Chapitre 13 : Dérivation

Durant ce chapitre, on considérera une fonction réelle f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$ n'étant pas une extrémité de I.

I Dérivation en un point

I.1 Taux d'accroissement

remarque. Prenons M le point de coordonnées $(x,f(x))$ et M_0 le point de coordonnées $(x_0,f(x_0))$.

Distance verticale entre M_0 et M : $f(x) - f(x_0)$

Distance horizontale entre M_0 et M : $x - x_0$

Équation de la corde entre M_0 et M : $Y = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(X - x_0) + f(x_0)$

Définition 1. Le **taux d'accroissement** de la fonction f au point x_0 est la fonction :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition 2 (Dérivation en un point)**.**
On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si son taux d'accroissement admet une limite finie en x_0.

Cette limite est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 ou la **dérivée** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ATTENTION. Cette limite n'existe pas toujours.

Exemple. $f : x \mapsto |x|$ est dérivable en 1, -1, mais pas en 0

Regardons la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

Pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{|x| - |1|}{x - 1}\\ &= \frac{x-1}{x-1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$.

La fonction f est donc dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Regardons la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.

Pour tout $x < 0$ et $x \neq -1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{|x| - |-1|}{x - (-1)}\\ &= \frac{-x-1}{x+1}\\ &= -\frac{x+1}{x+1}\\ &= -1\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -1$.

La fonction f est donc dérivable en -1 et $f'(-1) = -1$.

Pour ce qui est de la dérivabilité en 0, retenez le, nous en rediscuterons par la suite, la fonction f admet un point anguleux en 0.

Tapez sous Scilab

```
clf
X=[0 :0.01 :5]
plot2d(X,X)
plot2d(-X,X)
```

EXERCICE 1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est elle dérivable en 0 ? Et en 1 ?

I.2 Approximer la fonction

Définition 3 (Tangente)**.** Supposons que f est dérivable en x_0.

On appelle **tangente** à la courbe de f en x_0 la droite qui passe par le point de coordonnées $(x_0,f(x_0))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(x_0)$.

La tangente à la courbe f en x_0 a pour équation

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

Exemple. Posons la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

En tous points x_0, le taux d'accroissement de la fonction f est égal à $\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0$ pour $x \neq x_0$.

En tous points x_0, la fonction f est dérivable et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$ car la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est : $y = (x - 0) \times 0 + 0 = 0$

L'équation de la tangente à la courbe de f en 1 est : $y = (x - 1) \times 2 + 1 = 2x - 1$

L'équation de la tangente à la courbe de f en -1 est : $y = (x + 1) \times (-2) + 1 = -2x - 1$

L'équation de la tangente à la courbe de f en 2 est : $y = (x - 2) \times 4 + 4 = 4x - 4$

L'équation de la tangente à la courbe de f en -2 est : $y = (x + 2) \times (-4) + 4 = -4x - 4$

Tapez sous Scilab

```
clf
X=[-3 :0.01 :3]
plot2d(X,X.^2,style=5)
X=[-2.8 :0.01 :-1.2]
plot2d(X,-4.*X-4.*ones(X))
X=[-1.8 :0.01 :-0.2]
plot2d(X,-2.*X-ones(X))
X=[-0.8 :0.01 :0.8]
plot2d(X,zeros(X))
X=[0.2 :0.01 :1.8]
plot2d(X,2.*X-ones(X))
X=[1.2 :0.01 :2.8]
plot2d(X,4.*X-4.*ones(X))
```

remarque. Par la suite, on appellera un voisinage de x_0 un intervalle ouvert suffisamment petit contenant x_0.

Proposition 4 (Développement limité d'ordre 1 en x_0)**.** Si f est dérivable en x_0, alors, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$$

avec ε une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1** en x_0.

On dit que la quantité $(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ est **négligeable** devant $x - x_0$.

Exemple.

ln admet un développement limité en 1 : $\ln(x) = \ln(1) + (x-1)\frac{1}{1} + (x-1)\varepsilon(x-1) = x - 1 + (x-1)\varepsilon(x-1)$

En posant $x - 1 = h$, on trouve au voisinage de 0,

$$\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$$

D'où, pour $h \neq 0$, $\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 + \epsilon(h)$

Par opération sur les limites, on retrouve $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

EXERCICE 2. En considérant le développement limité des fonctions *exp* et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0, retrouver les limites en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$ et $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

remarque. La notation $(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ étant un peu lourde, on lui préférera souvent une autre notation.

