Chapitre 12 : Séries numériques

I Définition

I.1 Mathématiques

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique. On appelle **série numérique de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

On appelle S_n la **somme partielle** d'indice n de la série numérique.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite constante égale à 1. On considère la série $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général u_n.

On a alors $S_0 = 1$, $S_1 = 2$, $S_2 = 3$.

Plus généralement, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$.

remarque. En utilisant les notations précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la série $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général u_n.

On a alors $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$.

Plus généralement, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n =$ 1 si n est pair et 0 sinon.

Définition 2. On a précédemment défini les séries numériques comme commençant en $k = 0$.

On peut étendre cette définition à des suites numériques $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définies à partir d'un rang n_0 quelconque.

Dans ce cas, la série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Généralement, c'est le cas de suites qui ne sont pas définies avant n_0.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la série $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général u_n.

On a alors $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{11}{6}$.

Plus généralement, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Il s'agit d'une série classique qui s'appelle la série harmonique.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geqslant 5}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n-5}$ pour tout $n \geqslant 5$. On considère la série $(S_n)_{n\geqslant 5}$ de terme général u_n.

On a alors $S_5 = 0$, $S_6 = 1$, $S_7 = 1 + \sqrt{2}$.

Plus généralement, on a $\forall n \geqslant 5$, $S_n = \sum\limits_{k=5}^{n} \sqrt{k-5}$.

I.2 Scilab

En TP nous avons vu deux façons différentes de calculer le $n-$ième terme d'une série numérique de terme général u_n avec Scilab.

Définition 3 (En utilisant une boucle for).

On commence par poser $S=u_0$.

Puis on utilise une boucle for pour k de 1 à n.

On implémente $S=S+u_k$

On n'oublie pas le end pour finir la boucle for.

On termine en renvoyant le résultat ainsi obtenu par disp(S).

Une autre façon de faire est :

On commence par poser S=0.

Puis on utilise une boucle for pour k de 0 à n.

On implémente $S=S+u_k$

On n'oublie pas le end pour finir la boucle for.

On termine en renvoyant le résultat ainsi obtenu par disp(S).

EXERCICE 1.

1. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui renvoie le $n-$ième terme de la série numérique de terme général u_k défini par $u_k = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui renvoie le $n-$ième terme de la série numérique de terme général u_k défini par $u_k = \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 4 (En utilisant la fonction sum).

On commence par poser N le vecteur des entiers de 0 jusqu'à n : N=[0 :n].

On pose alors S comme la somme des termes d'un vecteur constitué des termes généraux u_n que l'on exprime à l'aide du vecteur N.

On termine en renvoyant le résultat ainsi obtenu par disp(S).

EXERCICE 2. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la fonction sum

remarque. Si on veut tracer les termes de la série numérique, on peut les calculer un à un, on a besoin du vecteur $[S_0,S_1,S_2,\dots,S_n]$.

On peut alors utiliser les programmes précédents pour calculer un à un chacun des termes, ou alors utiliser la fonction suivante.

Définition 5. Prenons un vecteur $v=[v_0,v_1,v_2,\dots,v_n]$, `cumsum(v)` est le vecteur des sommes cumulées des éléments de v, *ie* le vecteur $[v_0,v_0+v_1,v_0+v_1+v_2,\dots,v_0+v_1+\cdots+v_n]$.

Exemple. `cumsum([1 :4])` $\to$ [1,3,6,10]

`cumsum([1 :4].^2)` $\to$ [1,5,14,30]

`cumsum(1./[1 :4])` $\to$ [1,1.5,1.83333333,2.08333333]

EXERCICE 3. Reprendre les séries de l'exercice précédent et rédigez un programme demandant à l'utilisateur de rentrer un entier n et qui renvoie le vecteur des n premiers termes de ces séries numériques.

II Nature des séries numériques

remarque. Comme dans le cas des suites, déterminer la nature d'une série revient à montrer si elle est convergente ou divergente.

