Correction du TP 8 : Calcul numérique d'intégrale

Dans ce TP, nous étudierons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2x}$$

Nous allons chercher à calculer de deux façons différentes l'intégrale $\int_1^2 f(x)\ dx$.

EXERCICE 1 (Méthode des rectangles)**.** Comme nous l'avons vu en cours, la méthode des rectangles consiste à utiliser la convergence des sommes de Riemann à pas constant.

1. Rappeler la formule de la somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction f entre 1 et 2, $S_n^{(g)}(f)$ et l'exprimer pour la fonction donnée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} S_n^{(g)}(f) &= \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+k\frac{2-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(n+k\right)} \end{aligned}$$

2. Définir la fonction f en Scilab.

```
function y=f(x)
    y=-1./(2.*x)
endfunction
```

3. Écrire un code permettant de tracer la fonction f en Scilab entre 1 et 2.

```
x=[1 :0.01 :2]
plot2d(x,f(x))
```

4. Écrire un programme permettant de calculer le 100e terme de la somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction f entre 1 et 2. Quel résultat obtenez vous ?

```
S=0
for k=0 :99
    S=S-1/(2*(100+k))
end
disp(S)
```

On obtient -0.3453267

5. Calculer à la main l'intégrale recherchée. Comparez avec le résultat trouvé à la question précédente.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\ dx &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln(x)\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\ln(1)\right) \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

6. Écrire un programme permettant de donner l'indice n à partir duquel la somme de Riemann à pas constant à gauche de la fonction f entre 1 et 2 a convergé à 10^{-4} près. Quel résultant obtenez vous ?

```
n=0
while abs(S+log(2)/2)>10^(-4)
    S=0
    for k=0 :(n-1)
        S=S-1/(2*(100+k))
    end
    n=n+1
end
disp(n)
```

On obtient 1251.

EXERCICE 2 (Méthode Monte Carlo)**.** Le calcul de l'intégrale par méthode Monte Carlo consiste à :

* prendre n valeurs aléatoires $x_1, x_2, \ldots, x_n$
* calculer les valeurs des $f(x_i)$
* en faire la moyenne.

Pour n suffisamment élevée, on trouvera une approximation de l'intégrale que l'on souhaite calculer.

1. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et renvoie un vecteur de n nombres aléatoires compris entre 1 et 2.

```
n=input("Entrez un entier n")
disp(1.+rand(1,n))
```

2. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et renvoie l'approximation par méthode Monte Carlo de l'intégrale recherchée.

```
n=input("Entrez un entier n")
x=1.+rand(1,n)
disp(sum(f(x))/n)
```

3. Pour $n = 1000$ qu'obtenez vous ?

Le résultat est aléatoire, il dépendra de la chance que vous aurez.