Proposition 5 (Développement limité d'ordre 1)**.** Si f est dérivable en x_0, alors, au voisinage de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$$

$o(x - x_0)$ se lit 'petit o de $x - x_0$', il désigne une quantité négligeable par rapport à $x - x_0$, *ie* une quantité qui divisée par $x - x_0$ tend vers 0 en x_0.

Exemple (Développement limité à l'ordre 1 en 0).

$\ln(1+x) = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

EXERCICE 3. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, le développement limité à l'ordre 1 en 2 de $x \mapsto x^3$ et le développement limité à l'ordre 1 de exp en 1.

I.3 Dérivation à gauche/droite

Définition 6. On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si son taux d'accroissement admet une limite à gauche finie en x_0.

Cette limité est appelée **dérivée à gauche** de f en x_0 et est notée $f'_g(x_0)$.

$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si son taux d'accroissement admet une limite à droite finie en x_0.

Cette limité est appelée **dérivée à droite** de f en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition 7.

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

On a alors $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

Donc $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

Finalement, f n'est pas dérivable en 0.

II Dérivation sur un intervalle

II.1 Fonction dérivée

Définition 8 (Fonction dérivée)**.**

On dit que f est dérivable sur I si elle dérivable en tous points de l'intervalle I.

On définit alors la fonction dérivée de f sur I, et on note f', la fonction qui à tout élément x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple. Comme nous l'avons montré précédemment, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

EXERCICE 4. Montrer que $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 1$ et, pour tout $x < 0$, $f(x) = -1$.

Proposition 9.

Si f est une fonction dérivable sur I, alors f est continue sur I.

ATTENTION. La réciproque est fausse, ce n'est pas parce qu'une fonction est continue qu'elle est dérivable. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue, mais pas dérivable en 0.

II.2 Fonction usuelle

Proposition 10 (Fonctions usuelles)**.**

f	$\mathcal{D}_f$	f est derivable sur	f'
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$	$]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$

remarque. Regardons la dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

On a $f(0) = 0$.

Donc la taux d'accroissement de f en 0 est, pour tout $x > 0$, $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Finalement la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Taper sous Scilab :

```
clf
X=[0 :0.01 :5]
plot2d(X,sqrt(X),style=5)
tg=[0 :0.01 :sqrt(5)]
plot2d(zeros(tg),tg)
```

On dit que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.

II.3 Dérivation et opérations

Proposition 11 (Opérations sur les fonctions dérivables)**.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

* Multiplication par un réel : la fonction λu est dérivable sur I.
$$(\lambda u)' = \lambda u'$$
* Somme : la fonction $u+v$ est dérivable sur I.
$$(u+v)' = u' + v'$$
* Différence : la fonction $u-v$ est dérivable sur I.
$$(u-v)' = u' - v'$$
* Produit : la fonction $u \times v$ est dérivable sur I.
$$(u \times v)' = u'v + uv'$$
* Inverse : si de plus v ne **s'annule pas** sur I, la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I.
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$
* Quotient : si de plus v ne **s'annule pas** sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I.
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

remarque. Si u et v sont dérivables sur I et que v ne s'annule pas sur I,

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\ &= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' \\ &= \frac{u'}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v}{v^2} + \frac{-uv'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

Exemple. Considérons $f : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$, elle est définie sur $I =]-\infty; -1[$ ou $]-1; +\infty[$.

Posons, pour $x \in I$, $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 1 + x$.

u et v sont dérivables car ce sont des polynômes et pour tout $x \in I$, $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 1$.

v ne s'annule pas sur I, donc $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-1 \times (1+x) - 1 \times (1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-1 - x - 1 + x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

EXERCICE 5. Donner l'intervalle I sur lesquelles les fonctions suivantes sont définies et dérivables, puis calculer f' sur I.

$$f : x \mapsto \frac{2x^3+2}{3x^2+x-1} \qquad f : x \mapsto (-x^2+3x-2)e^x \qquad f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{3x-5} \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$$

II.4 Dérivation et composition

Proposition 12. Soit u une fonction dérivable sur I et v une fonction dérivable sur $u(I)$.

Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I, et

$$\forall x \in I,\ (v \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Exemple. Considérons $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, elle est définie sur $I = \mathbb{R}$.

Posons, pour $x \in I$, $u(x) = x^2+1$.

On a $u(I) = [1; +\infty[$.

Pour $y \in u(I)$, $v(y) = \sqrt{y}$.

Pour $x \in I$, $u'(x) = 2x$.

Pour $y \in u(I)$, $v'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Alors f est dérivable sur I et, pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

EXERCICE 6. En utilisant la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la composition de fonction dérivée, démontrez la formule de la dérivée de la fonction $\frac{1}{v}$.

EXERCICE 7. Donner l'intervalle I sur lesquelles les fonctions suivantes sont définies et dérivables, puis calculer f' sur I.

$$f : x \mapsto \sqrt{x^3+1} \qquad f : x \mapsto \ln(x^2-1) \qquad f : x \mapsto e^{3x^2+1} \qquad f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Proposition 13. Soit u une fonction dérivable sur I.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est dérivable sur I et
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
* Si u est **positive** sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
* Si u est **strictement positive** sur I, $\ln(u)$ est dérivable sur I et
$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$
* e^u est dérivable sur I et
$$(e^u)' = u'e^u$$

EXERCICE 8. Donner l'intervalle I sur lesquelles les fonctions suivantes sont définies et dérivables, puis calculer f' sur I.

$$f : x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad f : x \mapsto 3^x \qquad f : x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

II.5 Dérivation et bijection

Proposition 14. Soit f une fonction bijective et dérivable sur I.

* Si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\forall y \in f(I),\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

* Si f' s'annule en un point x_0, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$.

remarque. Dans l'indispensable 6, nous avons vu que la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et que sa réciproque est la fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Puisque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée (qui est exp) est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on retrouve le fait que ln est dérivable sur $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall y > 0,\ (\ln)'(y) &= \frac{1}{\exp'(\ln(y))}\\ &= \frac{1}{\exp(\ln(y))}\\ &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

EXERCICE 9. Montrer de même à partir de la fonction ln la dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction exp.

EXERCICE 10. Revenons sur la fonction racine cubique que nous avons présenté à l'indispensable 6.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est une bijection sur $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
2. Donner la monotonie de f^{-1}.
3. Tracer le graphe de f^{-1}.
4. Montrer que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$.
5. f^{-1} est elle dérivable en 0 ?
6. Montrer que f^{-1} est dérivable en tous points $y_0 \neq 0$ et calculer sa dérivée.

Méthode. Pour montrer qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I.

1. Commencez par morceler la fonction f en fonctions usuelles dont vous connaissez la dérivabilité.
2. Utilisez les opérations sur les fonctions pour retrouver la dérivabilité de la fonction f.
3. S'il reste des points dont vous ne savez pas s'ils sont dérivables ou non, utilisez la définition de la dérivabilité en un point. Calculez le taux d'accroissement de la fonction en ces points et calculer sa limite.

III Applications

III.1 Variations d'une fonction

Proposition 15. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I.
* f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I.
* f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.

Proposition 16. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* Si f' est positive sur I, f' **ne s'annulant qu'en un nombre fini de points**, alors f est **strictement croissante** sur I.
* f' est négative sur I, f' **ne s'annulant qu'en un nombre fini de points**, alors f est **strictement décroissante** sur I.

EXERCICE 11. Donner le tableau de variations de la fonction $x \mapsto x^3 + 2x^2 - x - 2$

Méthode. Pour établir le tableau de variations d'une fonction f.

1. Donnez l'intervalle I sur lequel f est dérivable.
2. Calculez la dérivée de f.
3. Posez $f'(x) > 0$ et trouvez les $x \in I$ qui vérifient cette inéquation. Pour tous les autres x, on a $f(x) \leqslant 0$.
4. Établissez alors le tableau de signe de f'.
5. En déduire par l'une des propositions précédentes le tableau de variation de la fonction f.

III.2 Extrema locaux

Considérons une fonction g définie sur I et x_0 un point de I qui (seulement dans cette partie) peut être une extrémité de I.

