Chapitre 10 : Continuité

On considérera dans tout ce chapitre une fonction f définie sur un intervalle I et x_0 un point de I ou une extrémité de I.

I Continuité en un point

I.1 Définition

Définition 1 (Continuité en un point)**.**

On suppose ici que $x_0 \in I$ (ce n'est pas une extrémité).

On dit que f est **continue en** x_0, si :

Définition 2 (Prolongement par continuité)**.**

On suppose ici que x_0 est une extrémité de I.

On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0, si f admet une limite finie en x_0.

Posons $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. On peut alors définir le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f en x_0 par

I.2 Continuité à gauche/droite

Dans cette section, nous allons voir la continuité à droite, la continuité à gauche se traitant de façon analogue.

Définition 3 (Continuité à droite en un point)**.**

On suppose ici que $x_0 \in I$.

On dit que f est **continue à droite en** x_0, si :

Définition 4 (Prolongement par continuité)**.**

On suppose ici que x_0 est une extrémité de I.

On dit que f est **prolongeable par continuité à droite** en x_0, si f admet une limite finie en x_0.

Posons $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. On peut alors définir le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f en x_0 par

Exemple (voir Concours Blanc 1).

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 1. Définir de même la continuité à gauche en x_0 et le prolongement par continuité à gauche en un point.

Proposition 5. f est continue en x_0 si et seulement si f admet une limite finie à gauche en x_0, une limite finie droite en x_0 et qu'elles sont toutes deux égales à $f(x_0)$.

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

EXERCICE 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est continue en 0.

II Continuité sur un intervalle

Définition 6 (Rappel)**.**

Par la suite, on appellera intervalle tout ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant une borne inférieure et une borne supérieure. Un intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

Plus précisément, on note

$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} =]a; b[$ (intervalle ouvert)

$\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\} = [a; b[$ (intervalle semi-ouvert)

$\{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\} =]a; b]$ (intervalle semi-ouvert)

$\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} = [a; b]$ (intervalle fermé ou **segment**)

Définition 7 (Continuité sur un intervalle)**.**

On dit que f est **continue sur l'intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

II.1 Fonctions usuelles

Proposition 8 (Exemples classiques).

II.2 Continuité et opérations

Proposition 9 (Opérations sur les fonctions continues).

- Multiplication par un réel : Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue sur I, alors

  la fonction λf est continue sur I.
- Somme : Si f et g sont des fonctions continues sur I, alors

  la fonction $f + g$ est continue sur I
- Différence : Si f et g sont des fonctions continues sur I, alors

  la fonction $f - g$ est continue sur I
- Produit : Si f et g sont des fonctions continues sur I, alors

  la fonction $f \times g$ est continue sur I
- Quotient : Si f et g sont des fonctions continues sur I et que **g ne s'annule pas sur I**, alors

  la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I

Exemple.

- La fonction $x \mapsto x^2 + \sqrt{x} + \ln(x)$

* La fonction $x \mapsto |x| - \ln(x)$

* La fonction $x \mapsto (2x+1)e^x$

* La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

* La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

II.3 Continuité et composition

Proposition 10.

Composition : Si f est une fonction continue sur I et que g est une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors

$$\text{la fonction } g \circ f \text{ est continue sur } I$$

Exemple.

* La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

* La fonction $x \mapsto e^{x^2+1}$

* La fonction $x \mapsto \sqrt{x^3+2}$

* La fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)}$

EXERCICE 3. Dire si les fonctions suivantes sont continues et si oui, donner l'intervalle sur lequel elles sont continues.

$f : x \mapsto 4x^2 + 1 - \ln(x+2)$ $\qquad$ $g : x \mapsto \frac{2x^4+3x^3-5x-2}{x^2-1}$ $\qquad$ $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

remarque. On peut utiliser la continuité des fonctions pour calculer leurs limites en des points **finis**.

