# Chapitre 14 : Intégrales

## Objectifs du chapitre

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Connaître les primitives des fonctions usuelles et savoir utiliser les opérations et compositions sur les fonctions pour calculer la primitive d'une fonction.
* Savoir calculer une intégrale par calcul de primitive.
* Savoir utiliser l'intégration par parties.
* Savoir utiliser le changement de variables lorsqu'il est suggéré ou savoir le faire en autonomie lorsqu'il s'agit d'un changement de variables affine.
* Connaître la méthode des rectangles.
* Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann et pouvoir l'utiliser pour calculer des limites bien particulières.

## I Cas particulier des fonctions positives continues et strictement croissantes

Considérons une fonction $f$ positive, continue et strictement croissante définie sur un segment $[a;b]$.

Nous allons regarder la fonction $F$ définie sur $[a;b]$ par :
$F(x_0)$ est l'aire sous la courbe $y = f(x)$ comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = x_0$ et $y = 0$, pour $x_0 \in [a;b]$.

Regardons alors $x_0 < x$, puisque $f$ est strictement croissante, on trouve l'inégalité suivante :

$$f(x_0)(x - x_0) \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant f(x)(x - x_0)$$

On obtient ainsi le fait que

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x)$$

En faisant tendre $x$ vers $x_0$, on trouve, par théorème d'encadrement, que la fonction $F$ est dérivable en $x_0$ et

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

*remarque.* Nous reviendrons sur cette idée par la suite lorsque nous discuterons de la méthode des rectangles.

## II Intégration sur un segment

### II.1 Primitive d'une fonction

**Définition 1** (Primitive)**.** Soit $f$ une fonction définie sur $I$.

S'il existe une fonction $F$ **dérivable** sur $I$ telle que sa dérivée $F'$ est égale à la fonction $f$, alors on dit que $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$.

On a alors : $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

**EXERCICE 1.** Donner une primitive des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x) = x \qquad g(x) = -3 \qquad h(x) = x^2 + 1$$

*remarque.* Si on considère deux primitives $F$ et $G$ d'une fonction $f$, alors $F$ et $G$ sont égales à une constante près.

Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, on a :

$$F(x) = G(x) + K$$

*Méthode.* Pour trouver toutes les primitives d'une fonction $f$, il suffit de trouver une primitive $F$ de $f$ et alors, l'ensemble des primitives de $f$ est :

$$\{x \mapsto F(x) + K | K \in \mathbb{R}\}$$

**EXERCICE 2.** Donner l'ensemble des primitives de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3$.

**Théorème 2.**

*Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.*

**EXERCICE 3.** Montrer que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

## II.2 Intégrale d'une fonction

**Définition 3** (Intégrale)**.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$, $b \in I$.

$f$ admet donc une primitive $F$ sur $I$.

On définit l'intégrale de $f$ de $a$ à $b$ comme le réel :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

*remarque.* La définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive de $f$.

*Notation.* On note souvent $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

*Méthode.* Une première façon de calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est de calculer une primitive de la fonction $f$.

*Exemple.* On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^1 t\ dt$.

On cherche une primitive de $t \mapsto t$ : $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$.

On a alors $\int_0^1 t\ dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}$.

*Rappel.* Dans une somme, l'indice $k$ est ce que l'on appelle une variable muette, il indique l'indice sur lequel on somme. On peut changer la lettre sans que cela ne change la valeur de la somme.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

*remarque.* Dans une intégrale, la variable $t$ est également une variable muette, elle indique l'indice par rapport à laquelle on intègre. On peut changer la lettre sans que cela ne change la valeur de l'intégrale.

