Chapitre 15 : Variable aléatoire réelle

Dans tout ce chapitre, nous considérerons un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, en cas de doute sur ce dont il s'agit, retournez voir le chapitre 11.

Objectifs du chapitre

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Connaître les notations $[X \in I]$, $[X = x]$ et $[X \leqslant x]$ et savoir ce qu'elles signifient.
* Savoir calculer $X(\Omega)$ pour X une variable aléatoire réelle.
* Connaître la définition d'un système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
* Connaître la définition d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire et les propriétés de ces fonctions.
* Savoir ce que signifie : "La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire".

I Variable aléatoire à valeur réelle

Définition 1 (Variable aléatoire réelle)**.**

Un **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

On note alors $[\boldsymbol{X \leqslant x}]$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}$.

ATTENTION. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un **réel**.

Exemple. Nous réutiliserons ces exemples par la suite.

1. On lance un dé trois fois de suite, on note X_1 la somme des résultats obtenus.

   $X_1(\{1;1;1\}) =$ $\qquad$ $X_1(\{1;6;3\}) =$ $\qquad$ $X_1(\{5;4;6\}) =$
2. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir face. On note X_2 le nombre de lancers effectués.

   $X_2(\{F\}) =$ $\qquad$ $X_2(\{P;P;F\}) =$ $\qquad$ $X_2(\{P;F\}) =$
3. Considérons une personne jouant à la roulette. Pour rappel, une roulette est constituée de 37 cases, 18 noires, 18 rouges et 1 verte. Le joueur mise 1€ à chaque partie, s'il gagne, il double ses gains, s'il échoue, il perd sa mise.

   Le joueur joue 3 parties, on note X_3 les gains (ou la dette) du joueur.

   $X_3(\{V;V;D\}) =$ $\qquad$ $X_3(\{D;V;D\}) =$ $\qquad$ $X_3(\{D;D;D\}) =$
4. Considérons une fourmi sur un fil tendu. Notons X_4 sa position sur le fil une fois 3 minutes écoulées.

remarque. En pratique, on ne vous demandera jamais de montrer que X est une variable aléatoire.

Définition 2 (Univers associé à une variable aléatoire réelle)**.**

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X. On appelle $X(\Omega)$ l'univers associé à X.

Exemple.

1. $X_1(\Omega) =$
2. $X_2(\Omega) =$
3. $X_3(\Omega) =$
4. $X_4(\Omega)$

Notation. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on note :

* $[X \in I]$ l'ensemble .
* $[X = x]$ l'ensemble .
* $[X \leqslant x]$ l'ensemble .

EXERCICE 1. Définir de même que précédemment les notations $[X < x]$, $[X > x]$ et $[X \geqslant x]$.

remarque. Ces éléments étant des événements, on peut alors calculer leur probabilité.

Exemple.

1. $\mathbb{P}([X_1 = 3]) =$ $\mathbb{P}([X_1 \leqslant 1]) =$ $\mathbb{P}([X_1 \geqslant 17]) =$
2. $\mathbb{P}([X_2 = 3]) =$ $\mathbb{P}([X_2 \leqslant 1]) =$ $\mathbb{P}([X_2 \geqslant 17]) =$
3. $\mathbb{P}([X_3 = 3]) =$ $\mathbb{P}([X_3 = 2]) =$ $\mathbb{P}([X_3 \leqslant 0]) =$

EXERCICE 2. Démontrer tous les résultats de l'exemple.

EXERCICE 3. On lance deux dés non truqués. Soit X donnant la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

1. Déterminer Ω, puis $X(\Omega)$.
2. Décrire $[X = 3]$ avec une phrase, puis avec un ensemble.
3. Faire de même avec les événements $[X < 2]$ et $[X \geqslant 11]$.
4. Calculer $\mathbb{P}([X = 3])$, $\mathbb{P}([X < 2])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant 11])$

Définition 3 (Système complet d'événement associé à une variable aléatoire)**.**

Considérons l'ensemble des valeurs possible d'une variable aléatoire X : $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

La famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événement de Ω.

On l'appelle le **système complet d'événements associé à la variable aléatoire** X.

Exemple. Regardons l'exemple 1, on rappelle que $X_1(\Omega) =$.

Alors l'ensemble

À partir de maintenant, nous allons considérer dans la suite de ce chapitre, nous considérerons une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

II Fonction de répartition

Définition 4 (Fonction de répartition)**.**

On définit fonction de répartition de X comme la fonction, notée F_X, telle que :

ATTENTION. F_X est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple.

3. $F_{X_3}(x) =$

2. $F_{X_2}(x) =$

4. F_{X_4}

EXERCICE 4. On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. On pioche une boule dans cette urne et on note X le numéro de la boule piochée.

1. Donner l'univers associé à la variable aléatoire X.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
3. Donner l'expression de la fonction F_X.
4. Tracer la fonction F_X.

Proposition 5 (Propriétés des fonctions de répartition)**.** Toute fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X vérifie les propriétés suivantes :

* F_X est .
* F_X est .
*
*

Exemple. Les fonctions de répartitions vues précédemment vérifient bien ces propriétés.

EXERCICE 5. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$, pour $a < b$, vérifient les propriétés de la proposition précédente.

III Loi d'une variable aléatoire

Définition 6 (Loi d'une variable aléatoire)**.** Soit X une variable aléatoire réelle.

La loi de la variable aléatoire X est l'ensemble des valeurs des probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$, pour I une union (finie ou dénombrable) d'intervalles de $\mathbb{R}$.

remarque. En pratique, on ne vous demandera pas de connaître cette définition, mais de connaître la définition dans des cas spécifiques que vous verrez dans les prochains chapitres.

Théorème 7. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.*

X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.