Correction du TD 8 : Limites de fonctions

I Appliquer le cours

La correction de ces exercices est rédigée entièrement pour vous aider à voir la rédaction que l'on attend de vous pour ces exercices.

EXERCICE 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, ce sont des limites classiques.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par opération sur les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)e^x = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)e^x + x^4 = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+2}{e^{-x}} = (x+2)e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$.

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^x = +\infty$.

Finalement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^{-x}} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, par opération sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ car $-1 < 0$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Par composition de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(-x) = -\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = (-x)^2$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^2 = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + 2x^2 + 1 = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{e^x} = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^3 = -x^3$, donc $x^3 = -(-x)^3$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^3 = +\infty$.

Donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -(-x)^3 = -\infty$ car $-1 < 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{1}{x^3}\right) = 2$.

Or $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Finalement, par opération sur les limites, $\lim_{x\to-\infty} e^x\left(2-\frac{1}{x^3}\right) = 0$.

On a $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

On a $\lim_{x\to0} x = 0$, donc, par opération sur les limites, $\lim_{x\to0} x+1 = 1$.

On a $\lim_{x\to0} x^2 = 0$, donc, par opération sur les limites, $\lim_{x\to0} x^2+3 = 3$.

De plus $\lim_{x\to0} e^x = 1$.

Par opération sur les limites, on a $\lim_{x\to0} e^x\frac{x+1}{x^2+3} = \frac{1}{3}$.

On a $\lim_{x\to2} x^3 = 8$ et $\lim_{x\to2} x = 2$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to2} x^3-x+1 = 7$.

On a $\lim_{x\to2} x^2 = 4$ et $\lim_{x\to2} x = 2$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to2} 3x^2-5x-3 = -1$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to2} \frac{x^3-x+1}{3x^2-5x-3} = \frac{7}{-1} = \frac{-7}{1} = -7$.

EXERCICE 2. On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$.

De plus $\lim_{x\to1} \ln(x) = 0$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

On a $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty$.

De plus $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

On a $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ car $-1<0$.

On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, par opération sur les limites, on a $\lim_{x\to-\infty} -x+\frac{1}{x} = +\infty$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to0^+} \sqrt{-x+\frac{1}{x}} = +\infty$.

On a $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ pour $\alpha>0$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2 = +\infty$.

Or $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} e^{x^3+x^2} = +\infty$.

On a $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ pour $\alpha>0$, par opération sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} n^2+3n+4 = +\infty$.

Or, pour tout $x>0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

On a $\lim_{n\to+\infty} n^2+3n+4 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 0$.

On a $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, par opération sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$ car $-1 < 0$.

Or $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} e^{-n} = 0$.

EXERCICE 3. $\forall x > 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+3}{x-2} &= \frac{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)}\\
&= \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\
&= \frac{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}}
\end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x} = 1$.

Par opération sur les limites $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$.

Or $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = +\infty$.

$\forall x < \sqrt[3]{2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-1}{x^3-2} &= \frac{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)}\\
&= \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}\\
&= \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}
\end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{x^3} = 1$.

Par opération sur les limites $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^3}} = 1$.

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3-2} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} = 0$.

$\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(5x)-x^2}{e^x+\frac{1}{x}} &= \frac{\ln(5x)\left(\frac{\ln(5x)}{\ln(5x)}-\frac{x^2}{\ln(5x)}\right)}{\frac{1}{x}\left(\frac{e^x}{\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)}\\
&= \frac{\ln(5x)}{\frac{1}{x}}\frac{1-\frac{x^2}{\ln(5x)}}{xe^x+1}\\
&= x\ln(5x)\frac{1-\frac{x^2}{\ln(5x)}}{xe^x+1}\\
&= \frac{5x\ln(5x)}{5}\frac{1-\frac{x^2}{\ln(5x)}}{xe^x+1}
\end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ et, par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} 5x = 0$.

Or $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée.

Par composition de limite, on a donc $\lim_{x\to 0^+} 5x\ln(5x) = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x\ln(5x)}{5} = 0$.

On a $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(5x) = -\infty$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln(5x)} = 0$ et par opération sur les limites $\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x^2}{\ln(5x)} = 1$.

On a $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} xe^x = 0$. Finalement, par opération sur les limites, on a $\lim_{x\to 0^+} xe^x + 1 = 1$.

On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x\ln(5x)}{5} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x^2}{\ln(5x)} = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} xe^x + 1 = 1$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(5x)-x^2}{e^x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x\ln(5x)}{5} \frac{1-\frac{x^2}{\ln(5x)}}{xe^x+1} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$.

EXERCICE 4. On a $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, or pour $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on trouve donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

On a $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Par composition de limites, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = 1$.

EXERCICE 5. $\forall x > 0$, $\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-x\ln(x)}$

On a $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$.

Par composition de limites, on a $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{-x\ln(x)} = 1$.

$\forall x > 0$, $x^2 - x = x(x-1)$.

Or $\lim_{x\to+\infty} x = +\inf$, par opération sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$ et, de plus, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2-x} = +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

D'après l'exercice précédent, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, de plus $\lim_{x\to 1} e^x = e$.

Par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty$

EXERCICE 6. 1. Par définition de la partie entière, on a pour tout $x \neq 0$, $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$.

L'inégalité de gauche donne $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

L'inégalité de droite donne $\frac{1}{x} \leqslant \lfloor\frac{1}{x}\rfloor + 1$, d'où $\frac{1}{x} - 1 \leqslant \lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

Finalement, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} - 1 \leqslant \lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

2. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{x} - 1\right) &\leqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant x \times \frac{1}{x} \\ \frac{x}{x} - x &\leqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant \frac{x}{x} \\ 1 - x &\leqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \leqslant 1 \end{aligned}$$

Donc, pour $x > 0$, $1 - x \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Pour $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{x} - 1\right) &\geqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \geqslant x \times \frac{1}{x} \\ \frac{x}{x} - x &\geqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \geqslant \frac{x}{x} \\ 1 - x &\geqslant x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \geqslant 1 \end{aligned}$$

Donc, pour $x < 0$, $1 - x \geqslant f(x) \geqslant 1$.

3. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 - x = 1$.

Or, pour $x > 0$, $1 - x \leqslant f(x) \leqslant 1$ et, pour $x < 0$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 1 - x$.

Par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

II Des exercices classiques

Vous trouverez pour ces exercices le détail de la procédure à suivre pour résoudre ces exercices ainsi que le résultat final. Il ne s'agit cependant pas d'une correction précise ; en cas de problème, n'hésitez pas à venir me voir pour en discuter.

EXERCICE 7.

Pour la première limite, il faut considérer comme dans le cas des suites multiplier par la quantité conjuguée. Il faut donc multiplier $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ par $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Utilisez ensuite l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ pour développer $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$.

Par opération sur les limites, vous devriez arriver à $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$.

Pour la deuxième limite, je vous conseille de factoriser le numérateur par e^3.

Vous pouvez alors considérer la limite comme la composition de deux fonctions : $x \mapsto x - 3$ et $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.

En utilisant la composition des limites, vous aboutirez à $\lim x \to 3 \frac{e^x - e^3}{x-3} = e^3$.

Pour la troisième limite, commencez à calculer la valeur du quotient $\frac{|x(x-1)|}{x}$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

Vous trouverez alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x(x-1)|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x(x-1)|}{x} = -1$. Il ne reste plus qu'à déduire que la limite en 0 n'existe pas.

Pour la quatrième limite, vous pouvez remarquer qu'il s'agit de la composition de deux fonctions, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x\ln(x)$.
Par composition de limites, vous trouverez que $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$.

EXERCICE 8. La difficulté de cet exercice repose principalement sur la compréhension de la partie entière.

1. Il faut réécrire la formule de $f(x)$ pour $x > 1$, vous pourrez trouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. De même, en réécrivant la formule de $f(x)$, on trouve que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 9.

1. La fonction f est définie partout sauf en $3x+1=0$. Vous trouverez donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
2. Vous pourrez vous reporter pour cette question au TP Scilab 3 (lorsque nous l'aurons fait, en attendant, je vous laisse chercher sur vos fiches Scilab).
3. Utilisez la formule $\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u'}{u^2}$.

   Vous trouverez ainsi $f'(x) = -\frac{3}{(3x+1)^2}$.
4.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -\infty & & -\frac{1}{3} & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & \| & - & \\
\hline
f(x) & & \searrow & \| & \searrow &
\end{array}$$

5. Par opération sur les limites, vous arriverez à $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. $f(0) = -3$
7. Considérez $f(x) = 2$, vous trouverez alors en résolvant cette égalité $x = -\frac{1}{6}$.

EXERCICE 10.

1. f est définie en x tel que $\sqrt{2-x} \neq 0$ et $2 - x \geqslant 0$.

   Vous trouverez alors $D_f =]-\infty; 2[$.
2. Là encore, je vous laisse regarder le TP3.
3. Vous pouvez utiliser la formule $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$.

   Vous pourrez alors aboutir à $f'(x) = -\frac{-1}{2(2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2(2-x)^{\frac{3}{2}}}$.
4.

$$\begin{array}{c|ccc||}
 & -\infty & & 2 \\
\hline
f'(x) & & - & \\
\hline
f(x) & & \nearrow &
\end{array}$$

5. Par opération sur les limites et compositions de limites, vous trouverez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 11.

1. f est définie en x tel que $x+1>0$ et $x>0$.

   Vous trouverez alors $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Là encore, vous pourrez vous reporter au TP3.

3. Vous pouvez utiliser la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

   Vous aboutirez alors à $f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.

4.

	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

5. Par opération sur les limites et en utilisant $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, vous trouverez $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

   Pour la limite en $+\infty$, commencez par réécrire $(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) = x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)$.

   En utilisant $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, vous pouvez réécrire $x(\ln(x+1) - \ln(x))$ sous un forme que nous avons déjà vu dans les premiers exercices de la fiche de TD, mais avec n à la place de x. Je vous laisse reprendre les exercices ci dessus pour retrouver comment trouver la limite de $x(\ln(x+1) - \ln(x))$ en $+\infty$.

   Par opération sur les limites, on trouve que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Pour répondre à cette question, vous pouvez utiliser la croissance de f et le fait que la limite en 0 est 0.

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont destinés à ceux ayant déjà acquis une maîtrise certaine du cours, le but est donc que vous passiez du temps à réfléchir à la réponse. Je vais vous indiquer à la suite quelques indices pour vous aider à arriver à la solution et le résultat final, et pour le reste, c'est à vous de jouer !

EXERCICE 12. Cet exercice est un exercice classique de concours. Il utilise pour le 1. et 2. des méthodes que nous avons vu dans le cours ou dans le TD. Je vous laisse donc le travailler.

Les questions de point 3. sont plus complexes, vous avez tous les outils pour résoudre cette question dans le cours du chapitre 1, cependant, il s'agit le plus souvent d'utiliser des méthodes classiques que nous étudierons dans un chapitre indépendant après les vacances de Noël. En cas de soucis, n'hésitez pas à reprendre cet exercice lorsque nous verrons le cours qui y est associé.

EXERCICE 13. Il est généralement très complexe de résoudre des équations mêlant x et $\ln(x)$. Il s'agit cependant là d'un cas particulier un peu astucieux où c'est possible.

Je vous conseille d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ sur son domaine de définition.

Vous pourrez conclure en considérant les extrema de cette fonction.