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(s)\ ds$$

**EXERCICE 4.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 t^2\ dt \qquad \int_1^2 x\ dx \qquad \int_a^b 1\ ds$$

## II.3 Primitives usuelles

**Proposition 4** (Primitive des fonctions usuelles)**.** Pour $K \in \mathbb{R}$, on a :

| $f$ | *primitive* $F$ | $f$ est integrable sur |
|---|---|---|
| $x \mapsto 1$ | $x \mapsto K$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 1$ | $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + K$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln(x) + K$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x + K$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x} + K$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x} + K$ | $]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$ |

*remarque.* Il s'agit de reprendre le tableau de dérivation des fonctions usuelles à l'envers.

*Exemple.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
La dérivée de $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est $x \mapsto (\alpha+1)x^\alpha$.
Pour $\alpha \neq -1$, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ est $x \mapsto x^\alpha$.
Finalement, pour $\alpha \neq -1$, la primitive de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.

**EXERCICE 5.** Donner les primitives des fonctions suivantes et calculer leur intégrale entre 1 et 2.

$$x \mapsto x^7 \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x \mapsto x\sqrt{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x}$$

## II.4 Primitive et opérations

**Proposition 5** (Opération sur les primitives)**.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues.
Soient $F$ et $G$ des primitives respectivement de $f$ et $g$.

* Multiplication par un réel : une primitive de $\lambda f$ est
$$\lambda F$$
* Somme : une primitive de $f + g$ est
$$F + G$$

**Proposition 6** (Linéarité de l'intégrale)**.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f$ et $g$ des fonctions continues sur un segment $[a;b]$, avec $a < b$.

$$\int_a^b \lambda f(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt$$

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$$

**EXERCICE 6.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_1^3 (e^x + \ln(x))\ dx \qquad \int_0^1 (4x^2 - 3x + 1)\ dx$$

*remarque.* Il n'existe pas vraiment de formule pour la primitive du produit ou du quotient de deux fonctions. On va cependant utiliser la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions plus tard dans le cours par la technique de l'intégration par parties.

## II.5 Primitive et composition

**Proposition 7.** Soit $u$ une fonction continue et dérivable sur $I$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la primitive de $u'u^n$ est : $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
* Soit $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$, si u est **strictement positive**, la primitive de $u'u^\alpha$ est : $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.
* Si $u$ est **strictement positive** sur $I$, la primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est : $2\sqrt{u}$.
* Si $u$ est **strictement positive** sur $I$, la primitive de $\frac{u'}{u}$ est : $\ln(u)$.
* La primitive de $u'e^u$ est : $e^u$.

*remarque.* Entre autre, une primitive qui revient très régulièrement et que vous devez pouvoir identifier à l'œil est la primitive de $u'u$ qui est : $\frac{1}{2}u^2$.

*remarque.* Il s'agit là encore de regarder les formules de dérivation à l'envers.

**EXERCICE 7.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la primitive de $u'u^\alpha$ ?

**EXERCICE 8.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx \qquad \int_0^2 e^{3x}\, dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\, dx \qquad \int_1^3 \frac{\ln(x)}{x}\, dx$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\, dx \qquad \int_{-2}^{2} e^{2x}\left(e^{2x}-3\right)^2\, dx \qquad \int_{-1}^{1} (x-1)^2\, dx \qquad \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx \qquad \int_0^2 (x+1)^3\, dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\, dx \qquad \int_1^3 \frac{\ln(x)^2}{x}\, dx$$

# III Propriétés de l'intégrale

## III.1 Changement de bornes

**Proposition 8.** Soit $f$ une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ avec $a<b$.

$$\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$$

*remarque.* Par convention, on écrit le plus souvent $\int_a^b$ avec $a<b$, mais ce n'est pas obligatoire !

Dans le cas où $a>b$, il ne faut pas oublier le signe.

**Proposition 9.** Soit $f$ une fonction définie et continue au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0$$

**Proposition 10** (Relation de Chasles)**.**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ et $a$, $b$, $c \in I$.

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

**EXERCICE 9.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

## III.2 Intégrale et inégalité

**Proposition 11.** Soit $f$ une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$ avec $a<b$, alors

$$\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$$

*ATTENTION.* Pour utiliser cette propriété, il faut que $\boldsymbol{a<b}$

*remarque.* Dans le cas d'une fonction continue et positive, $\int_a^b f(t)\ dt$ est l'aire sous la courbe de la fonction.