II.1 Série convergente

Définition 6. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle cette limite la **somme** de la série, on la note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

remarque. Si la série de terme général converge, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Exemple. Considérons la série numérique de terme général la suite constante $u_n = 0$.

On trouve pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = 0$.

La série de terme général u_n converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 (Paradoxe de Zénon)**.**

"Quand des masses égales se déplacent à même vitesse, les unes dans un sens, les autres dans le sens contraire, le long de masses égales et qui sont immobiles, le temps que mettent les premières à traverser les masses immobiles est égal au double du même temps."

Autrement dit Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que le caillou puisse atteindre l'arbre, il doit traverser la première moitié des huit mètres. Il faut un certain temps, non nul, à cette pierre pour se déplacer sur cette distance. Ensuite, il lui reste encore quatre mètres à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, deux mètres, ce qui lui prend un certain temps. Puis la pierre avance d'un mètre de plus, progresse après d'un demi-mètre et encore d'un quart, et ainsi de suite ad infinitum et à chaque fois avec un temps non nul. Zénon en conclut que la pierre ne pourra pas frapper l'arbre, puisqu'il faudrait pour cela que soit franchie effectivement une série infinie d'étapes, ce qui est impossible.

Expliquez pourquoi Zénon avait tort.

remarque. Comme précédemment, il est possible de définir la convergence d'une série de terme général commençant en n_0 et non en 0.

Si cette série converge, sa somme est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Exemple. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

II.2 Série divergente

Définition 7. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Peu importe si la suite des sommes partielles admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

Exemple. La série de terme général la suite constante égale à 1 est divergente.

Exemple. La série de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Proposition 8.

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

remarque. Pour montrer que la série de terme général $(-1)^n$ diverge, il suffit de dire que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

ATTENTION. La réciproque est **FAUSSE**. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, rien ne dit que la série de terme général u_n converge !

Exemple. La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Pour le montrer, vous pouvez reprendre l'exercice 11 du TD6. Nous verrons également une autre preuve dans un prochain chapitre.

II.3 Scilab

Nous allons voir ici un algorithme permettant de trouver le rang à partir duquel une série de terme général u_n (ou une suite) a atteint sa limite à une valeur ϵ près.

Dans les questions sur vous pourrez trouver au concours, cette question fait presque systématiquement suite au calcul de la limite de la série (ou de la suite) en utilisant des techniques vues dans ce chapitre ou au chapitre 6.

On suppose donc connue la limite ℓ de la série (ou de la suite).

Définition 9.

On commence par poser S=u_0.

On pose un compteur n=0.

Puis on utilise une boucle while avec la condition : abs(S-ℓ)>ε.

On implémente S=S+u_{n+1}

Et le compteur n=n+1

On n'oublie pas le end pour finir la boucle while.

On termine en renvoyant l'indice recherché par disp(n).

Vous pouvez également (et si vous avez besoin de ce genre d'algorithme dans le cadre professionnel, je vous le conseil fortement) renvoyer le résultat par disp(S) afin de vérifier que l'algorithme a bien convergé correctement et que vous n'avez pas commis d'erreur.

EXERCICE 5.

1. Écrire un programme Scilab donnant l'indice à partir duquel la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ atteint sa limite à 10^{-6} près.
2. Écrire un programme Scilab donnant l'indice à partir duquel la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ dépasse la valeur 10^6.

III Probabilités

III.1 Convergence absolue

Définition 10. Considérons une série de terme générale u_n, on dit que cette série **converge absolument** (ou est **absolument convergente**) si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Proposition 11.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

EXERCICE 6.

1. Montrer que, pour tout $n > 1$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)}{n^2}$ converge.

ATTENTION. La réciproque est fausse, si une série est convergente, rien ne dit qu'elle soit absolument convergente

Exemple. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente

remarque. En première année, la notion de convergence absolue est principalement utilisée pour définir l'espérance d'un variable aléatoire dont nous discuterons dans un chapitre ultérieur.