EXERCICE 4. Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to -1} 4x^2 + 1 - \ln(x+2)$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} \frac{2x^4+3x^3-5x-2}{x^2-1}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

II.4 Continuité par morceaux

Définition 11 (Subdivision)**.** Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Un subdivision d'un segment $[a,b]$ est un ensemble de $n+1$ réels a_0, a_1, …, a_n tels que :

* $a_0 = a$ et $a_n = b$
* $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$

Définition 12 (Rappel)**.** Soit f une fonction définie sur I et un intervalle $J \subset I$.

La restriction de f à l'intervalle J est la fonction g définie sur J telle que

$$\forall x \in J,\ g(x) = f(x)$$

Définition 13 (Continuité par morceaux)**.** Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a;b]$.
On dit que f est continue par morceaux sur le segment $[a;b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telles que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i,a_{i+1}]$.

III Applications

III.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 14 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$ et $y \in \mathbb{R}$.

Si :

- $*$ *f est continue sur $[a,b]$*
- $*$ *y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

***Alors :** il existe au moins un élément x dans $[a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

remarque. L'utilisation la plus courante du théorème des valeurs intermédiaire est de prouver l'existence d'un antécédent d'un réel y par une fonction f.
Cela permet donc de montrer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = y$.

ATTENTION. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un antécédent, il ne donne pas la valeur de cet antécédent.
Ne faites pas dire à ce théorème ce qu'il ne dit pas !

EXERCICE 5.

1. Définissons une fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$. Montrer que 0,5 admet au moins un antécédent par f dans $[-1;0]$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.

3. Soit P le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$. Montrer que P admet au moins une racine.

4. Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[1; e]$.

5. Pour chacune des fonctions ci-dessus, écrire un programme Scilab qui permet de tracer son graphe sur le segment proposé (et sur $[-2; 0]$ pour le polynôme P).

Proposition 15 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit f une application sur un intervalle ouvert $]a; b[$ qui admet une limite à droite en a et à gauche en b et soit $y \in \mathbb{R}$.

Si :

* f est continue sur $]a,b[$
* y est **strictement** compris entre $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$

Alors : il existe au moins un élément x dans $]a,b[$ tel que $f(x) = y$.

EXERCICE 6.

Soit P le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$. Montrer que l'équation $P(x) = 2020$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7.

En vous basant sur le théorème 14 et sur la proposition 15, rédigez le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues sur des intervalles semi-ouverts $]a; b]$ ou $[a; b[$.

EXERCICE 8.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'équation $f(x) = -2020$ admet au moins une solution.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x-2}$. Montrer que l'équation $g(x) = 2020$ admet au moins une solution.

III.2 Continuité et images

On peut réécrire le théorème des valeurs intermédiaires d'une autre façon.

Théorème 16 (Théorème des valeurs intermédiaires, version 2)**.**

L'image d'un intervalle par une fonction ***continue*** *est un intervalle.*

ie si f est une fonction continue sur un intervalle I, $f(I)$ est aussi un intervalle.

Exemple.

* Posons $f(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$, $f([1; 2]) =$

* Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(]0; 10]) =$

* Posons $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$, $f(]-2;5[) =$

ATTENTION. Rien ne dit que l'image du segment $[a;b]$ par une fonction continue f est $[f(a);f(b)]$.

Théorème 17. *L'image d'un segment par une fonction* ***continue*** *est un segment.*
Si f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$, l'image $f([a;b])$ est le segment :

Proposition 18.
Une fonction continue sur un segment est bornée (admet un maximum et un minimum) et atteint ses bornes.

III.3 Retour sur la monotonie

Définition 19 (Rappel)**.**
Une fonction f définie sur I est dite **croissante** si pour tout $x < y$, on a .

Une fonction f définie sur I est dite **décroissante** si pour tout $x < y$, on a .

Une fonction f définie sur I est dite **strictement croissante** si pour tout $x < y$, on a .

Une fonction f définie sur I est dite **strictement décroissante** si pour tout $x < y$, on a .

