TD 9 : Dénombrement

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à revoir le cours. Ce sont soit des applications directes des Définitions/Proposition/Théorèmes vu en cours, soit des exercices dont la structure ressemble à ce que vous avez pu voir en cours. À côté de chacun de ces exercices est mis la partie du cours à laquelle il est associé. Il vous est donc conseillé de les retravailler avec le cours à côté si besoin.

EXERCICE 1 (Permutations/Combinaisons)**.** Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres placés sur une étagère de sa bibliothèque.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement un livre ait changé de place ?
3. Quelle est la probabilité qu'exactement deux livres aient changé de place ?
4. (Difficile) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ? Dans n'importe quel ordre ?

EXERCICE 2 (Combinaisons)**.**
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire au hasard et simultanément 6 boules dans cette urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (On attend une réponse en chiffre)

EXERCICE 3 (Combinaisons)**.** On dispose d'un jeu de 32 cartes et on appelle main 5 cartes extraites du paquet.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains donnant exactement trois rois ?
3. Combien y a-t-il de mains où toutes les cartes sont des cœurs ?

EXERCICE 4 (Triangle de Pascal)**.**
Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   * a et b
   * a mais pas b
   * b mais pas a
   * ni a ni b
2. En déduire la relation :
$$\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$$
3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout p tel que $2 \leqslant p \leqslant n$, on a
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$
4. Retrouver le résultat en utilisant la formule du triangle de Pascal.

EXERCICE 5 (Binôme de Newton)**.**

1. Résoudre
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1$$
2. Résoudre
$$x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1 = 1$$
3. Calculer la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

EXERCICE 6 (Formule des probabilités totales)**.** Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

On suppose $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Établir

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$$

II Des exercices classiques

Il s'agit ici d'exercices qui sont classiques par leur structure ou les sujets qu'ils abordent. C'est à vous de trouver quel partie du cours vous devez utiliser pour parvenir à résoudre ces exercices. Attention, dans certains de ces exercices, il vous sera demandé d'utiliser des résultats vus au chapitre 5.

EXERCICE 7. On considère des dés équilibrés. Lequel des événements qui suivent est le plus probable ?

a. $A =$ "Ne pas obtenir de 1 ni de 6 en deux lancers d'un dé"
b. $B =$ "Obtenir un 6 en moins de quatre lancers"
c. $C =$ "Obtenir un double 6 en moins de 24 lancers de deux dés"
d. $D =$ "Obtenir deux fois le même résultat en 3 lancers"

EXERCICE 8.

1. Combien de fois faut il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un 6 ?
2. Même question avec deux dés pour obtenir un double 6.

EXERCICE 9. Deux joueurs s'affrontent aux dés. Le premier joueur lance deux dés et s'il obtient 6 en sommant les résultats des deux dés, il gagne la partie. Sinon, c'est au second joueur de lancer deux dés et s'il obtient 7 c'est lui qui a gagné. Si aucun des joueurs n'a gagné, il y a égalité. Le premier joueur a l'avantage de commencer alors que le second à l'avantage qu'il est plus facile d'obtenir 7 que 6.

1. Sans faire de calcul, quel est à votre avis la personne qui a le plus de chance de gagner ?
2. Quelle est la probabilité de gagner pour le joueur 1 ?
3. Quelle est la probabilité de gagner pour le joueur 2 ? Conclure quant au joueur qui a le plus de chance de gagner.
4. Quelle est la probabilité que les deux joueurs fassent égalité ?

EXERCICE 10. On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Si on considère $n = 366$, quelle probabilité y a-t-il que deux élèves aient leur date d'anniversaire le même jour ?

   Regardons maintenant $n < 366$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur.
3. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? À 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?

EXERCICE 11. Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un six une fois sur deux. On tire un dé au hasard de la pochette et on le lance.

1. On le lance une première fois, quelle est la probabilité d'obtenir un 6.
2. On suppose qu'on a déjà obtenu un 6 au premier lancer. On lance le même dé une deuxième fois, qu'elle est la probabilité que l'on obtienne un deuxième 6 ?
3. Conclure quant à l'indépendance des deux lancers.

EXERCICE 12. On dispose de deux dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.

* Si on obtient "pile", on décide de jouer uniquement avec le dé A.
* Si on obtient "face", on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis aux deux premiers coups. Ces événements sont ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coups.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

EXERCICE 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1; n]\!]$. Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On extrait p boules simultanément de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.
   a) Déterminer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k.
   b) Déterminer la probabilité que le plus grand numéro tiré soit k.
3. En utilisant les dénombrements des questions précédentes, montrer que $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$

EXERCICE 14. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise $n+1$ boules dans cette urne et, pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, on définit l'événement :

$$A_k = \text{"Lors du } k\text{−ième tirage, on obtient une boule déjà sortie précédemment"}$$

1. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Que signifie l'événement $B_k = \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$
2. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$. En déduire une expression de $\mathbb{P}(B_k)$.
3. Soit $k \in [\![2; n+1]\!]$. Quelle est la probabilité que l'on obtienne pour la première fois lors du k−ième tirage une boule tirée précédemment ?

III Pour aller plus loin

Ces exercices sont plus complexes et ont pour but de vous faire réfléchir à des choses plus complexes que ce que l'on a pu voir en cours. Ce sont d'excellents exercices pour parfaire votre maîtrise de ce qui a été vu en cours.

EXERCICE 15 (La ruine du joueur)**.** Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$.

À chaque répétition du jeu, on suppose que le joueur gagne 1€ avec la probabilité p ou perd 1€ avec la probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilite } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilite } q \end{cases}$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune a.
   a) Quelle est la valeur de u_0 et u_N ?
   b) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leqslant a \leqslant N - 1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$$
   c) Montrer que
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   d) Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$, interpréter la résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$.
4. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.

EXERCICE 16. On considère les ensembles $E = \{-1; 0; 1\}$, $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $G = \{1; 2\}$ et $H = \{1; 2; 3\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications de E dans F telles que $f(0) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications de E dans F telles que $f(0) \neq f(1)$?

4. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F ? et sur G ?
6. Combien existe-t-il d'applications bijectives de E dans H ?

EXERCICE 17. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'au moins l'un des A_i est réalisé est supérieure à

$$1 - exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$$