**Proposition 12.** Soit $f$ une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$, avec $a<b$, et telle que $\int_a^b f(t)\ dt = 0$. Alors, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x)=0$, on dit qu'elle est identiquement nulle.

**Proposition 13.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ avec $a<b$.
Si, pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors

$$\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$$

*ATTENTION.* Encore une fois, cette proposition est vraie seulement dans le cas $a<b$.

*Exemple.* Pour tout $x \in [0;1]$, on a $x^2 \leqslant x$.
De plus, $\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$
Et $\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$
On retrouve bien le fait que $\int_0^1 x^2\ dx \leqslant \int_0^1 x\ dx$.

**EXERCICE 10.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, telle que, pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant M$.
Montrer que $\int_a^b |f(t)|\ dt \leqslant M(b-a)$.

**EXERCICE 11.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\ dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que, pour tout $t \in [0;1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

**Proposition 14** (Inégalité triangulaire)**.** Soit $f$ continue sur un segment $[a;b]$ avec $a<b$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$$

*remarque.* Encore une fois, il est nécessaire d'avoir $a<b$ pour appliquer cette proposition.

**EXERCICE 12.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, telle que, pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant M$.
Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant M(b-a)$.

# IV Techniques de calcul d'intégrales

## IV.1 Intégration par parties

**Définition 15.**

On dit qu'une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ si $f$ est dérivable et que $f'$ est continue sur $I$.

**Théorème 16** (intégration par parties)**.**

*Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$ avec $a<b$.*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$$

*remarque.* On utilise ici la formule de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$.

On a, pour tout $t \in [a;b]$, $u(t)v'(t) = (u(t)v(t))' - u'(t)v(t)$.

En intégrant cette égalité entre $a$ et $b$, on trouve

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = \int_a^b ((u(t)v(t))' - u'(t)v(t))\ dt$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = \int_a^b (u(t)v(t))'\ dt - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$$

En intégrant $\int_a^b (u(t)v(t))'\ dt$, on trouve finalement :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$$

*Exemple.* Calculons $\int_0^2 te^{-t}\ dt$.

Pour $t \in [0;2]$, posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$.

Alors, pour tout $t \in [0;2]$, on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$.

Par intégration par parties, on trouve alors

$$\begin{aligned}\int_0^2 te^{-t}\ dt &= \left[t\times(-e^{-t})\right]_0^2 - \int_0^2 1\times(-e^{-t})\ dt\\ &= 2(-e^{-2}) - 0(-e^{-0}) + \int_0^2 e^{-t}\ dt\\ &= -2e^{-2} + \left[-e^{-t}\right]_0^2\\ &= -2e^{-2} + 1 - e^{-2}\\ &= 1 - 3e^{-2}\end{aligned}$$

*Méthode.* Une règle qui fonctionne généralement est la "règle du LPE" (Logarithme-Polynôme-Exponentielle) :

Elle consiste à poser $u$ :

* le logarithme, s'il y en a un. Le plus souvent, on posera dans ce cas $u(t) = \ln(t)$, mais ce ne sera pas toujours le cas.
* Sinon, le polynôme, s'il y en a un.
* Sinon, l'exponentielle.

**EXERCICE 13.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 t\ln(t)\ dt \qquad \int_2^4 (2t-1)e^{3t}\ dt \qquad \int_1^2 t^3\ln(t)\ dt$$

*Méthode.* On peut effectuer plusieurs intégrations par parties pour faire baisser le degré d'un polynôme jusqu'à le faire disparaitre.

**EXERCICE 14.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 t^2 e^{-t}\ dt \qquad \int_{-1}^1 (t^2+t-1)e^t\ dt \qquad \int_2^3 t^3 e^{2t}\ dt$$

*Méthode.* Pour appliquer la méthode LPE, il peut être nécessaire de prendre $v' = 1$.

