

Chapitre 11 : Probabilité sur un univers infini

I Retour sur le cas fini (Rappel)

Définition 1. On considère une expérience aléatoire.

- * L'**univers**, noté Ω dans ce chapitre, désigne l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.
- * Un **événement** est un ensemble de résultats d'une expérience aléatoire, souvent caractérisés par une même propriété.

Dans le cas fini, un événement est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

- * Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ qui vérifie :

1. Pour tous événements **incompatibles** A et B ,

2.

Exemple. * On lance un dé à six faces, on note le résultat obtenu.

$\Omega =$

est un événement, il correspond à

est un événement, il correspond à

Plus généralement, il y a événements.

- * On lance un dé à six faces trois fois de suite et on note le résultat obtenu.

$\Omega =$

Ω contient éléments.

est un événement, il correspond à

est un événement, il correspond à

est un événement, il correspond à

Plus généralement, il y a événements.

II Passage au cas infini

Exemple. On lance un dé à six faces une infinité de fois.

$\Omega =$

est un événement, il correspond à

Exemple. On regarde le cours d'une action que l'on vend à un instant t (le cours d'une action n'est pas à strictement parler une expérience aléatoire, on peut cependant la considérer comme un système chaotique et lui appliquer ainsi le formalisme des probabilités).

$\Omega =$

On a acheté l'action au prix x_0 . L'événement : "la vente de l'action dégage un bénéfice" s'écrit

Exemple. Regardons plus généralement le cours d'une action créée au temps t_0 , en supposant que l'entreprise ne fasse pas faillite et reste cotée en bourse.

$\Omega =$

L'événement : "le cours de l'action ne fait qu'augmenter" s'écrit

remarque. Il est impossible de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ni sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.

III Définir un événement

Notation. On note $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles (ou plus tard d'événements) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

Définition 2 (Rappel). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles et $N \in \mathbb{N}$ un entier.

* On note $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N =$.

Si les A_1, A_2, \dots, A_N sont des événements, $\bigcup_{n=1}^N A_n$ est réalisé si et seulement si A_1 **ou** A_2 **ou** \dots **ou** A_N est réalisé, c'est à dire, si **au moins un** des A_1, A_2, \dots, A_N est réalisé.

* On note $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N =$.

Si les A_1, A_2, \dots, A_N sont des événements, $\bigcap_{n=1}^N A_n$ est réalisé si et seulement si A_1 **et** A_2 **et** \dots **et** A_N est réalisé, c'est à dire, si **tous les** A_1, A_2, \dots, A_N sont réalisés.

Exemple. On lancer un dé à six faces une infinité de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "On obtient six au i -ème lancer".

* L'événement "On obtient au moins un six lors des 5 premiers lancers" s'écrit :

* L'événement "On obtient jamais de six lors des 15 premiers lancers" s'écrit :

* L'événement $\bigcup_{n=1}^{32} A_n$ signifie :

* L'événement $\bigcap_{n=1}^N A_n$ signifie :

Définition 3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles.

* On note l'union infinie de tous les éléments de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots =$.

Si les A_n sont des événements, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si **au moins un** des A_n est réalisé.

* On note l'intersection infinie de tous les éléments de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots =$.

Si les A_n sont des événements, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si **tous les** A_n sont réalisés.

Exemple. On lancer un dé à six faces une infinité de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "On obtient six au i -ème lancer".

* L'événement "On obtient au moins un six" s'écrit :

* L'événement "On obtient jamais de six" s'écrit :

Définition 4. Une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω est un ensemble \mathcal{A} non vide de parties de Ω qui vérifie :

1.

2. Soit une suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}$, on a

Définition 5. Soit \mathcal{A} une tribu, on dit que (Ω, \mathcal{A}) est un espace probablisable.

\mathcal{A} est alors l'**ensemble des événements** de cet espace probablisable.

Un événement est alors un élément de \mathcal{A} .

Exemple. * $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. Quand Ω est fini, on choisit le plus souvent $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

* Si A est un événement, alors \bar{A} est un événement.

* Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un événement.

* Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un événement.

EXERCICE 1. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façon indépendante.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement : "on obtient un 6 au i -ème lancer".

1. Écrire l'événement B_N : "On a obtenu que des 6 au moins jusqu'au N -ième lancer" en fonction des événements A_i .
2. Écrire l'événement C_n : "On n'a obtenu 6 qu'au n -ième lancer" en fonction des événements A_i .
3. Écrire l'événement D : "On a obtenu au moins un 6" en fonction des événements A_i .