Une fonction f est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Une fonction f est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

EXERCICE 9. Étudier la monotonie des fonctions suivantes :
$f(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$ pour $x \neq -1$ $\quad$ $h(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$

Théorème 20 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $a < b$ des réels (on peut également considéré $-\infty$ au lieu de a et $+\infty$ au lieu de b).*
Si f est une fonction ***monotone*** *définie sur $]a;b[$,*

alors f admet des limites à gauche et à droite en tous points de $]a;b[$.

ATTENTION. Rien ne dit que ces deux limites soient égales, f n'admet donc pas nécessairement de limite !

remarque. Si f est croissante et $x_0 \in]a;b[$, on a alors plus précisément

EXERCICE 10. Si f est décroissante écrivez l'inégalité entre $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $f(x_0)$.

Théorème 21 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $a < b$ des réels (on peut également considéré $-\infty$ au lieu de a et $+\infty$ au lieu de b.*

*Si f est une fonction **monotone** définie sur $]a;b[$,*

alors f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

De plus, si f est croissante :
- *Si f est majorée, f admet une limite finie à gauche en b.*
- *Si f n'est pas majorée,*
- *Si f est minorée, f admet une limite finie à droite en a.*
- *Si f n'est pas minorée,*

EXERCICE 11. Établir le comportement de f en a et b dans le cas où f est décroissante.

III.4 Continuité, monotonie et images

Proposition 22 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit f une fonction définie sur un segment $[a;b]$ et $y \in \mathbb{R}$.

Si :
- f est continue sur $[a,b]$
- f est strictement monotone sur $[a;b]$
- y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors : il existe un unique élément x dans $[a,b]$ tel que $f(x) = y$.

EXERCICE 12. Réécrire de la même façon que précédemment cette proposition pour les intervalles ouverts et semi-ouverts

EXERCICE 13.

1. Montrer que l'équation $x^3 = x^2 + 1$ admet une unique solution dans $[1; +\infty[$.
2. Notons α cette solution. Montrer que $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

EXERCICE 14.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x = x + 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 23 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, version 2)**.** Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.

monotonie de f \ I	$[a;b]$	$[a;b[$	$]a;b]$	$]a;b[$
strictement croissante	$[f(a);f(b)]$	$[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$
strictement décroissante	$[f(b);f(a)]$	$[\lim\limits_{x\to b^-} f(x); f(a)[$	$]f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)]$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

Théorème 24 (Théorème de la bijection)**.** *Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.*

On peut donc définir $f^{-1} : f(I) \to I$ sa bijection réciproque.

*f^{-1} est alors continue sur $f(I)$, monotone, de **même** monotonie que f*

Exemple.

Proposition 25.

Soit f une bijection de I sur $f(I)$.

Le graphe de la réciproque f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $y = x$.

EXERCICE 15. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Montrer que f définit une bijection de $[1; 2]$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. En déduire que l'équation $\frac{e^x-1}{x} = 1$ admet une unique solution dans $[1; 2]$.
3. Montrer que l'équation $\frac{e^x-1}{x} = 1$ admet une unique solution dans $]0; 1]$.

EXERCICE 16. Soit g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0$, $g(x) = 1 - x^2 e^{2x-1}$.

1. Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
3. Notons α cette solution. Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

remarque. Cette méthode est à la base d'un algorithme de recherche de zéro d'une fonction : la méthode par dichotomie que nous verrons en TP Scilab.

EXERCICE 17. On considère la fonction définie par $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = -n$ possède une unique solution qui sera notée x_n.
3. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point, à gauche ou à droite, en utilisant des calculs de limite
* Connaître la continuité des fonctions usuelles
* Savoir utiliser les opérations entre les fonctions et la continuité en un point pour pouvoir montrer qu'une fonction est continue.
* Savoir reconnaître les cas d'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.
* Savoir utiliser la bonne variante du théorème des valeurs intermédiaires en énonçant toutes les hypothèses.
* Savoir prouver la monotonie d'une fonction.
* Connaître et savoir utiliser le théorème de la limite monotone.
* Savoir utiliser la continuité et la monotonie d'une fonction pour montrer qu'une fonction est une bijection.
* Connaître les propriétés de la fonction f^{-1} dans le cadre d'application du théorème de la bijection sur la fonction f.