*Exemple.* Calculons $\int_1^3 \ln(t)\ dt$.

Pour $t \in [1;3]$, posons $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$.

Alors, pour tout $t \in [1;3]$, on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$.

Par intégration par parties, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \ln(t)\ dt &= \left[\frac{1}{t} \times 1\right]_1^3 - \int_1^3 t \times \frac{1}{t}\ dt \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right) + \int_1^3 1\ dt \\
&= -\frac{2}{3} + [t]_1^3 \\
&= -\frac{2}{3} + 3 - 1 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

## IV.2 Changement de variable

**Théorème 17.** *Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$, avec $a < b$, et $\varphi : [a;b] \to I$.*

*Soit $f$ une fonction continue sur $I$, alors*

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$$

*Exemple* (À retenir). Nous allons calculer l'intégrale $\int_1^e \frac{1}{t(\ln(t)+1)}\ dt$ en posant le changement de variable : $x = \ln(t)$.

À faire au brouillon,

1. Transformer le $dt$ en appliquant la règle $dx = \varphi'(t)\ dt$.

   Posons $\varphi(t) = \ln(t)$, alors $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

   Donc $dx = \frac{1}{t} dt$

2. Si possible, et ce n'est pas toujours le cas, inverser le changement de variable

   Ici, $t = e^x$.

3. Transformer l'expression dans l'intégrale.

$$\frac{1}{t(\ln(t)+1)}\ dt = \frac{1}{\ln(t)+1} \times \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x+1}\ dx$$

4. Pour finir, transformer les bornes (n'oubliez pas cette étape !)

   On calcule $\varphi(1) = \ln(1) = 0$ et $\varphi(e) = \ln(e) = 1$.

Pour ce qui est de la rédaction sur votre copie.

Effectuons le changement de variable $x = \ln(t)$, on a alors $dx = \frac{1}{t}\ dt$.

On trouve alors

$$\int_1^e \frac{1}{t(\ln(t)+1)}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

*ATTENTION.* Le plus important pour ce qui est de la rédaction est qu'il ne doit en AUCUN cas y avoir un mélange des variables $x$ et $t$. Il faut donc effectuer tous les changements en même temps. N'hésitez donc pas à utiliser votre brouillon pour ce faire.

**EXERCICE 15.** Calculer les intégrales suivantes en utilisant les changements de variable indiqués.

1. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(2+\sqrt{t})}\ dt$, en posant $x = \sqrt{t}$.
2. $\int_0^2 \frac{e^t}{1+e^t}\ dt$, en posant $x = e^t$.
3. $\int_{-1}^1 \frac{t^2}{t^3+2}\ dt$, en posant $x = t^3$.

*ATTENTION.* On ne vous demandera pas de poser vous même le changement de variable à effectuer, SAUF dans le cas d'un changement de variable affine (de la forme $x = \alpha t + \beta$), où le sujet n'indiquera pas forcément le changement de variable à effectuer.

**EXERCICE 16.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 t\sqrt{2t-1}\ dt \qquad \int_0^1 \frac{x}{2x-3}\ dx \qquad \int_2^5 s^2\ln(5s-1)\ ds$$

# V Méthode des rectangles

## V.1 Intégration d'une fonction continue par morceaux

**Définition 18** (Rappel)**.** Soient $a$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f$ une fonction définie sur $[a;b]$.
On dit que $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a;b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telles que les restrictions de $f$ à chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i,a_{i+1}]$.

**Définition 19.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a;b]$, $a < b$ et $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ la subdivision associée (*ie* $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont les points de discontinuité de la fonction $f$).

On définit alors l'intégrale de $f$ sur $[a;b]$ par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\ dt &= \int_{a_0}^{a_1} f(t)\ dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)\ dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)\ dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt\end{aligned}$$

*remarque.* Toutes les propriétés vues précédemment sur les intégrales définies pour les fonctions continues sur le segment $[a;b]$ restent vraies pour les fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$.