IV Définir une probabilité

Définition 6. Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablisable.

Une **probabilité** sur (Ω, \mathcal{A}) est une application \mathbb{P} de \mathcal{A} dans $[0; 1]$ telle que :

- 1.
2. pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'événements **deux à deux incompatibles**,

la suite $\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie ℓ et

(on appelle cette propriété la σ -additivité)

remarque. Par la suite, nous fixons un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

EXERCICE 2. Reprenons les notations de l'exercice précédent.

1. Calculer la probabilité de B_N pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité de D .

Définition 7. Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablisable et \mathbb{P} une probabilité défini sur cette espace probablisable.

- * \mathbb{P} associe à tous les événements $A \in \mathcal{A}$ un réel de $[0; 1]$ $\mathbb{P}(A)$ appelé la **probabilité** de A .
- * $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé un **espace probablisé**.
- * Si pour un événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un événement **presque sûr**.
- * Si pour un événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un événement **négligeable**.

EXERCICE 3. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façons indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "on obtient un 6 pour la première fois lors du n -ième lancer".

1. Calculer la probabilité des événements A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Écrire l'événement A : "Obtenir au moins un six" avec les événements A_n .
3. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles.
4. Montrer que l'événement A est presque sûr.

V Théorème de la limite monotone

Définition 8. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements.

- * On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **croissante** si :

"Pour tout n entier, si A_n est réalisé, alors A_{n+1} est réalisé."

- * On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **décroissante** si :

"Pour tout n entier, si A_{n+1} est réalisé, alors A_n est réalisé."

EXERCICE 4. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façons indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n l'événement : "On obtient au moins un 6 lors des n premiers lancers", B_n l'événement : "On obtient 6 au n -ième lancer" et C_n l'événement : "On obtient 6 aux n premiers lancers".

Dire si les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont croissantes, décroissantes ou aucune des deux.

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone).

- * Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements de \mathcal{A} , alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et :

- * Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements de \mathcal{A} , alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et :

EXERCICE 5. Reprenons les notations de l'exercice précédent.

Calculer les probabilités des événements A : "On obtient au moins un 6" et B : "On n'obtient que des 6".

EXERCICE 6. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois de façon indépendante.

Montrer que l'événement A : "On obtient au moins un pile" est presque sûr et que l'événement B : "On obtient aucun pile" est négligeable.

Proposition 10 (Corollaire du théorème de la limite monotone).

* Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de \mathcal{A} , la suite $\left(\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et :

* Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de \mathcal{A} , la suite $\left(\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et :

EXERCICE 7. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façon indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n l'événement : "le résultat du n -ième lancer est un 6".

On définit l'événement A : "On obtient que des 6" et l'événement B : "On obtient au moins un 6".

1. Écrire A et B en fonction des A_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right)$ et $\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

VI Généralisation des probabilités conditionnelles

Définition 11. On définit comme dans les chapitres précédents, pour deux événements $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A par la formule :

On peut alors utiliser les formules que nous avons vu dans les chapitres précédents.

Proposition 12 (Formule des probabilités composées).

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$.

Proposition 13 (Formule de Bayes).

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

VII Généralisation de la formule des probabilités totales

Définition 14 (Système complet d'événements).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de \mathcal{A} . Un système $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements si :

- 1.

2. Les événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

C'est-à-dire, pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$, tels que $i \neq j$, on a

Exemple.

Théorème 15 (Formule des probabilités totales). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$, les suites $\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(B \cap A_n) \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B) \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers des limites finies.

On note respectivement ces limites $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B)$, on a alors :

VIII Généralisation de l'indépendance mutuelle

Définition 16 (Indépendance mutuelle d'une suite d'événements). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de \mathcal{A} .

Ces événements sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie non vide I de \mathbb{N}^* .

Exemple. On effectue une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "On tire la boule 1 au n -ième tirage."

Les événements A_n sont mutuellement indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement : "On tire la boule 1 pour la première fois au n -ième tirage."

Les événements B_n ne sont pas mutuellement indépendants.

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

- * Savoir la signification des unions et intersections infinies. Savoir écrire un événements comme une union ou intersection infinie si nécessaire.
- * Connaître la définition de la croissance et décroissance d'une suite d'événements.
- * Connaître le théorème de la limite monotone et son corollaire. Savoir les appliquer pour calculer une probabilité.
- * Connaître les généralisations des notions de probabilité conditionnelle et indépendance mutuelle et de la formule des probabilités composées et probabilités totales aux probabilités infinies.