=0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3-3L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z-\left(y-\frac{1}{2}z\right)=0-0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ 3y+2z-3(y-\frac{1}{2}z)=0-3\times 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z-y+\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ 3y+2z-3y+\frac{3}{2}z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+\left(-1+\frac{1}{2}\right)z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \left(2+\frac{3}{2}\right)z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \left(\frac{4}{2}+\frac{3}{2}\right)z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \left(\frac{4+3}{2}\right)z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \frac{7}{2}z=0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow\frac{2}{7}L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \frac{2}{7}\times\frac{7}{2}z=\frac{2}{7}\times 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}z=0\\ y-\frac{1}{2}z=0\\ \frac{2\times 7}{7\times 2}z=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & - & \frac{1}{2}z & +\frac{1}{2}z & = & 0 + \frac{1}{2} \times 0 \\ & y & - & \frac{1}{2}z & +\frac{1}{2}z & = & 0 + \frac{1}{2} \times 0 \\ & & & z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(0;0;0)\}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & = & 1\\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow \frac12 L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} \frac12\times 2x & + & \frac12\times 2y & + & \frac12 z & = & \frac12\times 1\\ x & + & y & - & z & = & 0\\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \frac22 x & + & \frac22 y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ x & + & y & - & z & = & 0\\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ x & + & y & - & z & = & 0\\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & & = & \frac12\\ x & + & y & - & z & -x-y-\frac12 z & = & -\frac12\\ x & + & 2y & + & z & -x-y-\frac12 z & = & \frac22-\frac12\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & \left(-1-\frac12\right)z & = & -\frac12\\ & & (2-1)y & + & \left(1-\frac12\right)z & = & \frac{2-1}{2}\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & -\frac32 z & = & -\frac12\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & -\frac32 z & = & -\frac12\end{array}\right.$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & -(y+\frac12 z) & = & \frac12-\frac12\\ & & y & + & \frac12 z & & = & \frac12\\ & & & & -\frac32 z & & = & -\frac12\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & \frac12 z & -y-\frac12 z & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & & = & \frac12\\ & & & & -\frac32 z & & = & -\frac12\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & -\frac32 z & = & -\frac12\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow (-\frac23)L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & \left(-\frac23\right)\left(-\frac32\right)z & = & \left(-\frac23\right)\left(-\frac12\right)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & \left(\frac23\right)\left(\frac32\right)z & = & \left(\frac23\right)\left(\frac12\right)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & \frac{2\times 3}{3\times 2} z & = & \frac{2\times 1}{3\times 2}\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & = & \frac12\\ & & & & z & = & \frac13\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-\frac12 L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & & & & & = & 0\\ & & y & + & \frac12 z & -\frac12 z & = & \frac12-\frac12\times\frac13\\ & & & & z & & = & \frac13\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & \frac{1\times 3}{2\times 3} - \frac{1\times 1}{2\times 3} \\ & & z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \\ & & z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & \frac{3-1}{6} \\ & & z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & \frac{2}{6} \\ & & z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & \frac{1}{3} \\ & & z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système est donc $\{(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})\}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & -(x+y+z) & = & 0-1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & -2(x+y+z) & = & -1-2\times 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & -x-y-z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & -2x-2y-2z & = & -1-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & 4z & = & -1 \\ & & y & - & 4z & = & -3 \end{array}\right.$$

C'est impossible, les équations $y - 4z = -1$ et $y - 4z = -3$ ne peuvent être vérifiées en même temps.

L'ensemble des solutions de ce système est $\emptyset$.

EXERCICE 6. Pour des réels a, b et$c$ quelconques, le système associé à la matrice A est

$$(S_A) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ & & & & z & = & c \end{array}\right.$$

Le système (S_A) est triangulaire, on va le résoudre pour trouver l'inverse de A.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ & & & & z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & -y-z & = & a-y-z \\ & & y & + & z & -z & = & b-z \\ & & & & z & & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & a-y-z \\ & y & & = & b-z \\ & & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & a-y-c \\ & y & & = & b-c \\ & & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & a-(b-c)-c \\ & y & & = & b-c \\ & & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & a-b+c-c \\ & y & & = & b-c \\ & & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & a-b \\ & y & & = & b-c \\ & & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & a & - & b & & \\ y & = & & & b & - & c \\ z & = & & & & & c \end{array}\right.$$

Cette équivalence se réécrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B n'est pas une matrice carrée, elle n'est donc pas inversible. (Vous pouvez montrer que le système associé à la matrice a une infinité de solutions.)