*Exemple.* Considérons la fonction $f$ telle que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = x+1$ et, pour tout $x < 0$, $f(x) = -x^2$.

Calculer $\int_{-1}^1 f(t)\ dt$.

$f$ est continue par morceaux sur $[-1;1]$, $f$ est continue sur $[-1;0[$ et $]0;1]$.

$f$ admet une discontinuité en $0$.

On a alors

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(t)\ dt &= \int_{-1}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1} f(t)\ dt \\ &= \int_{-1}^{0} -t^2\ dt + \int_{0}^{1} (t+1)\ dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}(1+t)^2\right]_{0}^{1} \\ &= -\frac{1}{3}0^3 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3\right) + \frac{1}{2}(1+1)^2 - \frac{1}{2}(1+0)^2 \\ &= -\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

**EXERCICE 17.** Calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor\ dt$.

## V.2 Présentation de la méthode

L'idée de la méthode des rectangles est de calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ en calculant l'aire de rectangles qui est facile à calculer pour un ordinateur.

**Proposition 20** (Rappel)**.**

L'aire d'un rectangle de côtés de longueur $\ell$ et $L$ est $\ell * L$.

**Méthode des rectangles à gauche** L'aire de la surface des $n$ rectangles est alors

$$S_n^{(g)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

**Méthode des rectangles à droite**
L'aire de la surface des $n$ rectangles est alors

$$S_n^{(d)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

**Définition 21.**

Pour $f$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$, pour $a < b$, les sommes $S_n^{(g)}(f)$ et $S_n^{(d)}(f)$ sont appelées des sommes de Riemann à pas constant.

*remarque.* Les sommes de Riemann ne sont pas des séries.

**Proposition 22.**

Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$, pour $a < b$, les sommes de Riemann à pas constant $\left(S_n^{(g)}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(S_n^{(d)}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **convergent** et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(g)}(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^{(d)}(f) = \int_a^b f(t)\ dt$$

## V.3 Scilab

Il est délicat d'enseigner à un ordinateur de calculer une primitive de façon systématique, par contre, il est bien plus facile de lui faire sommer des rectangles.

Pour cet exemple, nous allons considérer la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction dont nous reparlerons plus tard et qui porte le nom de loi exponentielle.

Nous allons écrire des programmes demandant à l'utilisateur d'entrer une valeur $\lambda$ et donnant les valeurs $S_{100}^{(g)}(f)$ et $S_{100}^{(d)}(f)$ qui approximent l'intégrale $\int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\ dx$.

```
lambda=input("entrer un réel lambda")

function y=f(x)
    y=lamdba*exp(- lambda *x)
endfunction

a=0
b=1
n=100
K=[0 :(n-1)]
S=((b-a)/n)*sum(f(a.*ones(K)+((b-a)/n).*K))
disp(S)
```

```
lambda=input("entrer un réel lambda")

function y=f(x)
    y=lamdba*exp(- lambda *x)
endfunction

a=0
b=1
n=100
K=[1 :n]
S=((b-a)/n)*sum(f(a.*ones(K)+((b-a)/n).*K))
disp(S)
```

**EXERCICE 18.** Écrire un programme qui demande à un utilisateur de rentrer une valeur $\sigma$ et qui calcule les sommes de Riemann à pas constant pour la fonction $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

Cette fonction s'appelle la loi normale (plus exactement la loi normale centrée) ou la gaussienne, on en reparlera également dans les chapitres suivant.

## V.4 Calcul de limites

*Méthode.* À l'inverse de ce qu'on a fait précédemment, on peut utiliser les sommes de Riemann à pas constant pour calculer les limites par un calcul d'intégrale.

**EXERCICE 19.** Calculer les limites des suites suivantes.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \qquad \frac{1}{n^8}\sum_{k=0}^{n-1} k^7 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$$