TD 9 : Dénombrement

I Appliquer le cours

Ces exercices ont pour but de vous aider à appliquer les notions vues en cours et de comprendre la rédaction que l'on attend de vous pour répondre aux questions qui y sont associées. Il est donc important que vous compreniez bien les corrections de ces exercices.

EXERCICE 1 (Permutations/Combinaisons).

1. Chaque configuration des livres dans la bibliothèque est équiprobable.
   Il y a en tout $n!$ configurations possibles des livres dans la bibliothèque, cela correspond à toutes les permutations de livres que l'on peut faire.
   Il n'y a qu'une configuration de livres tel qu'aucun n'ait changé de place.
   La probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place est $\frac{1}{n!}$.
2. Il n'est pas possible qu'un seul livre ait changé de place. En effet, pour qu'un livre change de place, il doit changer de place avec un autre livre. Il y aura alors au moins deux livres qui auront changé de place.
   La probabilité qu'un livre ait changé de place est donc 0.
3. Chaque configuration des livres dans la bibliothèque est équiprobable.
   Il y a en tout $n!$ configurations possibles des livres dans la bibliothèque, cela correspond à toutes les permutations de livres que l'on peut faire.
   Choisir une configuration où exactement deux livres ont changé de place revient à choisir 2 livres dans la bibliothèque parmi les n livres pour les changer de place. Il y a donc $\binom{n}{2}$ configurations possibles.
   La probabilité qu'exactement deux livres aient changé de place est donc
   $$\frac{\binom{n}{2}}{n!} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{n!} = \frac{1}{2(n-2)!}$$
4. Considérons d'abord le cas où l'on souhaite que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" se retrouvent côte à côté dans le bon ordre.
   Le volume 2 doit alors se trouver à droite du volume 1, il y a donc $n-1$ places possibles pour le tome 1 (la position tout à droite n'étant pas possible). Il reste alors $(n-2)!$ façons de permuter les livres restants sur l'étagère.
   Il y a donc en tout $(n-1)(n-2)!$ configurations possibles.
   La probabilité que les deux tomes de "Guerre et paix" se retrouvent à côté l'un de l'autre dans le bon ordre est donc
   $$\frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
   Considérons maintenant le cas où l'ordre ne nous importe pas.
   Le volume 1 peut être placé à n positions, cependant, s'il est placé sur les $n-2$ positions au centre, il y a 2 positions possibles pour le tome 2 et s'il est placé sur une des extrémités, il y a alors qu'une possibilité pour le tome 2.
   Il y a donc $2(n-2)+2$ façon de choisir l'emplacement des tomes de "Guerre et Paix" de sorte à ce qu'ils soient côte à côte. Il y a ensuite $(n-2)!$ façons de choisir l'emplacement des autres livres.
   Au final, la probabilité que les volumes de "Guerre et Paix" se retrouvent côte à côte peu importe l'ordre est de
   $$\frac{(2(n-2)+2)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-2)+2}{n(n-1)} = \frac{2n-2}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

EXERCICE 2 (Combinaisons).
Tirer au hasard et simultanément 6 boules dans l'urne revient à choisir un sous ensemble de 6 éléments dans un ensemble de 10 éléments.
Il y a donc $\binom{10}{6}$ tirages possibles.
$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10\times9\times8\times7}{4!} = 10\times3\times7 = 210$
Il y a donc 210 tirages possibles.

EXERCICE 3 (Combinaisons).

1. On cherche le nombre de groupe de 5 cartes distinctes que l'on peut faire à partir d'un paquet de 32 cartes.
   Il y a donc $\binom{32}{5}$ mains possibles.
2. On souhaite compter le nombre de mains comptant exactement 3 rois.
   Commençons par choisir les rois, on cherche le nombre de groupes de 3 rois que l'on peut faire parmi les 4 rois du jeu. On peut donc en faire $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ groupes différents.
   Pour chacune de ces configurations, il reste à choisir 2 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois. Il y a alors $\binom{28}{2} = \frac{28!}{26!2!} = 14 \times 27 = 382$ choix possibles.
   Il y a donc $4 \times 382 = 1528$ mains donnant exactement 3 rois. (Les réponses $4\binom{28}{2}$ ou encore $\binom{4}{3}\binom{28}{2}$ seraient également considérées comme justes).
3. On cherche le nombre de groupes de 5 cartes distinctes que l'on peut faire à partir des 8 cartes de cœur du jeu. (Au passage, dans un jeu de 32 cartes, il y a bien $32 \div 4 = 8$ cartes de chaque couleur, une couleur étant cœur, carreau, pique et trèfles et non rouge et noir).
   Il y a donc $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 8 \times 7 = 56$ mains où toutes les cartes sont des cœur.