Pour des réels a, b et$c$ quelconques, le système associé à la matrice C est

$$(S_C) : \left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & z & = & a \\ x & & & & & = & b \\ x & & & + & z & = & c \end{array}\right.$$

On va résoudre le système (S_C) pour trouver l'inverse de c.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & z & = & a\\ x & & & & & = & b\\ x & & & + & z & = & c\end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & b\\ & & y & - & z & = & a\\ x & & & + & z & = & c\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_3-L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & & & = & b\\ & & y & - & z & & & = & a\\ x & & & + & z & & -x & = & c-b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & b\\ & & y & - & z & = & a\\ & & & & z & = & c-b\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_2+L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & & & = & b\\ & & y & - & z & & +z & = & a+c-b\\ & & & & z & & & = & c-b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & b\\ & y & & = & a+c-b\\ & & z & = & c-b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & & & b & & \\ y & = & a & - & b & + & c\\ z & = & & - & b & & c\end{array}\right.$$

Cette équivalence se réécrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

La matrice C est donc inversible d'inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

II Des exercices classiques

Vous trouverez pour ces exercices le détail de la procédure à suivre pour résoudre ces exercices ainsi que le résultat final. Il ne s'agit cependant pas d'une correction précise ; en cas de problème, n'hésitez pas à venir me voir pour en discuter.

EXERCICE 7. Je vous donnerai seulement dans ce corrigé les opérations à effectuer, je vous laisse donc faire les calculs.

1. Pour simplifier les calculs, il est préférable de commencer par inverser la ligne 1 et 3 afin de ne pas avoir de fractions dès le début.

   $L_1 \leftrightarrow L_3$

   $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
   $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$

   $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$

   $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
   $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2$

   Vous remarquerez alors que la ligne L_3 est impossible.

   L'ensemble des solutions est alors $\emptyset$.

2. $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$

   $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

   $L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2$

   $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

   $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$

   $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3$
   $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3$

   L'ensemble des solutions est alors $\{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)\}$.

3. $L_1 \leftarrow_f rac12L_1$

   $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

   Les lignes L_2 et L_3 sont alors incompatibles.

   L'ensemble des solutions est alors $\emptyset$.

4. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

   $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$

   $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
   $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

   $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$

   $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

   Il y a une infinité de solution, l'ensemble des solutions est alors $\{(\frac{3}{2}; y; -y-1; -\frac{1}{2}) | y \in \mathbb{R}\}$.

5. $L_1 \leftrightarrow L_2$

   $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
   $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

   $L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2$

   $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
   $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

   $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$

   $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

   L'ensemble des solutions est alors $\{(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{37}{12})\}$.

6. $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

   $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

   $L_3 \leftarrow -\frac{1}{12}L_3$

   $L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3$
   $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

   L'ensemble des solutions est alors $\{(3x_3 + \frac{17}{6}x_5; -x_3 - \frac{5}{3}x_5; x_3; \frac{1}{6}x_5; x_5) | (x_3; x_5) \in \mathbb{R}^2\}$.

EXERCICE 8. $A)$ Le système associé à A est

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & a \\ -x & + & y & & & + & t & = & b \\ -x & & & + & z & + & t & = & c \\ & - & y & - & z & - & t & = & d \end{array}\right.$$

Pour le résoudre, effectuez les opérations suivantes :

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$L_3 \leftarrow \frac{2}{3} L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_3$

$L_4 \leftarrow -3 L_4$

$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3} L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_4$

L'inverse de A est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$A)$ Le système associé à B est

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ & - & y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$$

Pour le résoudre, effectuez les opérations suivantes :

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

L'inverse de B est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C)$ Le système associé à C est

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & + & 2t & = & a \\ & & & - & 2z & & & = & b \\ x & + & 2y & & & + & 3t & = & c \\ & & y & & & - & 3t & = & d \end{array}\right.$$

Pour le résoudre, effectuez les opérations suivantes :

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$

$L_4 \leftarrow -\frac{1}{4}L_4$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

L'inverse de C est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 9. Je vous laisse trouver par vous même les opérations à effectuer pour résoudre ces systèmes.

