TD 8 : Limites de fonctions

I Appliquer le cours

EXERCICE 1 (Limites classiques/opérations sur les limites/composition de limites).

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)e^x+x^4$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ \ln(-x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{e^x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\left(2-\frac{1}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to0} e^x\,\frac{x+1}{x^2+3}$ $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-x+1}{3x^2-5x-3}$

EXERCICE 2 (Composition de limites).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3+x^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}$

EXERCICE 3 (Croissance comparée).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3-2}$ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(5x)-x^2}{e^x+\frac{1}{x}}$

EXERCICE 4 (Limites usuelles).

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 5 (Cinquième forme indéterminée).

$\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-x}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

EXERCICE 6 (Théorème d'encadrement). Soit f une fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

1. Montrer pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ que $\frac{1}{x}-1\leqslant\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\leqslant\frac{1}{x}$.
2. En déduire un encadrement de f
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$.

II Des exercices classiques

EXERCICE 7. Calculez les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ $\lim\limits_{x\to3} \frac{e^x-e^3}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{|x(x-1)|}{x}$ $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$

EXERCICE 8. Soit $f : x\mapsto x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x>1$. Retrouver la limite de f en $+\infty$.
2. Par une méthode analogue, trouver la limite de f en $-\infty$.

EXERCICE 9. Soit f définie par : $f : x\mapsto\frac{1}{3x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Écrire un programme Scilab qui permet d'obtenir une représentation graphique de f sur le segment $[0;5]$.
3. Calculer la dérivée f' de f sur D_f.
4. Donner le tableau de variations de f.

5. Calculer les limites de f à gauche et droite aux bornes de son ensemble de définition et placer ces limites dans le tableau de variations.

6. Déterminer l'image de 0 par f et la placer dans le tableau de variations.

7. Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par f et le(s) placer dans le tableau de variations.

EXERCICE 10. Soit f définie par : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Écrire un programme Scilab qui permet d'obtenir une représentation graphique de f sur le segment $[-2; 1.5]$.

3. Calculer la dérivée f' de f sur D_f.

4. Donner le tableau de variations de f.

5. Calculer les limites de f à droite aux bornes de son ensemble de définition et placer ces limites dans le tableau de variations.

EXERCICE 11. Soit f définie par : $f : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Écrire un programme Scilab qui permet d'obtenir une représentation graphique de f sur le segment $[2; 5]$.

3. Calculer la dérivée f' de f sur D_f.

4. Donner le tableau de variations de f.

5. Calculer les limites de f à droite aux bornes de son ensemble de définition et placer ces limites dans le tableau de variations.

6. En déduire le signe de f.

III Pour aller plus loin

EXERCICE 12 (tiré d'un sujet de l'EDHEC)**.**

1. Montrer que : $\forall x > 0, \frac{e^x - 1}{x} > 0$

2. Soit f définie par $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

   a) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

   b) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

   c) En déduire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$, limites incluses.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$

   b) Écrire un programme Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer une valeur pour n et affichant u_n en sortie.

   c) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   d) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

EXERCICE 13. Résoudre l'équation $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.