EXERCICE 4 (Triangle de Pascal)**.**

1. * On cherche à dénombrer les parties à 5 éléments de E contenant a et b, il y a donc 3 éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient 10 éléments.
     Il y a donc $\binom{10}{3}$ parties de E contenant a et b.
   * On cherche à dénombrer les parties à 5 éléments de E contenant a mais pas b, il y a donc 4 éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient 10 éléments.
     Il y a donc $\binom{10}{4}$ parties de E contenant a mais pas b.
   * On cherche à dénombrer les parties à 5 éléments de E contenant b mais pas a, il y a donc 4 éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient 10 éléments.
     Il y a donc $\binom{10}{4}$ parties de E contenant b mais pas a.
   * On cherche à dénombrer les parties à 5 éléments de E contenant ni a ni b, il y a donc 5 éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient 10 éléments.
     Il y a donc $\binom{10}{5}$ parties de E contenant ni a ni b.
2. Choisir une partie à 5 éléments de E revient à choisir une partie à 5 éléments qui contient a et b ou une partie à 5 éléments qui contient a mais pas b ou une partie à 5 éléments qui contient b mais pas a ou une partie à 5 éléments qui contient ni a ni b.
   De plus, il y a $\binom{12}{5}$ parties de E contenant 5 éléments.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\binom{12}{5} &= \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} \\ &= \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}\end{aligned}$$
3. Considérons un ensemble E constitué de n éléments, a et b des éléments distincts de E et comptons de deux façons différentes les parties à p éléments de E.
   Choisir une partie à p éléments de E revient à choisir une partie à p éléments qui contient a et b ou une partie à p éléments qui contient a mais pas b ou une partie à p éléments qui contient b mais pas a ou une partie à p éléments qui contient ni a ni b.
   On cherche donc à dénombrer les parties à p éléments de E contenant a et b, il y a donc $p-1$ éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient $n-2$ éléments.
   Il y a donc $\binom{n-2}{p-2}$ parties de E contenant a et b.
   On cherche ensuite à dénombrer les parties à p éléments de E contenant a mais pas b, il y a donc $p-1$ éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient $n-2$ éléments.
   Il y a donc $\binom{n-2}{p-1}$ parties de E contenant a mais pas b.

* On cherche à dénombrer les parties à p éléments de E contenant b mais pas a, il y a donc $p-1$ éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient $n-2$ éléments.
  Il y a donc $\binom{n-2}{p-1}$ parties de E contenant b mais pas a.

* On cherche à dénombrer les parties à p éléments de E contenant ni a ni b, il y a donc p éléments à choisir parmi $E \setminus \{a;b\}$ qui contient $n-2$ éléments.
  Il y a donc $\binom{n-2}{p}$ parties de E contenant ni a ni b.

  De plus, il y a $\binom{n}{p}$ parties de E contenant p éléments.

  Finalement, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

4. D'après la formule du triangle de Pascal

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \ \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} \text{ et } \binom{n-1}{p} = \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

   Finalement

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p} \\ &= \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}\end{aligned}$$

EXERCICE 5 (Binôme de Newton)**.**

1. Le triangle de Pascal pour $n=3$ donne 1, 3, 3, 1.
   Ainsi $x^3+3x^2+3x+1 = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}x^i = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}x^i 1^{3-i} = (1+x)^3$.
   Donc

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+3x+1 = 1 &\Leftrightarrow (x+1)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