Définition 17 (Extremum global)**.**

* On dit que f admet un **maximum global** sur I en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
* On dit que f admet un **minimum global** sur I en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Un **extremum global** de f sur I est un point x_0 qui est soit un minimum global, soit un maximum global.

Exemple.

* La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ en 0 et n'admet pas de maximum global.

  Regardons les variations de f.

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

  f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc pour tout $x < 0$, $f(x) > f(0)$

  f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x > 0$, $f(x) > f(0)$.

  Finalement on trouve que f admet un minimum global en 0 qui est $f(0) = 1$.

  De plus, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}$.

  Taper sous Scilab :

```
clf
X=[-3 :0.01 :3]
plot2d(X,X.^2+ones(X))
```

* La fonction $f : x \mapsto x + 1$ définie sur $I = [1; 2]$ admet un maximum global en 2 et un minimum global en 1.
  Taper sous Scilab :

```
clf
X=[1 :0.01 :2]
plot2d(X,X+ones(X))
```

Définition 18 (Extremum local)**.**

* On dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J, tel que $x_0 \in J$ et

$$\forall x \in J,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

.

* On dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J, tel que $x_0 \in J$ et

$$\forall x \in J,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

.

Un **extremum local** de f sur I est un point x_0 qui est soit un minimum local, soit un maximum local.

remarque. Un extremum global est également un extremum local (seulement si x_0 n'est pas une extrémité de I), la réciproque est **fausse**.

ATTENTION. C'est sous-entendu dans la définition puisque J est un intervalle ouvert, mais, x_0 ne peut pas être une extrémité de l'intervalle J !

Proposition 19. Supposons à nouveau que x_0 n'est pas une extrémité de I.

Si x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.

Exemple. $f : x \mapsto x^2 + 1$ admet un minimum global, donc local en 0, on a bien $f'(0) = 0$.

On dit que f admet une tangente horizontale en 0.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x + 1$ définie sur $I = [1; 2]$ admet un minimum global en 1, mais $f'(1) = 1 \neq 0$, en effet 1 est à l'extrémité de I.

ATTENTION. La réciproque est fausse ! Si $f'(x_0)$, rien ne dit que f admet un extremum local en x_0.

Exemple. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f'(0) = 0$ et f n'admet pas d'extremum en 0.

Proposition 20. Pour f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$ mais qui n'est pas une extrémité de I.

Si $f'(x_0) = 0$ et que f' **change de signe** en x_0, alors f admet un extrémum local en x_0.

EXERCICE 12. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. Donner le tableau de signe de f'.
3. En déduire les extrema de f.

III.3 Inégalité des accroissements finis

Proposition 21 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Supposons qu'il existe des réels m et M tels que, pour tout $x \in]a,b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors,

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Proposition 22 (Inégalité des accroissements finis, deuxième version)**.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Supposons qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant k$. Alors,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$$

EXERCICE 13. Nous allons montrer dans cet exercice la divergence de la série harmonique.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln(n+1) - \ln(n)$ diverge.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

III.4 Méthode de Newton (culturel)

Considérons f une fonction dérivable sur un intervalle I et s'annulant en $\alpha \in I$ tel que α ne soit pas une extrémité de I.

Prenons un point $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 qui s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$$

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Les coordonnées du point où la tangente croise l'axe des abscisses est alors

$$y = 0 \text{ et } 0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Donc $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Nous allons ainsi définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence valant initialement x_0 et telle que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Cette suite, sous certaines conditions, converge vers la racine α. Il s'agit de la méthode de Newton.

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point, à gauche ou à droite en utilisant la taux d'accroissement.
* Connaître la dérivation des fonctions usuelles.
* Savoir utiliser les opérations entre les fonction (y compris la composition et l'inverse d'une bijection) et la dérivabilité en un point pour pouvoir montrer qu'une fonction est dérivable et calculer sa dérivée.
* Savoir donner l'équation de la tangente en un point de la courbe de la fonction.
* Savoir donner le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction en un point.
* Connaître la caractérisation des variations d'une fonction et savoir l'utiliser pour établir un tableau de variation
* Connaître la définition des extrema (locaux et globaux) d'une fonction, connaître la caractérisation des extrema locaux d'une fonction et savoir l'utiliser.
* Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis