Chapitre 11 : Probabilité sur un univers infini

I Retour sur le cas fini (Rappel)

Définition 1. On considère une expérience aléatoire.

* L'**univers**, noté Ω dans ce chapitre, désigne l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.
* Un **événement** est un ensemble de résultats d'une expérience aléatoire, souvent caractérisés par une même propriété.

  Dans le cas fini, un événement est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
* Une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui vérifie :

  1. Pour tous événements **incompatibles** A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
  2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Exemple. * On lance un dé à six faces, on note le résultat obtenu.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A = \{2\}$ est un événement, il correspond à on obtient 2.

$B = \{1; 3; 5\}$ est un événement, il correspond à on obtient un résultat impair.

Plus généralement, il y a $2^6 = 64$ événements.

* On lance un dé à six faces trois fois de suite et on note le résultat obtenu.

$\Omega = \{(i; j)|i,j \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}\}$

Ω contient 6^3 éléments.

$A = \{(2; 3; 2)\}$ est un événement, il correspond à on obtient 2, puis 3, puis 2.

$B = \{(5; 5; 5); (6; 6; 6)\}$ est un événement, il correspond à on obtient trois fois 5 ou trois fois 6.

$C = \{(5; 5; 5); (5; 5; 6); (5; 6; 5); (6; 5; 5); (6; 6; 5); (6; 5; 6); (5; 6; 6); (6; 6; 6)\}$

est un événement, il correspond à on obtient seulement des 5 ou des 6.

Plus généralement, il y a 2^{6^3} événements.

II Passage au cas infini

Exemple. On lance un dé à six faces une infinité de fois.

$\Omega = \{(u_n)_{n\geqslant 0}|\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}\}$

$A = \{(1; 2; 1; 2; 1; 2; \dots)\}$ est un événement, il correspond à on obtient successivement 1 et 2 en commençant par 1.

Exemple. On regarde le cours d'une action que l'on vend à un instant t (le cours d'une action n'est pas à strictement parler une expérience aléatoire, on peut cependant la considérer comme un système chaotique et lui appliquer ainsi le formalisme des probabilités).

$\Omega = \mathbb{R}_+$

On a acheté l'action au prix x_0. L'événement : "la vente de l'action dégage un bénéfice" s'écrit $]x_0; +\infty[$.

Exemple. Regardons plus généralement le cours d'une action créée au temps t_0, en supposant que l'entreprise ne fasse pas faillite et reste cotée en bourse.

$\Omega = \{f|f : [t_0; +\infty[\to \mathbb{R}_+\}$

L'événement : "le cours de l'action ne fait qu'augmenter" s'écrit $\{f \in \Omega|f \textit{ est croissante}\}$.

remarque. Il est impossible de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ni sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.

III Définir un événement

Notation. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles (ou plus tard d'événements) A_1, A_2, …, A_n, …

Définition 2 (Rappel)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles et $N \in \mathbb{N}$ un entier.

* On note $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$.

  Si les A_1, A_2, ..., A_N sont des événements, $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ est réalisé si et seulement si A_1 **ou** A_2 **ou** ...**ou** A_N est réalisé, c'est à dire, si **au moins un** des A_1, A_2, ..., A_N est réalisé.

* On note $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$.

  Si les A_1, A_2, ..., A_N sont des événements, $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ est réalisé si et seulement si A_1 **et** A_2 **et** ...**et** A_N est réalisé, c'est à dire, si **tous les** A_1, A_2, ..., A_N sont réalisés.

Exemple. On lancer un dé à six faces une infinité de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "On obtient six au i-ème lancer".

* L'événement "On obtient au moins un six lors des 5 premiers lancers" s'écrit :

$$\bigcup_{n=1}^{5} A_n$$

* L'événement "On obtient jamais de six lors des 15 premiers lancers" s'écrit :

$$\bigcap_{n=1}^{15} \bar{A}_n$$

* L'événement $\bigcup_{n=1}^{32} A_n$ signifie : "On obtient au moins un six lors des 32 premiers lancers"

* L'événement $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ signifie : "On obtient six à tous les lancers lors des N premiers lancers"

Définition 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles.

* On note l'union infinie de tous les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

  Si les A_n sont des événements, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si **au moins un** des A_n est réalisé.

* On note l'intersection infinie de tous les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

  Si les A_n sont des événements, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si **tous les** A_n sont réalisés.

Exemple. On lancer un dé à six faces une infinité de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "On obtient six au i-ème lancer".

* L'événement "On obtient au moins un six" s'écrit :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

* L'événement "On obtient jamais de six" s'écrit :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bar{A}_n$$

Définition 4. Une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ non vide de parties de Ω qui vérifie :

1. $$\forall A \in \mathcal{A},\ \bar{A} \in \mathcal{A}$$

2. Soit une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Définition 5. Soit $\mathcal{A}$ une tribu, on dit que $(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

$\mathcal{A}$ est alors l'**ensemble des événements** de cet espace probabilisable.

Un événement est alors un élément de $\mathcal{A}$.

Exemple.
* $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. Quand Ω est fini, on choisit le plus souvent $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.
* Si A est un événement, alors $\bar{A}$ est un événement.
* Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un événement.
* Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un événement.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements.

Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}$ est un événement.

D'où $\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}}$ est un événement.

Finalement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un événement.

EXERCICE 1. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façon indépendante.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement : "on obtient un 6 au i-ème lancer".

1. Écrire l'événement B_N : "On a obtenu que des 6 au moins jusqu'au N-ième lancer" en fonction des événements A_i.
2. Écrire l'événement C_n : "On n'a obtenu 6 qu'au n-ième lancer" en fonction des événements A_i.
3. Écrire l'événement D : "On a obtenu au moins un 6" en fonction des événements A_i.

IV Définir une probabilité

Définition 6. Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable.

Une **probabilité** sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0;1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements **deux à deux incompatibles**,

   la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie ℓ et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \ell$$

   (on appelle cette propriété la σ-additivité)

remarque. Par la suite, nous fixons un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

EXERCICE 2. Reprenons les notations de l'exercice précédent.

1. Calculer la probabilité de B_N pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité de D.

Définition 7. Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable et $\mathbb{P}$ une probabilité défini sur cette espace probabilisable.

* $\mathbb{P}$ associe à tous les événements $A \in \mathcal{A}$ un réel de $[0;1]$ $\mathbb{P}(A)$ appelé la **probabilité** de A.
* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ est appelé un **espace probabilisé**.
* Si pour un événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un événement **presque sûr**.
* Si pour un événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un événement **négligeable**.

EXERCICE 3. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façons indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "on obtient un 6 pour la première fois lors du n-ième lancer".

1. Calculer la probabilité des événements A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Écrire l'événement A : "Obtenir au moins un six" avec les événements A_n.
3. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles.
4. Montrer que l'événement A est presque sûr.

V Théorème de la limite monotone

Définition 8. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements.

* On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset A_{n+1}$$

"Pour tout n entier, si A_n est réalisé, alors A_{n+1} est réalisé."

* On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$$

"Pour tout n entier, si A_{n+1} est réalisé, alors A_n est réalisé."

EXERCICE 4. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façons indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n l'événement : "On obtient au moins un 6 lors des n premiers lancers", B_n l'événement : "On obtient 6 au n-ième lancer" et C_n l'événement : "On obtient 6 aux n premiers lancers".

Dire si les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont croissantes, décroissantes ou aucune des deux.

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)**.**

* *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

* *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

EXERCICE 5. Reprenons les notations de l'exercice précédent.

Calculer les probabilités des événements A : "On obtient au moins un 6" et B : "On n'obtient que des 6".

EXERCICE 6. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois de façon indépendante.

Montrer que l'événement A :"On obtient au moins un pile" est presque sûr et que l'événement B :"On obtient aucun pile" est négligeable.

Proposition 10 (Corollaire du théorème de la limite monotone)**.**

* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, la suite $\left(\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\Big)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, la suite $\left(\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\Big)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

EXERCICE 7. On lance un dé à six faces une infinité de fois de façon indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n l'événement : "le résultat du n-ième lancer est un 6".

On définit l'événement A : "On obtient que des 6" et l'événement B : "On obtient au moins un 6".

1. Écrire A et B en fonction des A_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

VI Généralisation des probabilités conditionnelles

Définition 11. On définit comme dans les chapitres précédents, pour deux événements A, $B \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A par la formule :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B}{\mathbb{P}(A)}$$

On peut alors utiliser les formules que nous avons vu dans les chapitres précédents.

Proposition 12 (Formule des probabilités composées)**.**
Soient A_1, A_2, ..., A_n des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Proposition 13 (Formule de Bayes)**.**
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

VII Généralisation de la formule des probabilités totales

Définition 14 (Système complet d'événements)**.**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Un système $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements si :

1. $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$
2. Les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

   C'est-à-dire, pour tout i, $j \in \mathbb{N}^*$, tels que $i \neq j$, on a

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

Exemple. On lance un dé à six faces une infinité de fois, les événements A_n : "On obtient 6 pour la première fois au n-ième lancer" forment un système complet d'événements.

Théorème 15 (Formule des probabilités totales). *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.*

Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$, les suites $\left(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B\cap A_n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers des limites finies.

On note respectivement ces limites $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$, on a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

VIII Généralisation de l'indépendance mutuelle

Définition 16 (Indépendance mutuelle d'une suite d'événements). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

Ces événements sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie non vide I de $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple. On effectue une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "On tire la boule 1 au n-ième tirage."

Les événements A_n sont mutuellement indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement : "On tire la boule 1 pour la première fois au n-ième tirage."

Les événements B_n ne sont pas mutuellement indépendants.

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Savoir la signification des unions et intersections infinies. Savoir écrire un événements comme une union ou intersection infinie si nécessaire.
* Connaître la définition de la croissance et décroissance d'une suite d'événements.
* Connaître le théorème de la limite monotone et son corollaire. Savoir les appliquer pour calculer une probabilité.
* Connaître les généralisations des notions de probabilité conditionnelle et indépendance mutuelle et de la formule des probabilités composées et probabilités totales aux probabilités infinies.