   La fonction $x \mapsto x^3$ est en effet une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a donc bien $(x+1)^3 = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1$.
   Finalement $x^3+3x^2+3x+1 = 1$ admet une unique solution $x = 0$.
2. Le triangle de Pascal pour $n=7$ donne 1, 7, 21, 35, 21, 7, 1.
   Ainsi $x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1 = \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}x^i = \sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}x^i 1^{7-i} = (1+x)^7$.
   Donc

$$\begin{aligned} x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1 = 1 &\Leftrightarrow (x+1)^7 = 1 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

   La fonction $x \mapsto x^7$ est en effet une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a donc bien $(x+1)^7 = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1$.
   Finalement $x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1 = 1$ admet une unique solution $x = 0$.
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k 1^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$

EXERCICE 6 (Formule des probabilités totales)**.**
$(B,\overline{B})$ forme un système complet d'événements.
En effet, $B \cap \overline{B} = \emptyset$ et $B \cup \overline{B} = \Omega$.
D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$

II Des exercices classiques

Ces exercices ont pour but de vous entraîner à manipuler les notions vues dans ce chapitre et dans l'autre chapitre sur les probabilités. Essayez donc au maximum de travailler sur ces exercices sans la correction et ne l'utilisez que dans le cas où vous n'avez pas la moindre idée de comment résoudre ces exercices. De plus, le détail des calculs ne figurent pas dans ces corrections, en cas de difficultés, n'hésitez pas à reprendre les corrections des exercices d'application du cours qui sont liés aux calculs qui vous posent problème.

EXERCICE 7. Dans cet exercice, il vous faudra calculer chacunes des 4 probabilités, et conclure en utilisant une calculatrice si besoin.

a. Les deux lancers sont indépendants, pour chaque lancer l'obtention de chaque face du dé est équiprobable. Si besoin n'hésitez pas à revenir au chapitre 5 pour comprendre le calcul de cette probabilité.
Vous devez aboutir à

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

b. Commencez par écrire B en fonction des événements $S_i =$"On obtient 6 au $i-$ème lancer."
La suite est un peu délicate, mais est une astuce classique que l'on a vu plusieurs fois en cours et en TD. Lorsque vous cherchez la probabilité d'une union d'événements qui ne sont pas incompatibles (et qu'ils sont plus que 3 en effet, vous pouvez sinon utiliser la formule de Poincaré), il faut le transformer de la façon suivante :

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{U}_i}$$

En utilisant le fait que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et le fait que les événements S_i sont mutuellement indépendants, vous devriez aboutir à

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52$$

c. De façon analogue au calcul de la probabilité B, commencez par écrire C en fonction des événements $D_i =$"On obtient un double 6 au $i-$ème lancer de deux dés."
Chaque face ayant la même probabilité d'apparaître, montrez que $\mathbb{P}(D_i) = \frac{1}{36}$.
En utilisant la même méthode que précédemment, vous devriez aboutir à

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}49$$

d. Commencez par écrire D en fonction des événements $L_{ij} =$"On obtient le même résultat au lancer i et au lancer j".
Le calcul de la probabilité des événements L_{ij} est un calcul classique que vous devez connaître.
Une fois la valeur du lancer i fixée, il y a une probabilité $\frac{1}{6}$ qu'on obtienne le même résultat avec lancer j.
Utilisez ensuite la formule de Poincaré pour calculer la probabilité de l'événement D.
Vous devriez aboutir à

$$\mathbb{P}(D) = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

EXERCICE 8.

1. Commencez par calculer la probabilité de ne pas avoir obtenu 6 au cours de n lancers. Pour ce faire, posez les événements
   $N =$"On n'a pas obtenu 6 au cours de n lancers"
   $S_i =$"On a obtenu 6 au $i-$ème lancer"
   Exprimez donc l'événement N en fonction des événements S_i.
   En utilisant le fait que les lancers sont mutuellement indépendants, montrer que $\mathbb{P}(N) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   Lorsque vous aurez vu en TP Scilab la boucle while, il est un bon exercice de trouver avec Scilab la valeur de n qui permet de répondre à l'exercice.
   Vous trouverez à la fin $n \geqslant 4$.