L'ensemble des solutions du premier système est $\{(\frac{3-4z}{5}; \frac{2-z}{5}; z) | z \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des solutions du deuxième système est $\{(1-2y-t; y; -t; -1-2t; t) | (y,t) \in \mathbb{R}^2\}$.

EXERCICE 10. Pour le premier systèmes, il faut distinguer 4 cas :

* $m = 0$: L'ensemble des solutions est $\{(1; 1)\}$
* $m = 1$: Il y a une infinité de solutions, l'ensemble des solutions est $\{(1-y; y) | y \in \mathbb{R}\}$
* $m = -1$: Il y a pas de solutions, l'ensemble des solutions est $\emptyset$
* $m \neq 0$, $m \neq 1$ et $m \neq -1$: L'ensemble des solutions est $\{(\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m+1})\}$

Pour le deuxième système, il faut distinguer deux cas :

* $m \neq 5$: Il y a pas de solutions, l'ensemble des solutions est $\emptyset$
* $m = 5$: Il y a une infinité de solutions, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}; \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}t; z; t) | (z; t) \in \mathbb{R}^2\}$.

EXERCICE 11. Le système associé à cette matrice est :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & a \\ 3x & + & my & - & z & = & b \\ mx & + & 3y & - & 2 & = & c \end{array}\right.$$

Il faut alors distinguer deux cas :

* $m = 3$: l'ensemble des solutions du système est $\emptyset$. La matrice n'est donc pas inversible.
* $m \neq 3$: l'ensemble des solutions du système est $\{(\frac{(2m-3)a-2b+c}{3m-9}; \frac{(m-6)a+2b-c}{3m-9}; \frac{(m+3)}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. La matrice est donc inversible et son inverse est

$$\begin{pmatrix} \frac{2m-3}{3(m-3)} & \frac{-2}{3(m-3)} & \frac{1}{3(m-3)} \\ \frac{m-6}{3(m-3)} & \frac{2}{3(m-3)} & \frac{-1}{3(m-3)} \\ \frac{m+3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont destinés à ceux ayant déjà acquis une maîtrise certaine du cours, le but est donc que vous passiez du temps à réfléchir à la réponse. Je vais vous indiquer à la suite quelques indices pour vous aider à arriver à la solution et le résultat final, et pour le reste, c'est à vous de jouer !

EXERCICE 12. Il faut comme dans l'exercice 10 distinguer différents cas pour résoudre le système. Commencez par utiliser le pivot de Gauss, les différents cas apparaissent lorsque vous devez diviser par une quantité qui peut être nulle en fonction de la valeur de m. Commencez par supposer que ces quantités sont non nulles puis regardez les cas particuliers où elles sont nulles.

EXERCICE 13.

1. Commencez par noter les points $A_1, \dots, A_n$ et leurs coordonnées $(a_1; b_1), \dots, (a_n; b_n)$.

   Un point est milieu de deux points si son abscisse est au milieu des abscisses des deux points et de même pour les ordonnées. Vous aboutirez à un système de $2n$ équations.

2. Il s'agit d'une résolution classique à résoudre de proche en proche. Il existe une unique solution.

3. Vous devez trouver une condition sur les a_i et b_j qui conditionne l'existence d'une solution. Il y a alors aucune ou une infinité de solutions.

4. Inspirez vous des questions précédentes pour répondre à celle ci. Cette question est particulièrement délicate.

EXERCICE 14. Il s'agit d'un exercice classique et avec une astuce, trouvez l'astuce et vous aurez la réponse en quelques lignes. Je vous laisse chercher.