III.2 Probabilités sur un univers infini

Revenons sur les définitions et propositions du chapitre 11.

Définition 12. Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable.

Une **probabilité** sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0;1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega)=1$
2. pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements **deux à deux incompatibles**,

   la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

   (on appelle cette propriété la σ-additivité)

Théorème 13 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.*

Pour tout événement $B\in\mathcal{A}$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(B\cap A_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ convergent et on a alors :

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(B\cap A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

IV Séries numériques usuelles

IV.1 Séries polynomiales

Proposition 14 (Rappel)**.**

$\sum\limits_{k=0}^{n}1=n+1$

$\sum\limits_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum\limits_{k=0}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

remarque. Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}n^2$ divergent.

IV.2 Séries géométriques et dérivées

Proposition 15 (Séries géométriques)**.** Soit $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^n}{1-q}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$$

Exemple.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{1}{\frac{6}{5}}=\frac{5}{6}$

$\sum\limits_{n\geqslant 0}e^n$ est divergente

EXERCICE 7. Montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} q^n$ converge et que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$$

Proposition 16 (Séries géométriques dérivées)**.** Soit $q \in \mathbb{R}$,

La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

La série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Exemple.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{e-1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$

$\sum\limits_{n \geqslant 1} n2^{n-1}$ est divergente

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{(-3)^{n-2}} = \frac{2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{2}{\frac{64}{27}} = 2 \times \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$

IV.3 Exponentielle

Définition 17 (Série exponentielle)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$,

La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge, quelle que soit la valeur de x et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exemple.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

V Opérations sur les séries numériques

V.1 Relation de Chasles

Proposition 18 (Relation de Chasles)**.**

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ une série convergente. Alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - (u_0 + \cdots + u_{n_0-1})$$

EXERCICE 8.

Déterminer la nature de chacune des séries suivantes. Et donner leur limite si elle existe.

$$\sum_{n \geqslant 4} n7^{n-1} \qquad \sum_{n \geqslant 2} \frac{n}{4^{n-1}} \qquad \sum_{n \geqslant 4} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

V.2 Combinaisons linéaires

Proposition 19 (Produit par un scalaire)**.** Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature.

Si l'une d'elle converge,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exemple.

$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\frac{n}{2^{n-1}}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

$\sum_{n\geqslant 2} \frac{n(n-1)}{3^n} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}$

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n(n-1)}{3^n}$ est convergente et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} = \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^{n-2}} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{3}{4}$

Proposition 20 (Somme de séries **convergentes**)**.** Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ des séries **convergentes**, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

EXERCICE 9. Donner la nature des séries suivantes et calculer leur limite si elle existe.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n + 1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n + 1}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$$

ATTENTION. Si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont divergentes, rien ne dit que $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ diverge !

Exemple. On a vu précédemment que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

Par multiplication par un scalaire, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{n}$ est également une série divergente.

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right)$ est la série nulle $\sum_{n\geqslant 1} 0$.

La série somme est donc une série convergente.

V.3 Lien entre suites et séries

Proposition 21 (Télescopage)**.**

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

remarque. Pour une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ est une somme télescopique.

EXERCICE 10.

1. Déterminez deux réels a et b tels que : $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculez sa somme.

Bilan

À la fin de ce chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Connaître la définition d'une série et d'une somme partielle.
* Savoir calculer le n-ième terme d'une série numérique à l'aide d'un programme Scilab.
* Savoir montrer qu'une série est convergente ou divergente et calculer sa somme dans le cas convergent en utilisant les outils vus sur les limites de suite.
* Savoir trouver l'indice à partir duquel une suite ou une série atteint sa limite à une erreur fixée près à l'aide d'un programme Scilab.
* Connaître la définition de la convergence absolue.
* Connaître par cœur les critères de convergence et les sommes des séries numériques usuelles.
* Connaître les propriétés des opérations sur les séries numériques et savoir les utiliser pour calculer leur somme en cas de convergence.
* Savoir reconnaître un télescopage.