2. Je vous laisse répondre à cette question en utilisant votre réponse à la question précédente.
   Vous devrez aboutir à $n \geqslant 25$.

EXERCICE 9.

1. C'est à vous de voir.

2. Commencez par nommer l'événement U ="le joueur 1 gagne".
   Pour calculer la probabilité de l'événement U, utilisez le fait que tous les résultats du lancer de deux dés sont équiprobables.
   Il faut alors compter le nombre de résultats possibles pour le lancer de 2 dés. Pour ce faire, je vous laisse vous reporter à la correction de l'exercice 7.
   Il faut ensuite compter le nombre de résultats possibles qui vérifient l'événement U. Il vous suffit d'exhiber les résultats qui permettent aux joueur 1 de gagner.
   Vous devriez aboutir à $\mathbb{P}(U) = \frac{5}{36}$.
3. Commencez par nommer l'événement D ="le joueur 2 gagne".
   Écrire l'événement D en fonction de deux événements, A qui est associé au premier lancer et B qui est associé au deuxième lancer.
   Utiliser la définition de la probabilité conditionnelle pour exprimer $\mathbb{P}(D)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$.
   Vous pouvez calculer $\mathbb{P}_A(B)$ directement et $\mathbb{P}(A)$ grâce à la question différente.
   Vous trouverez alors $\mathbb{P}(D) = \frac{31}{216} > \frac{5}{36}$.
4. Commencez par nommer l'événement E ="Il y a égalité".
   Vous pouvez calculer la probabilité $\mathbb{P}(E)$ grâce aux questions précédentes.
   Vous trouverez alors $\mathbb{P}(E) = \frac{155}{216}$

EXERCICE 10.

1. La probabilité qu'il y ait deux élèves qui aient leur date d'anniversaire le même jour, lorsque $n = 366$, est de 1.
   En effet, il y a plus d'élèves que de jour, il est donc impossible de choisir un jour différent par élèves.
   Il s'agit plus précisément d'un principe appelé principe des tiroirs.

2. Le professeur est né un jour particulier, il faut donc connaître la probabilité qu'un des n élèves soit né ce jour là.
   Commencer à numéroter les élèves de 1 à n, puis définissez les événements E_i ="L'élève numéro i a la même date d'anniversaire que le professeur".
   Calculer la probabilité des événements E_i.
   Utiliser ensuite la même méthode que pour le calcul de l'événement B dans l'exercice 7 pour montrer que la probabilité que l'un des élèves soit né le même jour que le professeur est $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \approx 8\%$ dans le cas où $n = 30$.

3. Dans le cas de deux élèves, c'est très différent, en effet, la date d'anniversaire n'est pas fixée, contrairement au cas précédent.
   L'événement deux élèves au moins ont leur anniversaire le même jour est l'opposé de l'événement $Diff$ ="Tous les élèves de la classe ont des dates d'anniversaire distinctes".
   On peut donc écrire la probabilité de l'événement recherché en fonction de celle de l'événement $Diff$.
   Il reste alors à calculer la probabilité de l'événement $Diff$. Pour ce faire, on peut dénombrer les configurations d'anniversaires possibles vérifiant l'événement $Diff$ et le nombre totale de configurations d'anniversaire.
   Pour ce qui est du nombre total de configurations d'anniversaires, il y a 365 dates d'anniversaires possibles pour l'élève 1, pour chacune de ces dates d'anniversaire, il y a 365 dates d'anniversaire possible pour l'élève 2 et ainsi de suite.
   Au final, il y a donc $365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^n$ configurations d'anniversaires possibles au total.
   Ensuite, pour dénombrer le nombre de configurations d'anniversaires qui vérifient l'événement $Diff$, on peut choisir n'importe quelle date d'anniversaire pour l'élève 1. Pour chacune de ces dates d'anniversaire, il y a seulement 364 dates d'anniversaire possible pour l'élève 2, celle de l'élève 1 étant interdite. Il y a alors 363 dates d'anniversaire possible pour l'élève 3. Et ainsi de suite.
   Au final, il y a donc $365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}$ configurations d'anniversaires possibles telles que tous les anniversaires soient distincts.
   Montrez alors que la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour est $1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$.
   Encore une fois, n'hésitez pas revenir sur ce calcul lorsque l'on aura fait le TP Scilab à propos de la boucle while.
   En attendant, cette probabilité est plus élevée que 0,5 pour $n \geqslant 23$, que 0,7 pour $n \geqslant 30$ et que 0,9 pour $n \geqslant 41$.

EXERCICE 11.
Définissez les événements
D_n ="On a choisi le dé non pipé"
D_p ="On a choisi le dé pipé"

1. Notez l'événement S_1 ="On obtient 6 au premier lancer".
   Montrer que la famille (D_n,D_p) forment un système complet d'événements.
   Utilisez alors la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité de l'événement S_1.
   Vous devriez aboutir à $\mathbb{P}(S_1) = \frac{1}{3}$.

2. En posant l'événement S_2 ="On obtient 6 au deuxième lancer", remarquez que l'on ne vous demande pas $\mathbb{P}(S_2)$ mais $\mathbb{P}_{S_1}(S_2)$.
   Pour calculer cette probabilité, utiliser la définition de la probabilité conditionnelle.
   Il vous faudra alors calculer $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2)$. Pour ce faire, vous pouvez à nouveau utiliser la formule des probabilités totales.
   ATTENTION. Puisque c'est le sujet de la prochaine question vous n'avez pas le droit de dire que les événements S_1 et S_2 sont indépendants.
   Cependant, lorsque l'on sait si l'on a choisi le dé non pipé ou le dé pipé, les lancers sont indépendants.
   Ainsi $\mathbb{P}_{D_n}(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}_{D_n}(S_1)\mathbb{P}_{D_n}(S_2)$ et $\mathbb{P}_{D_p}(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}_{D_p}(S_1)\mathbb{P}_{D_p}(S_2)$ mais $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2) \neq \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2)$ a priori.
   Vous pouvez alors montrer que $\mathbb{P}_{S_1}(S_2) = \frac{27}{64}$.
3. De même que pour la première question, $\mathbb{P}(S_2) = \frac{1}{3}$.
   Il faut alors conclure en utilisant le lien entre indépendance et probabilité conditionnelle.

EXERCICE 12.
On définit, pour $i \in \mathbb{N}^*$, les événements R_i ="On obtient rouge au $i-$ème lancer".

1. Cette question ressemble beaucoup à l'exercice précédent, je vous laisse donc le reprendre si vous avez du mal à trouver la réponse à cette question.
   Pour ce qui est des réponses, la probabilité d'obtenir rouge au premier lancer est $\frac{4}{9}$ et la probabilité d'obtenir rouge aux deux premiers lancer est $\frac{2}{9}$.
2. Encore une fois, la méthode reste la même bien qu'il y ait plus d'événements. La probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer alors que l'on a obtenu rouge aux deux premiers lancers est de $\frac{5}{9}$.
3. Une façon de répondre à cette question est d'utiliser la formule de Bayes pour exprimer la probabilité p_n en fonction de probabilités dépendant des événements A et R_i en remarquant que $p_n = \mathbb{P}_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i}(A)$.
   De la même façon que précédemment, je vous laisse montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   Un autre point qui peut poser soucis pour le calculer de p_n par la formule de Bayes est le calcul de $\mathbb{P}_A\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i\right)$.
   Pour ce faire, vous pouvez utiliser le fait qu'une fois que l'on sait le dé que l'on utilise, les lancer sont indépendants (se référer au *attention* de l'exercice précédent).
   Au final, vous arriverez à $p_n = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} = \frac{1}{1+2^{1-n}}$.

EXERCICE 13.

1. Compter le nombre de tirages possibles revient à compter le nombre de sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments car on tire les p boules simultanément et sans remise.
   Il y a donc $\binom{n}{p}$ tirages possibles.
2. *a*) Pour déterminer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k, on va compter le nombres de tirages tels que les numéros de toutes les boules tirées soient inférieurs ou égaux à k.
   Ce raisonnement ressemble beaucoup à celui que l'on a utilisé pour la formule du triangle de Pascal, je vous laisse calculer ce nombre de tirages, en cas de doute, n'hésitez pas à vous référer à l'exercice 4.
   Pour conclure, vous arriverez à une probabilité égale à $\frac{k!(n-p)!}{n!(k-p)!}$.

   b) Je vous laisse montrer que la probabilité recherchée est de $\frac{(k-1)!(n-p)!}{p(n!)(k-p)!}$.
3. Il faut utiliser le fait que compter les sous-ensemble de p éléments parmi un ensemble de n élément revient à compter les sous-ensembles à p éléments dont le plus grand élément est k pour k allant de p à n.
   En cas de difficulté, n'hésitez pas à retravailler l'exercice 4.

EXERCICE 14.

1. Il faut montrer que B_k est l'événement toutes les boules sorties sont differentes.
2. Pour calculer $\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$, il suffit de dénombrer le nombre de cas vérifiant l'événement A_{k+1} sur le nombre de cas total sachant que l'événement B_k est vérifié. Ce qui revient à compter le nombre de cas vérifiant A_{k+1} et B_k divisé par le nombre de cas vérifiant B_k.
   Vous devriez aboutir à $\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{k}{n}$.
   Pour trouver une formule pour $\mathbb{P}(B_k)$, vous pouvez utiliser la définition de la probabilité conditionnelle.

Il n'y a alors que la probabilité $\mathbb{P}(A_{k+1} \cap B_k)$ à calculer. Pour ce faire, il est possible de calculer le nombre de cas réalisant l'événement $A_{k+1} \cap B_k$ sur le nombre de cas total.

Il faut compter toutes les combinaisons possibles pour $k+1$ tirages avec remises dans un ensemble à n éléments, il y a donc n choix pour le premier tirages, puis pour chacun de ces choix, il y en a encore n pour le deuxième tirage et ainsi de suite.

Il y a donc n^{k+1} combinaisons possibles de $k+1$ tirages successifs parmi n éléments.

Pour choisir les configurations réalisant l'événement $A_{k+1} \cap B_k$, on commence par compter les configurations possibles pour les k premiers tirages. Les k tirages doivent être distincts, donc, il y a autant de k premiers tirages possibles que de sous-ensembles de k éléments parmi un ensemble à n éléments. Pour chacun de ces tirages, il reste à choisir la valeur du $k+1-$ième tirage. Il faut que cette boule ait été tirée parmi les k premiers tirages, il y a donc k possibilités pour choisir la $k+1-$ième boule.

Pour finir je vous laisse montrer que $\mathbb{P}(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

3. Je vous laisse montrer que l'événement à considérer est $A_k \cap B_{k-1}$ et montrer que sa probabilité est $\frac{(k-1)\binom{n}{k-1}}{n^k}$.

III Pour aller plus loin

Je ne vous laisse que quelques indices pour trouver la réponse à ces exercices ainsi que le résultat final. S'ils vous résistent toujours alors que vous maîtrisez déjà les précédents exercices, n'hésitez pas à venir me voir pour que l'on en discute.

EXERCICE 15.

1. *a)* $u_0 = 1$ et $u_N = 0$

   b) Vous pouvez utiliser la formule des probabilités totales.

   c) Cette question est très délicate.
   Posez $\alpha_a = u_a - u_{a-1}$ et déterminer α_a en fonction de p, q, a et α_0.
   Trouvez une formule pour u_{a+1} en fonction de p, q, a et α_0 que vous pouvez montrer par récurrence.
   Calculez α_0 grâce à la valeur de u_N.
   En déduire la réponse, n'oubliez pas lors du calcul que $1 - \frac{q}{p} = 1$.

   d) Il faut distinguer deux cas particuliers.

   Le reste est moins technique.

EXERCICE 16.
La difficulté de cet exercice vient principalement du fait qu'il utilise des notions de l'indispensable 6. N'hésitez pas à vous y reporter en cas de problème.
Les réponses sont :

1. 216
2. 36
3. 180
4. 120
5. 0 et 6
6. 6

EXERCICE 17.
Cet exercice est assez astucieux. L'astuce est de montrer et d'utiliser le fait que $1 - x \leqslant e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.